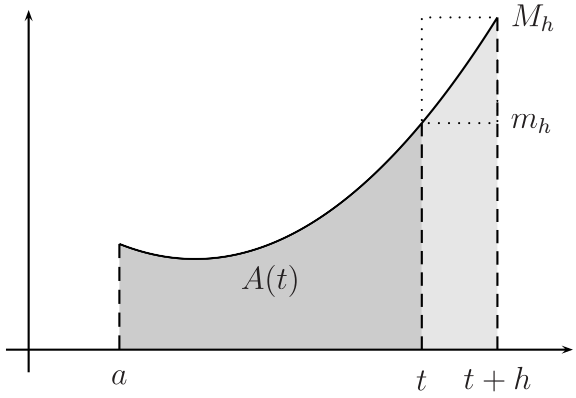
# 3

# Calcolo Integrale

Nello studio del calcolo differenziale si è visto come si può associare ad una funzione la sua derivata. Il calcolo integrale si occupa del problema inverso: data una funzione $f$ e un intervallo $I$ è possibile determinare una funzione $F$ tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in I \text{ ?}$$

Una funzione $F$ con questa proprietà si dice *primitiva* di $f$ nell'intervallo $I$.
Ad esempio la funzione $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ è una primitiva di $f(x) = x$ in $\mathbb{R}$. Ricordando che la derivata di una funzione costante è identicamente zero, si capisce che il problema di "anti-derivazione" se ha almeno una soluzione ne ha automaticamente infinite: se $F$ è una primitiva di $f$ allora anche $F + c$ è una primitiva per qualunque scelta della costante reale $c$. Anzi si può dimostrare che in questo modo si individuano tutte le possibili primitive di una funzione data. Lo sviluppo di tecniche che permettono la "ricostruzione" della primitiva di una funzione ha un'applicazione fondamentale: il calcolo di aree di figure piane. Consideriamo infatti una funzione continua $f$ definita su un certo insieme $[a, b]$ e e supponiamo di poter assegnare un'area al "trapezoide" limitato dal grafico di $f$, dall'asse delle $x$, dalla retta $x = a$ e dalla retta $x = t$ con $t \in [a, b]$. Denotiamo questa funzione con $A(t)$ (che in seguito chiameremo funzione integrale) e proviamo a calcolarne la derivata. Variando la posizione di $t$, da $t$ a $t+h$, la differenza $A(t+h)-A(t)$ corrisponde all'area del trapezoide che ha per base l'intervallo $[t, t + h]$.




Siano $m_h$ e $M_h$ rispettivamente il minimo e il massimo valore della funzione sull'intervallo $[t, t + h]$ allora la differenza $A(t + h) - A(t)$ si può stimare con le aree dei rettangoli di base $[t, t + h]$ e altezze $m_h$ e $M_h$.

$$m_h \cdot h \leq A(t + h) - A(t) \leq M_h \cdot h.$$

Quindi

$$m_h \leq \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \leq M_h.$$

Facendo tendere $h$ a zero, dato che $f$ è continua (per funzioni più irregolari la situazione è più complicata) i numeri $M_h$ e $m_h$ tendono a $f(t)$ (ossia al massimo e al minimo di $f$ nell'intervallo "contratto" costituito dal solo punto $t$). Quindi $A'(t) = f(t)$ e $A$ è una primitiva di $f$.

## 1. Definizione di integrale

Nell'introduzione abbiamo parlato della possibilità di assegnare un'area ad un trapezoide. Ora precisiamo meglio come va intesa questa affermazione. Supponiamo che $f$ sia una funzione limitata definita su un insieme $[a, b]$. L'idea è di "approssimare" l'area del trapezoide con delle unioni di rettangoli. Suddividiamo $[a, b]$ in $N$ sotto-intervalli di ampiezza uniforme inserendo i seguenti punti

$$x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{N} \quad \text{con } n = 0, 1, \cdots, N.$$

Ora costruiamo le due somme:

