41 POLINOMI DI TAYLOR

DERIVATE DI ORDINI SUCCESSIVI

Allo stesso modo della derivata seconda si definiscono per induzione le DERIVATE DI ORDINE k: la funzione *derivata* 0*-ima* di f si definisce ponendo $f^{(0)} = f$; se è definita in ogni punto $x \in I$ la derivata k-ima $f^{(k)} \in \mathbb{R}$ e se ne esiste la derivata in un punto x_0, si definisce $f^{(k+1)}(x_0) = D(f^{(k)})(x_0)$.

Definizione Sia I intervallo. Definiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $C^k(I)$ delle funzioni k volte derivabili su I tali che la derivata k-ima sia una funzione continua. Quindi:

$C^0(I)$ è l'insieme delle funzioni continue su I;

$C^1(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili su I la cui derivata è una funzione continua; ecc.

Si noti che valgono le inclusioni: $\ldots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I)$.

Definiamo inoltre lo spazio delle funzioni la cui derivata k-ima esiste per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(I).$$

NOTA: 1) le inclusioni sopra descritte sono strette. PER ESERCIZIO: fornire un esempio di funzione in $C^k(I)$ ma non in $C^{k+1}(I)$;

2) l'esistenza della derivata k-ima implica la continuità della derivata $k-1$-ima e quindi, per induzione, di tutte le precedenti;

3) i polinomi, gli esponenziali, i logaritmi, sin, cos,... sono funzioni C^∞. PER ESERCIZIO: calcolarne tutte le derivate;

4) dai teoremi di linearità delle derivate, si ha che per ogni k vale, per induzione, il teorema di linearità per funzioni di classe C^k.

5) se $f, g \in C^k(I)$, allora anche $fg \in C^k(I)$, e si ha

$$(fg)^{(k)} = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} f^{(n)} g^{(k-n)};$$

6) composizione di funzioni C^k è ancora C^k.

POLINOMI DI TAYLOR

OSSERVAZIONE: se f è continua nel punto a possiamo scrivere (ricordando la definizione di "o piccolo") che

$$f(x) = f(a) + o(1) \qquad \text{per } x \to a;$$

se f è derivabile in a, per la definizione di differenziabilità si ha

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \qquad \text{per } x \to a;$$

se f è derivabile due volte in a, abbiamo visto che si ha

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2) \qquad \text{per } x \to a;$$

Vogliamo generalizzare questa formula a funzioni n volte derivabili: il problema è trovare un polinomio P di grado n tale che si possa scrivere

$$f(x) = P(x) + o(x-a)^n \qquad \text{per } x \to a,$$

e se possibile esprimere P mediante le derivate di f in a fino all'ordine n.

Teorema. *Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e f una funzione definita in un intorno del punto $a \in \mathbb{R}$ e derivabile n volte in a. Allora esiste un unico polinomio P di grado $\leq n$ tale che*

$$f(x) = P(x) + o(x-a)^n \qquad \text{per } x \to a.$$

P è caratterizzato da $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ per $k = 0, \dots, n$, ed è quindi dato dalla formula

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Questo polinomio viene detto POLINOMIO DI TAYLOR *di f di* ORDINE *n e di* CENTRO *a.*

Si ha quindi la formula

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n \quad \text{per } x \to a,$$

detta FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO.
Questa formula è di ESTREMA UTILITÀ nel calcolo dei limiti.

DIMOSTRAZIONE Possiamo supporre, mediante una traslazione, che $a = 0$. Consideriamo il polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

e calcoliamo il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$.

Questa è una forma indeterminata 0/0 Possiamo applicare l'Hôpital, ottenendo l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - P'(x)}{nx^{n-1}}.$$

Se $n = 1$ questo limite è uguale a 0 e quindi $f - P = o(x^1)$ per $x \to 0$. Altrimenti si ha di nuovo una forma indeterminata $0/0$, e si può ri-applicare l'Hôpital, ottenendo l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(2)}(x) - P^{(2)}(x)}{n(n-1)x^{n-2}} \dots$$

In generale, si applica l'Hôpital n volte, ottenendo alla fine l'equivalenza con il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$
Dunque $f - P = o(x)^n$.

Dalla applicazione dell'Hôpital vista sopra si ha che se $Q = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ è un polinomio di grado $\leq n$ e si ha $c_k \neq f^{(k)}(0)/k!$ per qualche $k \in \{0, \dots, n\}$, allora, posto $m = \min\{k : c_k \neq f^{(k)}(0)/k!$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Q(x)}{x^n} = (H) = \ldots = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(m)}(0) - c_m\, m!}{n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{n-m}} \neq 0.$$

e quindi $f - Q \neq o(x)^n$. Dunque il polinomio P è univocamente determinato. □

Criterio della derivata n-ima. Sia f n volte derivabile in a, e supponiamo che
$$f'(a) = f^{(2)}(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$
Il Teorema sui polinomi di Taylor ci assicura che f si comporta allora come $f^{(n)}(a)(x-a)^n$ nel senso che
$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n.$$
Dunque se n è pari e $f^{(n)}(a) < 0$ si ha un punto di massimo relativo per f in a; se n è pari e $f^{(n)}(a) > 0$ si ha un punto di minimo relativo per f in a.

