

47 Appendice: il resto di Lagrange nella formula di Taylor

Sia f $n+1$ volte derivabile in un intervallo I e $a \in I$. Allora usando il Teorema di Lagrange si dimostra che se $x \in I$, esiste $\xi \in (a, x)$ tale che si ha

$$f(x) = T_a^n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

ovvero il resto della formula di Taylor si può esprimere nella forma (detta di Lagrange)

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

ESEMPI: 1) Consideriamo $f(x) = e^x$. Allora la formula di Taylor con il resto di Lagrange diventa (per $a = 0$)

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{da cui} \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dato che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, abbiamo

$$e^x = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

In particolare possiamo calcolare $e = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

2) Consideriamo $f(x) = \log(1+x)$. Allora la formula di Taylor con il resto di Lagrange diventa (per $a = 0$)

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Quindi, se $0 \leq x \leq 1$

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

e, dato che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n} = 0$, si ha infine $\log(1+x) = \lim_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$. In particolare

possiamo calcolare $\log 2 = \lim_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$