Ora imponiamo condizione richiesta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(c_1 e^{4x} + c_2 + c_3 e^{2x}\cos(2x) + c_4 e^{2x}\sin(2x)\right) = 3.$$

Il limite esiste se e solo $c_3 = c_4 = 0$ perché le funzioni $e^{2x}\cos(2x)$ e $e^x \sin(2x)$ non hanno limite per $x \to +\infty$. Inoltre siccome il limite deve essere finito ($= 3$) anche $c_1 = 0$. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = c_2 = 3$$

e così

$$y(x) = 3e^{-2x}$$

è la soluzione cercata.

— ◇ —

Per determinare una soluzione particolare descriveremo un metodo che vale solo nel caso in cui la funzione $f(x)$ abbia una forma particolare:

$$f(x) = e^{ax}P(x)\cos(bx) \quad \text{oppure} \quad f(x) = e^{ax}P(x)\sin(bx).$$

In questi casi si cerca una soluzione particolare definita su tutto $\mathbb{R}$ della forma

$$y_\star(x) = x^m e^{ax}\left(Q_1(x)\cos(bx) + Q_2(x)\sin(bx)\right)$$

(1) m è la molteplicità di $a + ib$ come radice dell'equazione caratteristica,

(2) $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono generici polinomi di grado uguale al grado di $P(x)$.

— ◇ —

Esempio 2.6 Risolviamo l'equazione

$$y'''(x) + 3y''(x) = 9x.$$

L'equazione caratteristica è

$$z^3 + 3z^2 = 0$$

che ha radici: 0 (di molteplicità 2) e -3 (di molteplicità 1). Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x \quad \text{e} \quad y_3(x) = e^{-3x}.$$

La funzione $f(x) = 9x$ è del tipo discusso con $a = b = 0$. Dato che $z = a + ib = 0$ ha molteplicità 2 allora $m = 2$ e la soluzione particolare da cercare ha la forma

$$y_\star(x) = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2.$$

Calcoliamo le derivate

$$y_\star'(x) = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y_\star''(x) = 6Ax + 2B, \quad y_\star'''(x) = 6A$$

e sostituiamole nell'equazione

$$9x = y_\star'''(x) + 3y_\star''(x) = 6A + 3(6Ax + 2B) = 18Ax + 6A + 6B.$$

Quindi $A = 1/2$ e $B = -1/2$ e una soluzione particolare è

$$y_\star(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 + c_2 x + c_3 e^{-3x}.$$

— ◇ —

Esempio 2.7 Risolviamo l'equazione

$$2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = \sin(2x).$$

L'equazione caratteristica è

$$2z^2 - 5z + 3 = 0$$

che ha due radici semplici: 1 e 3/2. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = e^x, \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{3x/2}.$$

La funzione $f(x) = \sin(2x)$ è del tipo discusso con $a = 0$ e $b = 2$. Dato che $z = a + ib = 2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica (la molteplicità è zero), la soluzione particolare ha la forma

$$y_\star(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Calcoliamo le derivate

$$y_\star'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x), \quad y_\star''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

e sostituiamole nell'equazione

$$\sin(2x) = 2y_\star''(x) - 5y_\star'(x) + 3y_\star(x) = 5(2A - B)\sin(2x) - 5(A + 2B)\cos(2x).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 5(2A - B) = 1 \\ 5(A + 2B) = 0 \end{cases}$$

si ottiene che $A = 2/25$, $B = -1/25$ e una soluzione particolare è

$$y_\star(x) = \frac{2}{25}\cos(2x) - \frac{1}{25}\sin(2x).$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{\frac{3}{2}x} + \frac{2}{25}\cos(2x) - \frac{1}{25}\sin(2x).$$

— ◇ —

Esempio 2.8 Risolviamo l'equazione

$$y''(x) - 2y'(x) = x - e^{3x}.$$

L'equazione caratteristica è

$$z^2 - 2z = z(z-2) = 0$$

che ha due radici semplici: 0 e 2. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = 1, \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{2x}.$$

La funzione $f(x) = x - e^{3x}$ non è del tipo discusso, ma grazie alla linearità è sufficiente trovare una soluzione particolare prima per $f_1(x) = x$, poi per $f_2(x) = -e^{3x}$ e quindi sommarle. Per $f_1(x) = x$ allora $a = 0$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = 0$ è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 1}(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star 1}(x) = 2Ax + B, \quad y''_{\star 1}(x) = 2A$$

e sostituiamole nell'equazione

$$x = y''_{\star 1}(x) - 2y'_{\star 1}(x) = -4Ax + 2A - 2B.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases}$$

si ottiene che $A = -1/4$, $B = -1/4$ e

$$y_{\star 1}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x.$$

Per $f_2(x) = e^{3x}$ allora $a = 3$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = 3$ non è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 2}(x) = Ce^{3x}.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star 2}(x) = 3Ce^{3x}, \quad y''_{\star 2}(x) = 9Ce^{3x}$$

e sostituiamole nell'equazione

$$-e^{3x} = y''_{\star 2}(x) - 2y'_{\star 2}(x) = 3Ce^{3x}$$

da cui $C = -1/3$ e
$$y_{\star 2}(x) = -\frac{1}{3}e^{3x}.$$
Dunque una soluzione particolare per $f(x) = x - e^{3x}$ è
$$y_\star(x) = y_{\star 1}(x) + y_{\star 2}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}e^{3x}$$
mentre la soluzione generale è
$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}e^{3x}.$$
— ◇ —

