35 ALCUNI ESERCIZI SULLA CONVESSITÀ

1. Determinare il più piccolo valore a tale che la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x-5}$$

sia convessa su $(a, +\infty)$.

Le derivate prima e seconda di f sono

$$f'(x) = \frac{e^x(x-6)}{(x-5)^2}, \qquad f''(x) = \frac{e^x(x^2-12x+37)}{(x-5)^3}$$

definite per $x \neq 5$. Dato che $x^2 - 12x + 37 > 0$ per ogni x, il segno di f'' è lo stesso di $(x-5)^3$, ovvero f'' è positiva per $x > 5$. La risposta è quindi $a = 5$.

2. Determinare gli intervalli su cui $f(x) = e^{-x^2}$ è concava/convessa.

Ancora, la funzione è derivabile due volte, quindi la domanda si traduce in determinare gli intervalli in cui $f'' \geq 0$ e $f'' \leq 0$ rispettivamente.

Calcoliamo:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2) = 2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

Dunque

$$f''(x) \geq 0 \iff 2x^2 - 1 \geq 0,$$

e f è convessa in $(-\infty, -1/\sqrt{2}]$ e $[1/\sqrt{2}, +\infty)$ e concava sull'intervallo $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. In particolare $x = \pm 1/\sqrt{2}$ sono punto di flesso.

3. Determinare gli intervalli su cui $f(x) = 1 - |x-1|$ è convessa.

In questo caso la funzione non è derivabile due volte in 1, mentre la funzione è affine (e quindi sia concava che convessa) in $(-\infty, 1]$ e $[1, +\infty)$. Su tutto $\mathbb{R}$ la funzione è concava, quindi f è convessa su ogni intervallo che non contiene 0.

4. Caratterizzare tutti gli intervalli $[a, b]$ su cui

$$f(x) = \frac{x^2+7x+50}{x^2+7x+49}$$

è concava.

Notiamo che $x^2 + 7x + 49 > 0$ per ogni x e quindi la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre è derivabile due volte; quindi la funzione f è concava su un intervallo $[a, b]$ se e solo $f'' \leq 0$ su $[a, b]$.

Dopo aver semplificato

$$f(x) = \frac{x^2+7x+50}{x^2+7x+49} = 1 + \frac{1}{x^2+7x+49},$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x+7}{(x^2+7x+49)^2}, \\ f''(x) &= \frac{2(2x+7)^2 - 2(x^2+7x+49)}{(x^2+7x+49)^3} \\ &= 2 \cdot \frac{4x^2+28x+49-x^2-7x-49}{(x^2+7x+49)^3} \\ &= \frac{6}{(x^2+7x+49)^3} \cdot (x^2+7x). \end{aligned}$$

Quindi

$$f''(x) \le 0 \iff -7 \le x \le 0,$$

dunque f è concava in tutti gli intervalli $[a,b]$ contenuti in $[-7,0]$.

5. Determinare gli intervalli su cui $f(x) = |x-1| + \sqrt{|x|-x}$ è convessa/concava.

Per $x \ge 0$ si ha

$$f(x) = |x-1|,$$

che è convessa. Inoltre f è concava in ogni intervallo di $(0,+\infty)$ che non contiente 1.

Per $x < 0$ si ha $f(x) = -1 + x + \sqrt{-2x}$, la cui derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-2x^3}},$$

che è negativa. Dunque f è concava in $(-\infty, 0]$. Si vede facilmente dal grafico che f non è concava in nessun intervallo aperto che contiene 0.

Un criterio per determinare la convessità per funzioni non derivabili in un punto. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua in (a,b) e derivabile in $a < c < b$. Se f è convessa in (a,c) e in (c,b) ed esistono le derivate destra e sinistra $f'_\pm(c)$, allora f è convessa in (a,b) se e solo se

$$f'_-(c) \le f'_+(c).$$

Altri esercizi. 1. Determinare il più grande intervallo illimitato superiormente su cui

$$f(x) = |x-2|e^{-\frac{1}{3}x}$$

è convessa.

2. Determinare l'insieme dei punti di flesso di

$$f(x) = 3x^5 + 10x^4 + 10x^3$$

36 LO STUDIO DI FUNZIONE

Possiamo riassumere parte di quello che abbiamo visto nelle ultime lezioni come un 'algoritmo' per studiare le proprietà (ed eventualmente tracciare un grafico approssimato) di una funzione f di cui si può calcolare la derivata.