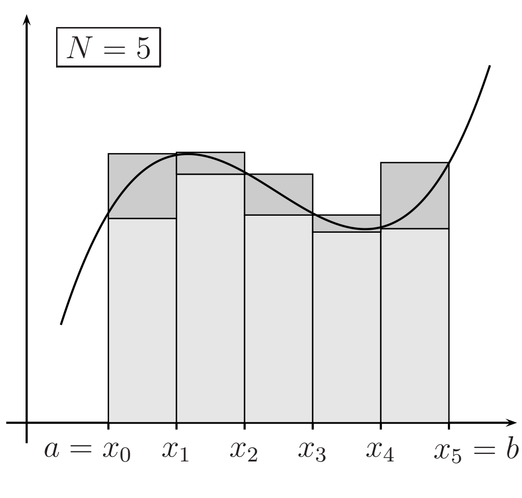
$$s_N = \sum_{n=1}^{N} m_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^{N} m_n$$

e

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} M_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^{N} M_n.$$

dove

$$m_n = \inf \{f(x) : x \in [x_{n-1}, x_n]\} \quad \text{e} \quad M_n = \sup \{f(x) : x \in [x_{n-1}, x_n]\}.$$



Le somme $s_N$ e $S_N$ misurano le aree delle regioni formate dai rettangoli rispettivamente "iscritti" e "circoscritti" al grafico e quindi rappresentano la stima inferiore e superiore (di ordine $N$) dell'area da calcolare. L'area del trapezoide è definita se questo procedimento di approssimazione dal basso e dall'alto individua al limite un unico numero:

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} S_N = \text{Area del trapezoide.}$$

In questo caso la funzione $f$ si dice *integrabile* nell'intervallo $[a,b]$ e l'area del trapezoide si indica

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

che si legge *integrale tra $a$ e $b$ di $f$ in $dx$*. Il simbolo di integrale $\int$ è una $S$ allungata che ricorda la costruzione con le somme che abbiamo appena descritto. Anche se non tutte le funzioni limitate sono integrabili, si può dimostrare che le funzioni continue lo sono e anzi, come abbiamo anticipato nell'introduzione, il problema del calcolo dell'integrale è direttamente correlato con la determinazione di una primitiva. Vale infatti il seguente teorema:

**Teorema fondamentale del calcolo integrale**

Sia $f$ una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ allora

(1) la *funzione integrale*

$$[a,b] \ni t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$$

è una primitiva di $f$.

(2) Se $F$ è una primitiva di $f$ in $[a,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Se la funzione $f$ è solo continua a tratti allora la funzione integrale è continua ed è derivabile all'interno del dominio tranne nei punti in cui la $f$ è discontinua.

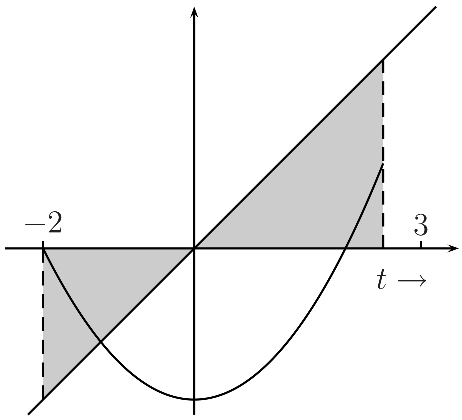
— ◇ —

**Esempio 1.1** Se $f(x) = x$ allora, come già osservato, una primitiva di $f$ è la funzione $\frac{1}{2}x^2$. La funzione integrale relativa ad esempio all'intervallo $[-2,3]$ è uguale a

$$A(t) = \int_{-2}^t f(x)\,dx = F(t) - F(-2) = \frac{t^2}{2} - 2$$

ed è una funzione continua e derivabile la cui derivata coincide con $f$. Quindi la crescenza/decrescenza della funzione integrale dipende dal segno della funzione $f$:

l'area sotto la curva, spaziata variando $t$, per $t = -2$ è nulla poi decresce diventando negativa (l'area è "contata" negativa se sta sotto l'asse delle $x$) e poi cresce da $t = 0$ diventando nulla in $t = 2$ e positiva per $t > 2$.