Esempio 2.9 Calcoliamo l'integrale indefinito
$$\int e^x x \cos x \, dx.$$
Invece di integrare direttamente, possiamo ricondurre il problema alla risoluzione di un'equazione differenziale. Infatti determinare le primitive $y(x)$ della funzione $e^x x \cos x$ equivale a risolvere la seguente equazione differenziale lineare:
$$y'(x) = e^x x \cos x.$$
In questo caso l'equazione caratteristica è semplicemente $z = 0$ e quindi la parte omogenea è generata dalla funzione costante $y_1(x) = 1$. Dato che la molteplicità di $1+i$ (il numero complesso associato alla funzione $e^x x \cos x$) nel polinomio caratteristico è zero allora la soluzione particolare deve avere la forma:
$$y_\star(x) = e^x(Ax + B)\cos x + e^x(Cx + D)\sin x.$$
Per determinare il valore dei coefficienti A, B, C e D dobbiamo derivare
$$\begin{aligned} y'_\star(x) &= e^x(Ax + B)\cos x + Ae^x \cos x - e^x(Ax + B)\sin x \\ &\quad + e^x(Cx + D)\sin x + Ce^x \sin x + e^x(Cx + D)\cos x \\ &= (A + C)e^x x \cos x + (A + B + D)e^x \cos x \\ &\quad + (C - A)e^x x \sin x + (C - B + D)e^x \sin x \end{aligned}$$
e imporre che $y'_\star(x) = x \cos x \, e^x$. Quindi
$$A + C = 1, \quad A + B + D = 0, \quad C - A = 0, \quad C - B + D = 0$$
e risolvendo si trova che $A = C = -D = 1/2$ e $B = 0$. Così
$$y(x) = y_\star(x) + c_1 y_1(x) = \frac{e^x}{2}(x \cos x + (x - 1)\sin x) + c_1.$$

3. Equazioni differenziali non lineari a variabili separabili

Un'equazione differenziale a *variabili separabili* ha la seguente forma

$$y'(x) = a(x) \cdot b(y(x))$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue rispettivamente negli intervalli I e J. Si tratta dunque di un'equazione differenziale del primo ordine ed è *non lineare* se b non è un polinomio di primo grado. Le equazioni non lineari sono in generale molto più difficili da trattare rispetto alle equazioni lineari. In questo caso la determinazione esplicita delle eventuali soluzioni è legata come vedremo alla forma particolare dell'equazione.

Consideriamo il relativo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x) \cdot b(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. Se $b(y_0) = b(y(x_0)) = 0$ allora il problema ha come soluzione la funzione costante $y(x) = y_0$ (*soluzione stazionaria*). Se invece $b(y_0) \neq 0$ allora si procede prima "separando le variabili" x e y

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

e quindi si integra rispetto a x tenendo conto della condizione $y(x_0) = y_0$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{b(y(x))}\, dx = \int_{x_0}^{x} a(x)\, dx.$$

Riscrivendo il primo integrale nella variabile y otteniamo

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{b(y)}\, dy = \int_{x_0}^{x} a(x)\, dx$$

Allora se $H(y)$ è una primitiva di $1/b(y)$ e $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ si ha che

$$H(y(x)) - H(y_0) = \big[H(y)\big]_{y_0}^{y(x)} = \big[A(x)\big]_{x_0}^{x} = A(x) - A(x_0).$$

A questo punto l'intervallo di esistenza e l'unicità della soluzione dipende dall'invertibilità della funzione $H(y)$:

$$y(x) = H^{-1}\left(A(x) - A(x_0) + H(y_0)\right).$$

— ◇ —

Esempio 3.1 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - y^2(x) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

In questo caso la funzione $a(x) = 1$ mentre $b(y) = y - y^2$. Dato che $b(y_0) = 1/4 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{\frac{1}{2}}^{y(x)} \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \int_0^x 1\,dx.$$

Il primo integrale si sviluppa nel seguente modo

$$H(y) = \int \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right)\,dy = \log\left|\frac{y}{1-y}\right| + c$$