Se n è dispari e $f^{(n)}(a) < 0$ f è strettamente decrescente in un intorno di a; se n è dispari e $f^{(n)}(a) > 0$ f è strettamente crescente in un intorno di a.

L'operazione che associa ad una funzione f n-volte derivabile in un punto a il suo polinomio di Taylor di ordine n viene indicata con il simbolo T_a^n. Il teorema sopra si legge
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{T_a^n(x)}{(x-a)^n}.$$
Per lo più avremo a che fare con $a = 0$, nel qual caso "ci dimenticheremo" dell'indice 0.
Per esempio:
$$T_0^3(\exp) = e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6};$$
$$T_0^4(\sin) = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 + \frac{-\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{6}.$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE (per il calcolo):

1) $T_a^n(f+g) = T_a^n f + T_a^n g$;

2) $T_a^n(fg) = T_a^n(T_a^n f \cdot T_a^n g)$;

3) $T_a^n(g \circ f) = T_a^n(T_{f(a)}^n g \circ T_a^n f)$.

(notare che se P è polinomio in $(x-a)$, allora l'operazione T_a^n corrisponde a "troncare" P al grado n). Infatti si verifica subito che le derivate k-ime dei secondi membri delle equaglianze sono quelle richieste, per $k = 1, \dots, n$.

Polinomi di Taylor elementari

(da imparare A MEMORIA, e da verificare calcolando le derivate in 0)

$$T^n(\exp)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!};$$

$$T^{2n}(\cos)(x) = T^{2n+1}(\cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!};$$

$$T^{2n+1}(\sin)(x) = T^{2n+2}(\sin)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$T^n(\log(1+x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k};$$

$$T^{2n+1}(\arctan)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)};$$

$$T^n((1-x)^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} x^k;$$

$$T^1((1+x)^\alpha) = 1 + \alpha x;$$

$$T^3 \tan x = T^4 \tan x = x + \frac{1}{3}x^3.$$

ESEMPI: 1) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro 0 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right) & \text{se } x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[\\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ricordando che si ha

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

e che $\qquad \log(1+y) = y + o(y), \quad$ si ha

$$\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \log(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

ovvero

$$T^2 f(x) = -\frac{3}{2}x^2.$$

1bis) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\dfrac{1}{x\sin 2x}}.$$

Possiamo scrivere in forma esponenziale

$$\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\dfrac{1}{x\sin 2x}} = \exp\Big(\frac{1}{x\sin 2x}\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\Big).$$

Il limite dell'esponente (ricordando il limite fondamentale di $\sin y/y$ e l'esempio 1)) vale

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x^2}\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0+}\Big(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\Big)\frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque il nostro limite vale $e^{-3/4}$.

2) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$f(x) = \log(1+x^2) - x^2\cos x.$$

Ricordiamo che

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3)$$

e che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

per cui

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$$

e anche

$$x^2\cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6).$$

Quindi si ha

$$f(x) = \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\Big)x^6 + o(x^6) = \frac{7}{24}x^6 + o(x^6),$$

e dunque

$$T^6 f(x) = \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\Big)x^6 = \frac{7}{24}x^6.$$

2bis) Calcoliamo il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 \cos x - \log(1+x^2)}{7x^2 \tan(x^4)}.$$

Ricordando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

il limite è uguale a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2 \cos x - \log(1+x^2)}{7x^6}.$$

Per l'esempio 2) si ha quindi

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{7x^6}\Big(-\frac{7}{24}x^6 + o(x^6)\Big) = -\frac{1}{24}.$$

PER ESERCIZIO: risolvere i limiti negli esempi con la regola dell'Hôpital.

3) Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{(x - \sin x)\sqrt[2]{x}}.$$

Per prima cosa semplifichiamo il limite ricordandoci che $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, per cui

$$L = 6 \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{x^3\sqrt[2]{x}}.$$

Per avere solo potenze intere cambiamo variabile ponendo $y = \sqrt{x}$. Il limite diventa

$$\lim_{y\to 0+} \frac{y - \sqrt[3]{\sin(y^3)}}{y^6 y} = 6 \lim_{y\to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin(y^3)}{y^3}}}{y^6} = 6 \lim_{t\to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2}$$

(abbiamo usato il cambiamento di variabili $t = y^3$). Si ha

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)}{t} = 1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)$$

e $\sqrt[3]{1+z} = (1+z)^{1/3} = 1 + \dfrac{1}{3}z + o(z)$, per cui

$$\sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)} = 1 - \frac{1}{18}t^2 + o(t^2).$$

Dunque

$$L = 6 \lim_{t\to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2} = 6 \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{18}t^2 + o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{3}.$$

42 ESERCIZI SUI POLINOMI DI TAYLOR

Calcolare i seguenti polinomi di Taylor con centro in 0, usando ove possibile i polinomi di Taylor noti e le operazioni su polinomi di Taylor.