Supponiamo ora che la funzione $f$ sia discontinua. Ad esempio

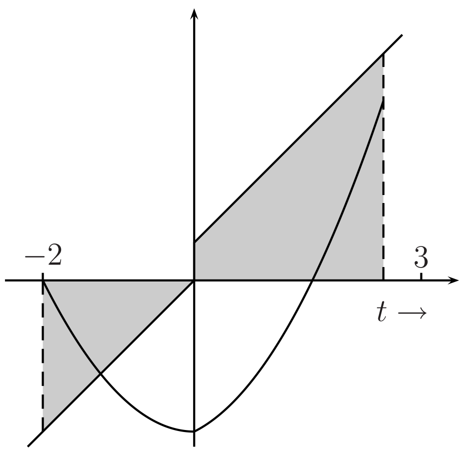
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 0 \\ x + \frac{1}{2} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}.$$

In questo caso la funzione integrale relativa all'intervallo $[-2, 3]$ è uguale a

$$A(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} - 2 & \text{per } t < 0 \\ \\ \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t}{2} - 2 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}.$$

La funzione integrale è continua e derivabile tranne nel punto $t = 0$ dove c'è un punto angoloso:

$$A'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad A'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}.$$



## 2. Calcolo delle primitive

In questa sezione svilupperemo alcune tecniche utili per individuare le primitive di una funzione continua. Per indicare l'insieme delle primitive di una funzione $f$ si utilizza la seguente notazione:

$$\int f(x)\,dx$$

che si legge *integrale di $f(x)$ in $dx$*. È detto anche integrale "indefinito" perchè per ora vogliamo solo risolvere il problema della ricerca delle primitive e gli estremi di integrazione non ci interessano. Tornando al nostro esempio, possiamo allora scrivere

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

dove $c$ è una costante arbitraria. Altri esempi si trovano nella seguente tabella.

| | |
|---|---|
| $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{per } \alpha \neq -1$ | $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ |
| $\int \frac{1}{x}\,dx = \log\|x\| + c$ | $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ |
| $\int e^x\,dx = e^x + c$ | $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{per } a > 0$ | |
| $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{per } a > 0$ | |

Il controllo della validità di questi integrali si può fare in modo molto semplice: si deriva una primitiva e si verifica che il risultato ottenuto sia uguale alla funzione corrispondente nel suo dominio di definizione.

— ◇ —

**Esempio 2.1** Dalla tabella possiamo dedurre che

$$\int \frac{1}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Infatti

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2+x^2}.$$

— ◇ —

**Esempio 2.2** Determiniamo le primitive della funzione $|x|$, ossia calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int |x|\, dx.$$

In questo caso conviene distinguere due casi: per $x \geq 0$ abbiamo che

$$\int |x|\, dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c_1,$$

mentre per $x \leq 0$

$$\int |x|\, dx = \int (-x)\, dx = -\int x\, dx = -\frac{x^2}{2} + c_2.$$

Ora per scrivere le primitive di $|x|$ per $x \in \mathbb{R}$, dobbiamo tener presente che queste sono funzioni continue e dunque devono coincidere nel punto di raccordo $x = 0$. Questo accade se $c_1 = c_2$ e quindi

$$\int |x|\, dx = \begin{cases} x^2/2 + c & \text{per } x \geq 0 \\ -x^2/2 + c & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

— ◇ —

**Esempio 2.3** Determiniamo la funzione integrale

$$F(t) = \int_0^t f(x)\, dx$$

per $t \in \mathbb{R}$ dove

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{per } x > 1 \\ 2 & \text{per } x = 1 \\ 3x^2 & \text{per } x < 1 \end{cases}.$$