1. Studio del dominio di f: suddivisione del dominio in intervalli. Semplificazione del dominio usando simmetrie (parità o disparità della funzione) o periodicità;

2. Andamento di f agli estremi degli intervalli di definizione: calcolo dei limiti e dei comportamenti asintotici;

3. Calcolo della derivata. Studio del dominio di f': suddivisione del dominio in intervalli;

4. Studio del segno della derivata. Individuazione degli intervalli di monotonia;

5. Classificazione di punti di discontinuità e di non-derivabilità; individuazione di estremi relativi ed assoluti.

6. (se possibile) Studio della derivata seconda. Individuazione degli intervalli di convessità/concavità. Individuazione di punti di flesso.

Esempio. (informazioni deducibili da limiti e dalla derivata prima)

Studiamo la funzione $f(x) = \dfrac{x \log |x|}{x+1}$.

1. Dominio di $f = \{x \neq 0, -1\}$, che scriviamo come unione di intervalli: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ e $(0, +\infty)$;

2. Calcolo dei limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log |x| = +\infty;$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1} f(x) &= -\lim_{x\to-1} \frac{\log(-x)}{1+x} \\ &= -\lim_{y\to-0} \frac{\log(1-y)}{y} = 1;\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{x \log |x|}{x+1} = \lim_{x\to0} x \log |x| = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log |x| = +\infty.$$

In particolare f è estendibile con continuità in -1 e 0.

Inoltre si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x \log |x|}{1+x} - \log |x| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\log |x|}{1+x} = 0,$$

e quindi f è asintotica a $\log|x|$ per $x \to \pm\infty$;

3. Calcolo della derivata:
$$f'(x) = \frac{1 + x + \log|x|}{(1+x)^2}.$$
Il dominio di f' è lo stesso di f;

4. Si ha $f' > 0$ se e solo se $\log|x| + x + 1 > 0$. Per $x < 0$ la funzione $g(x) = \log|x| + x + 1$ ha derivata $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$ da cui si deduce che g è crescente in $(-\infty, -1)$ e decrescente in $(-1, 0)$, quindi ha massimo in $x = -1$ e $g(-1) = 0$, quindi $f' = g < 0$ per $x < 0$ e $x \neq -1$;

Per $x > 0$ la diseguaglianza $f' > 0$ equivale a $\log|x| > -x - 1$, che si risolve 'graficamente'. Usando il teorema degli zeri si ottiene che esiste un punto $\alpha \in (0, 1)$ in cui $f' = 0$ e tale che $f' < 0$ in $(0, \alpha)$ e $f' > 0$ in $(\alpha, +\infty)$.

Dunque: f è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(-1, 0)$ e in $(0, \alpha]$ (e la sua estensione per continuità è strettamente decrescente in $(-\infty, \alpha]$), e strettamente crescente in $[\alpha, +\infty)$;

5. Come abbiamo visto 0 e -1 sono punti di discontinuità eliminabile. La funzione non ha punti di non-derivabilità ed ha un solo punto di minimo assoluto α, che è anche il solo punto stazionario.

Estendendo f con continuità in -1 e 0, ponendo $f(0) = 0$ e $f(-1) = 1$, calcolando la derivata in questi due punti si ha:
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{1+x} = \lim_{x\to 0} \log|x| = -\infty,$$
e quindi $x = 0$ diventa un punto a tangente verticale, mentre
$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{x\log|x| - x - 1}{(1+x)^2} = \text{(H)}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{\log|x|}{2(1+x)} = \text{(H)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2},$$
e quindi anche la derivata si estende in -1 ed è diversa da 0.

Osservazioni.

(a) A volte il dominio di f', o la sua suddivisione in intervalli in cui $f' > 0$ o $f' < 0$, non si calcolano esplicitamente, ma i teoremi che abbiamo a disposizione ci aiutano a descriverli qualitativamente. Nell'esempio sopra abbiamo usato il teorema degli zeri per determinare il numero di intervalli in cui $f' > 0$;

(b) Nell'esempio precedente lo studio del segno di f' per $x < 0$ non può essere eseguito facilmente, ma dobbiamo studiare la funzione g (in sostanza: per studiare f dobbiamo studiare prima f').

Esercizio. Studiare $f(x) = \dfrac{x^2 e^{-\frac{1}{x}}}{x+2}$.