1. Calcolare $T^3\Big(\dfrac{1}{\cos 2x}\Big)$.

Usiamo i polinomi di Taylor noti:

$$T^3\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3, \qquad T^3\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2,$$

per cui $T^3 \cos 2x = 1 - 2x^2$,

$$T^3\Big(\frac{1}{\cos 2x}\Big) = T^3\Big(\frac{1}{1-2x^2}\Big)$$
$$= T^3(1 + (2x^2) + (2x^2)^2 + (2x^2)^3) = 1 + 2x^2.$$

2. Calcolare $T^4\Big(\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\Big)$.

La domanda si scrive anche: calcolare $T^4 \cosh 2x$. Cogliamo l'occasione per calcolare $T^n \cosh y$. Dato che

$$T^n e^z = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}z^k, \qquad T^n e^{-z} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-z)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}z^k,$$

calcolando $T^n e^z + T^n e^{-z}$, i termini di grado dispari si elidono, per cui rimangono solo quelli di grado pari. Dividendo per 2 si ottiene

$$T^{2n}\cosh z = T^{2n+1}\cosh z = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}z^{2k}$$

(ovvero i termini *pari* di $T^{2n}e^z$). Lo stesso tipo di calcolo ci mostra che

$$T^{2n+1}\sinh z = T^{2n+2}\sinh z = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

(ovvero i termini *dispari* di $T^{2n+1}e^z$).

Tornando al nostro esercizio, si ha

$$T^4\cosh 2x = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1 + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4.$$

3. Calcolare $T^3 \log\Big(\dfrac{1+2x}{1-3x}\Big)$.

Scriviamo
$$\log\Big(\frac{1+2x}{1-3x}\Big) = \log(1+2x) - \log(1-3x).$$
Usando lo sviluppo
$$T^3 \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3},$$
otteniamo ($y = 2x$)
$$T^3 \log(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3,$$
e ($y = -3x$)
$$T^3 \log(1-3x) = -3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3} = -3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3.$$
Si ha quindi
$$T^3 \log\Big(\frac{1+2x}{1-3x}\Big) = T^3 \log(1+2x) - T^3 \log(1-3x)$$
$$= (2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3) - (-3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3) = 5x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{35}{3}x^3.$$

4. Calcolare $T^4 (x-5)\log(e^x - x)$.

Si ha
$$T^4(e^x - x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$
Dato che in questo polinomio non compare x, basta considerare lo sviluppo fino all'ordine 2 di $\log(1+y)$:
$$T^2 \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2}.$$
Abbiamo
$$T^4 \log(e^x - x) = T^4 \log(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24})$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}T^4\Big(\Big(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\Big)^2\Big)$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{8}x^4 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}.$$
Moltiplicando per $(x-5)$ otteniamo
$$\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} - 5(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12})$$

$$= -\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4 - \frac{x^5}{12},$$

e quindi il polinomio cercato si ottiene eliminando il termine in x^5, ovvero

$$T^4(x-5)\log(e^x - x) = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4.$$

5. Calcolare $T^3(2x+5)\sqrt{1+\sin x}$.

Calcoliamoci $T^3\sqrt{1+y}$. Se $f(y) = \sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2}$ allora si ha

$$f'(y) = \frac{1}{2}(1+y)^{-1/2},\ f''(y) = -\frac{1}{4}(1+y)^{-3/2},\ f'''(y) = \frac{3}{8}(1+y)^{-5/2},$$

e

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(0) = \frac{3}{8}.$$

Dunque

$$T^3\sqrt{1+y} = f(0) + f'(0)y + \frac{1}{2}f''(0)y^2 + \frac{1}{6}f'''(0)y^3$$
$$= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3.$$

Ricordando che

$$T^3 \sin x = x - \frac{1}{6}x^3,$$

si ha

$$T^3\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}x^3) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

(nei termini y^2 e y^3 possiamo tralasciare il termine in x^3 perche' viene sempre moltiplicato almeno per x e quindi da' termini almeno di grado 4)

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3.$$

Moltiplicando per $(2x+5)$ si ha quindi

$$2x + x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + 5\Big(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3\Big)$$
$$= 5 + \frac{9}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{17}{48}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

Eliminando il termine in x^4 si ottiene il polinomio voluto, ovvero

$$T^3(2x+5)\sqrt{1+\sin x} = 5 + \frac{9}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{17}{48}x^3.$$

.