Dato che la funzione $f$ è discontinua in $x = 1$ calcoliamo le primitive separatamente prima a sinistra di questo punto e poi a destra. Le primitive per $x < 1$ sono

$$\int f(x)\, dx = \int 3x^2\, dx = x^3 + c_1,$$

mentre per $x > 1$

$$\int f(x)\, dx = \int e^x\, dx = e^x + c_2.$$

Dato che la funzione integrale è continua dobbiamo stabilire la relazione tra le costanti in modo da raccordare le due primitive nel punto $x = 1$. Si deve verificare che $1^3 + c_1 = e^1 + c_2$ e quindi $c_2 = c_1 + 1 - e$. Inoltre dato che $F(0) = 0$ dobbiamo imporre che $0^3 + c_1 = 0$ ossia $c_1 = 0$. Così, per $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int_0^t f(x)\, dx = \begin{cases} t^3 & \text{per } t \leq 1 \\ e^t + 1 - e & \text{per } t \geq 1 \end{cases}.$$

Notiamo che il valore della funzione $f$ nel punto di discontinuità $x = 1$ non ha influenzato il calcolo della funzione integrale $F$.

— ◇ —

Ora che abbiamo un po' di esempi di primitive proviamo a vedere come si integrano funzioni più complicate. Come vedremo le tecniche di integrazione sono una semplice conseguenza delle regole di derivazione. Rispetto al calcolo della derivata però, nel calcolo integrale spesso la difficoltà consiste nel capire quale tecnica particolare conviene usare: in fondo cercare una primitiva è come se, dopo aver derivato una funzione, uno cercasse di "ricostruirla" partendo dalla derivata!

La prima proprietà si deduce direttamente dalla linearità della derivazione

LINEARITÀ

Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\; dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

— ◇ —

**Esempio 2.4** Calcoliamo l'integrale

$$\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 2)\, dx.$$

Per la linearità abbiamo che

$$\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 2)\, dx = 3\int \sqrt{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx - 2\int\, dx$$

ora per determinare i singoli integrali possiamo ricorrere alla tabella

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int (x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{(x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c,$$

inoltre

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int (x)^{-2}\, dx = \frac{(x)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

e infine

$$\int dx = \int 1\, dx = x + c.$$

Quindi, riportando la costante una sola volta,

$$\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 2)\, dx = 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x} - 2x + c.$$

— ◇ —

La seconda proprietà è basata sulla regola di derivazione del prodotto:

**Integrazione per parti**

Se $f$ e $g$ sono funzioni derivabili allora

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,df(x).$$

infatti, ricordando che

$$df(x) = f'(x)\,dx \quad \text{e} \quad dg(x) = g'(x)\,dx,$$

la formula enunciata si verifica osservando che

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dg(x) + \int g(x)\,df(x) &= \int \left(f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)\right)\,dx \\ &= \int \left(f(x)\,g(x)\right)'\,dx = f(x)\,g(x) + c.\end{aligned}$$

— ◇ —

**Esempio 2.5** Calcoliamo l'integrale

$$\int x\,\cos x\,dx.$$

Applichiamo la tecnica della integrazione per parti integrando prima il fattore $\cos x$ e portando il risultato nel differenziale

$$\begin{aligned}\int x\,\cos x\,dx &= \int x\,d(\sin x) = x\,\sin x - \int \sin x\,d(x) \\ &= x\,\sin x - (-\cos x) + c = x\,\sin x + \cos x + c.\end{aligned}$$

Notiamo che se si integrasse prima il fattore $x$ allora l'integrale diventerebbe più complicato:

$$\begin{aligned}\int x\,\cos x\,dx &= \int \cos x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\,\cos x - \int \frac{x^2}{2}\,d(\cos x) \\ &= \frac{x^2}{2}\,\cos x + \frac{1}{2}\int x^2\,\sin x\,dx.\end{aligned}$$

La scelta del fattore "giusto" da integrare non è sempre semplice e alle volte è necessario fare più di un tentativo.