Quindi

$$\left[\log\left|\frac{y}{1-y}\right|\right]_{\frac{1}{2}}^{y(x)} = \left[x\right]_0^x$$

ossia

$$H(y(x)) = \log\left|\frac{y(x)}{1-y(x)}\right| = x.$$

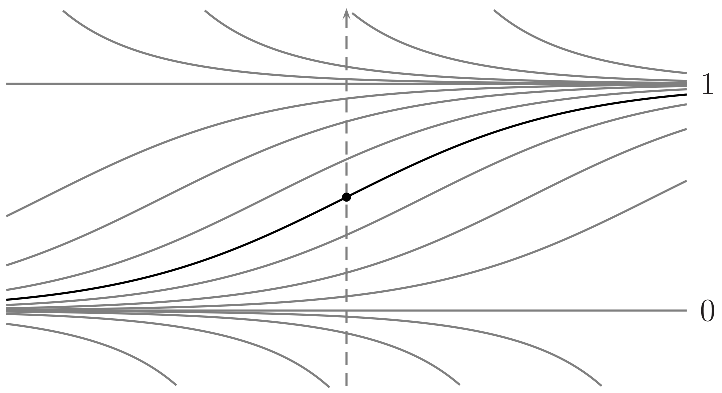
Per determinare la soluzione basta invertire la funzione $H(y)$ ossia esplicitare la funzione $y(x)$:

$$\frac{y(x)}{1-y(x)} = \pm e^x.$$

Siccome $y(0) = \frac{1}{2}$ si sceglie il segno positivo e

$$y(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione é evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale.



— ◇ —

Notiamo la presenza delle soluzioni stazionarie $y(x) = 0$ e $y(x) = 1$. Inoltre si può facilmente dimostrare che la soluzione $y(x) = 1$ è "attrattiva" ovvero se $y(0) > 0$ allora la soluzione corrispondente tende a 1 per $x \to +\infty$.

— ◇ —

Esempio 3.2 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x\, y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Qui $a(x) = 2x$ mentre $b(y) = y^2$. Dato che $b(y_0) = 1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{y^2}\, dy = \int_0^x 2x\, dx$$

e dunque

$$\left[-\frac{1}{y}\right]_1^{y(x)} = \left[x^2\right]_0^x$$

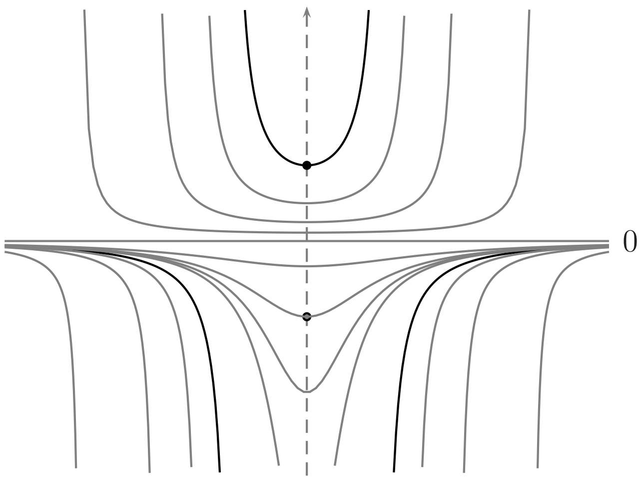
ossia

$$-\frac{1}{y(x)} + 1 = x^2.$$

Quindi

$$y(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

e la soluzione è definita sull'intervallo massimale $(-1,1)$. Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale.



In questo caso c'è un'unica soluzione stazionaria $y(x) = 0$. Inoltre notiamo che se la condizione iniziale fosse stata $y(0) = -1$ la soluzione sarebbe stata

$$y(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ◇ —

Esempio 3.3 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}(y(x)-1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Qui $a(x) = x/(x^2+1)$ mentre $b(y) = y - 1$. Dato che $b(y_0) = -1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{y-1}\, dy = \int_0^x \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

e dunque

$$\big[\log|y-1|\big]_0^{y(x)} = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^x$$

ossia

$$\log|y(x)-1| = \log\sqrt{x^2+1}.$$

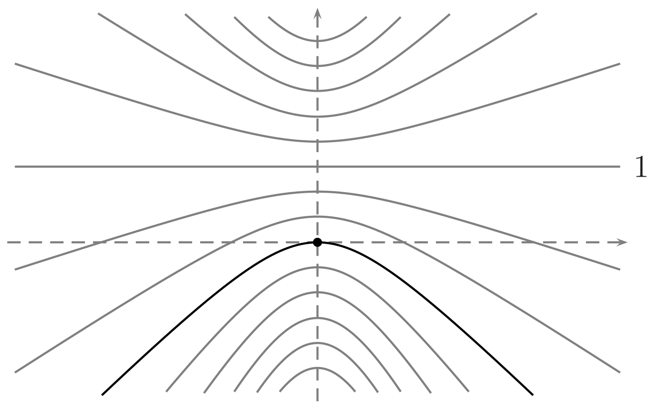
Esplicitiamo la funzione $y(x)$:

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{x^2+1}$$

Dato che $y(0) = 0$ scegliamo il segno negativo e la soluzione è

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^2+1} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. Anche questo caso c'e' un'unica soluzione stazionaria $y(x) = 1$.



— ◇ —

Esempio 3.4 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x\,(\cos y(x))^2 \\ y(0) = 2\pi \end{cases}$$

e determiniamo il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

Qui $a(x) = 2x$ mentre $b(y) = (\cos y)^2$. Dato che $b(y_0) = 1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{2\pi}^{y(x)} \frac{1}{(\cos y)^2}\,dy = \int_0^x 2x\,dx$$

e dunque

$$\big[\tan y\big]_{2\pi}^{y(x)} = \big[x^2\big]_0^x$$

ossia

$$\tan y(x) = x^2.$$

Per esplicitare la $y(x)$ dobbiamo invertire la funzione tangente:

$$y(x) = \arctan(x^2) + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

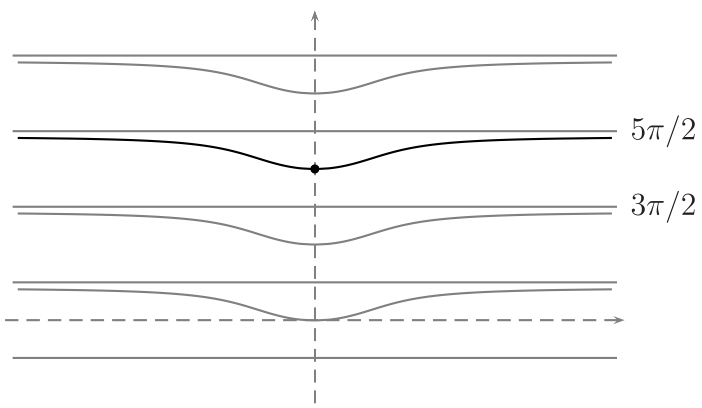
Il parametro k individua i diversi rami del grafico della tangente; nel nostro caso dobbiamo scegliere $k = 2$ in modo da soddisfare la condizione iniziale $y(0) = 2\pi$. Quindi la soluzione è

$$y(x) = \arctan(x^2) + 2\pi \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}$$

e così

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. Le soluzioni stazionarie sono infinite: $y(x) = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



— ◇ —

Esempio 3.5 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2(1+x)y'(x) + xy(x)^3 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e determiniamo il limite $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} y(x)$.

Risistemando i termini abbiamo che per $x \neq -1$

$$y'(x) = -\frac{x}{2(1+x)} \cdot y(x)^3.$$

Dato che $b(y_0) = -1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{-1}^{y(x)} \frac{1}{y^3}\,dy = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{x}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\,dx$$

e dunque

$$\left[\frac{1}{y^2}\right]_{-1}^{y(x)} = [x - \log|1+x|]_0^x$$

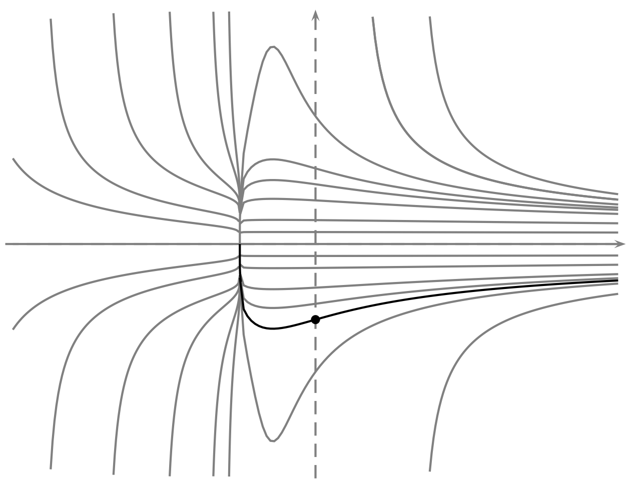
ossia

$$y(x)^2 = \frac{1}{x - \log|1+x| + 1}.$$

Ricordando che $y(0) = -1$, se esplicitiamo la $y(x)$ otteniamo la soluzione

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{x - \log(1+x) + 1}}$$

definita nell'intervallo massimale $(-1, +\infty)$.
La soluzione che abbiamo determinato è evidenziata nel seguente grafico rispetto al resto del flusso delle soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. La soluzione stazionaria è $y(x) = 0$.



Ora calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to(-1)^+} y(x) = \lim_{x\to(-1)^+} -\frac{1}{\sqrt{x - \log(1+x) + 1}} = 0.$$