— ◇ —

**Esempio 2.6** Calcoliamo l'integrale

$$\int x^2\,e^x\,dx.$$

Integriamo prima il fattore $e^x$:

$$\begin{aligned}\int x^2\, e^x\, dx &= \int x^2\, d(e^x) = x^2\, e^x - \int e^x\, d(x^2)\\ &= x^2\, e^x - \int e^x\, 2x\, dx = x^2\, e^x - 2\int x\, e^x\, dx.\end{aligned}$$

Il nuovo integrale non si può risolvere direttamente come nell' esempio precedente, ma comunque siamo sulla buona strada perché la parte polinomiale (il fattore $x^2$) si è abbassato di grado (è diventato $x$). Risolviamo l'integrale che manca in modo analogo:

$$\int x\, e^x\, dx = \int x\, d(e^x) = x\, e^x - \int e^x\, d(x) = x\, e^x - e^x + c.$$

Quindi

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2(x\, e^x - e^x + c) = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

— ◇ —

**Esempio 2.7** Calcoliamo l'integrale

$$\int \log x\, dx.$$

In questo caso per applicare l'integrazione per parti scegliamo come fattore da integrare la funzione costante 1 (che integrata dà $x$):

$$\begin{aligned}\int \log x\, dx &= \int \log x\, d(x) = x\, \log x - \int x\, d(\log x)\\ &= x\, \log x - \int x\, \frac{1}{x}\, dx = x\, \log x - \int 1\, dx\\ &= x\, \log x - x + c.\end{aligned}$$

— ◇ —

**Esempio 2.8** Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{x}\, dx.$$

Sappiamo già che la generica primitiva di $1/x$ è la funzione $\log|x| + c$, ma proviamo comunque ad applicare l'integrazione per parti per vedere cosa succede:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, d(x) = x \cdot \frac{1}{x} - \int x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \int x\, \left(-\frac{1}{x^2}\right)\, dx = 1 + \int \frac{1}{x}\, dx.$$

L'equazione ottenuta sembrerebbe condurre alla contraddizione $1 = 0$, ma in realtà il simbolo $\int 1/x\, dx$ rappresenta un insieme infinito di funzioni e dalla semplificazione si ottiene solo che la differenza di due primitive di $1/x$ è una costante.

— ◇ —

La terza proprietà fornisce un'altra tecnica di calcolo e si ricava dalla regola di derivazione di una funzione composta:

Integrazione per sostituzione

Se $g$ è derivabile allora posto $t = g(x)$

$$\int f(g(x))\, dg(x) = \int f(t)\, dt = F(t) + c = F(g(x)) + c$$

dove $F$ è una primitiva di $f$.

La formula si verifica osservando che

$$(F(g(x)))' = f(g(x))\, g'(x).$$

— ◇ —

**Esempio 2.9** Calcoliamo l'integrale

$$\int \tan x\, dx.$$

L'integrale dato si può scrivere nel modo seguente

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx.$$

Ora integriamo $\sin x$:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\cos x}\, d(-\cos x) = -\int \frac{1}{\cos x}\, d(\cos x).$$

Quindi dobbiamo ancora integrare $1/t$ nella variabile $t = \cos x$ ossia

$$\int \tan x\, dx = -\int \frac{1}{t}\, dt = -\log|t| + c = -\log|\cos x| + c.$$

— ◇ —

**Esempio 2.10** Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{2x\, \cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\, dx.$$

Come vedremo la funzione da integrare è la derivata di una funzione composta. L'integrazione per sostituzione permetterà la "ricostruzione" della funzione originale. Integriamo prima $2x$:

$$\int \frac{2x\, \cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\, dx = \int \frac{\cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\, d(x^2).$$

Poi integriamo $\cos(x^2)$ rispetto alla variabile $x^2$:

$$\int \frac{\cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\, d(x^2) = \int \frac{1}{(1+\sin(x^2))^2}\, d(\sin(x^2)).$$

Infine, dopo aver "corretto" il differenziale aggiungendo la costante 1, integriamo $1/(1+\sin(x^2))^2$ rispetto alla variabile $1+\sin(x^2)$

$$\int \frac{1}{(1+\sin(x^2))^2}\, d(1+\sin(x^2)) = -\frac{1}{1+\sin(x^2)} + c.$$

— ◇ —

**Esempio 2.11** Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx.$$

Alle volte la scelta del cambio di variabile può essere suggerita dalla struttura della funzione da integrare. In questo caso conviene porre $t = \sqrt{x}$:

$$t^2 = x \quad \text{e} \quad d(t^2) = 2t\, dt = dx.$$

Così sostituendo otteniamo

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx = \int \frac{t}{t-1}\, 2t\, dt = 2\int \frac{t^2}{t-1}\, dt.$$

Dato che $t^2 = (t+1)(t-1)+1$ (abbiamo diviso il polinomio $t^2$ per il polinomio $t+1$)

$$2\int \frac{t^2}{t-1}\, dt = 2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right) dt = t^2 + 2t + 2\log|t-1| + c.$$

Quindi risostituendo $t = \sqrt{x}$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx = x + 2\sqrt{x} + 2\log|\sqrt{x}-1| + c.$$

## 3. L'integrazione delle funzioni razionali

Se per l'integrazione di una generica funzione può essere difficile individuare la combinazione dei metodi da usare, per una funzione razionale ossia un rapporto di polinomi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

esiste un "algoritmo" completo che permette di determinare in ogni caso una primitiva. La complessità di questo algoritmo aumenta con il grado del polinomio $Q(x)$. Cominciamo quindi con il caso in cui il grado di $Q(x)$ è uguale a 1.

— ◇ —

**Esempio 3.1** Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{4x^2+1}{2x+1}\,dx$$

Dato che il polinomio al numeratore ha grado maggiore di quello al denominatore, possiamo fare la divisione ottenendo

$$4x^2+1=(2x-1)(2x+1)+2$$

Così

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+1}{2x+1}\,dx &= \int \frac{(2x-1)(2x+1)+2}{2x+1}\,dx\\ &= \int \left(2x-1+\frac{2}{2x+1}\right)dx = x^2-x+\log|2x+1|+c.\end{aligned}$$

— ◇ —

Ora esamineremo il caso in cui il grado del polinomio $Q(x)$ sia di grado 2. A meno di fare una divisione, come nel caso dell'esempio precedente, possiamo supporre che il numeratore $P(x)$ sia di grado minore di 2. L'algoritmo distingue tre casi a seconda della natura delle radici del polinomio $Q(x)$.

— ◇ —

**Esempio 3.2** Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx$$

Le radici di $x^2+5x+6$ sono due e distinte: $-2$ e $-3$. Decomponiamo la funzione razionale nel seguente modo:

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$$

dove $A$ e $B$ sono due costanti opportune. Svolgendo il calcolo otteniamo

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$$

e quindi

$$\begin{cases}A+B=1\\ 3A+2B=1\end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A=-1$ e $B=2$.

Osserviamo che per trovare le costanti $A$ e $B$ possiamo anche ragionare così: se moltiplichiamo l'equazione

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

per $x+2$, dopo aver semplificato, otteniamo

$$\frac{x+1}{x+3} = A + B\,\frac{x+2}{x+3}$$

e ponendo $x = -2$, troviamo immediatamente che $A = -1$. In modo analogo, se moltiplichiamo per $x+3$, otteniamo

$$\frac{x+1}{x+2} = A\,\frac{x+3}{x+2} + B$$

e ponendo $x = -3$, troviamo che $B = 2$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}\right) dx \\ &= -\log|x+2| + 2\log|x+3| + c \\ &= \log\frac{(x+3)^2}{|x+2|} + c.\end{aligned}$$

— ⋄ —

**Esempio 3.3** Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx.$$

Il polinomio $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ ha un'unica radice: $-2$ di molteplicità due. Se poniamo $t = x+2$ allora $dt = dx$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx = \int \frac{x+3}{(x+2)^2}\,dx &= \int \frac{t+1}{t^2}\,dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \log|t| - \frac{1}{t} + c \\ &= \log|x+2| - \frac{1}{x+2} + c.\end{aligned}$$

— ⋄ —

**Esempio 3.4** Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+3}\,dx.$$