33 ESTREMI RELATIVI. PUNTI STAZIONARI

Definizione Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Il punto x_0 si dice un PUNTO DI MASSIMO RELATIVO o un PUNTO DI MASSIMO LOCALE quando esiste un intorno I di x_0 tale che x_0 è punto di massimo per la restrizione di f a $I \cap A$; ovvero

$\forall\, x \in A \cap I$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$.

Analogamente diciamo che x_0 è un PUNTO DI MINIMO RELATIVO o un PUNTO DI MINIMO LOCALE quando esiste un intorno I di x_0 tale che x_0 è punto di minimo per la restrizione di f a $I \cap A$; ovvero

$\forall\, x \in A \cap I$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$.

Un punto si dice DI ESTREMO RELATIVO o DI ESTREMO LOCALE se è punto di massimo locale o di minimo locale.

NOTA: se x_0 è un punto di massimo per f su A, allora è anche punto di massimo relativo; se vogliamo distinguere le due cose si parlerà di PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO (o globale).

Esempi. 1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Allora $-1, 0, 1$ sono punti di massimo relativo; di questi 0 è punto di massimo assoluto;

2) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| = 1 \\ 1/x^2 & \text{se } x \in]-1,1[\setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. 0 è punto di minimo assoluto; 1 e -1 sono punti di massimo relativo ma non assoluto.

3) $f(x) = \cos x$; tutti i punti della forma $2k\pi$ sono punti di massimo assoluto, tutti i punti della forma $(2k+1)\pi$ sono punti di minimo assoluto;

4) $f(x) = [x]$ (parte intera). Tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ sono punti di massimo relativo; tutti i punti $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sono punti di minimo relativo;

5) $f(x) = \sqrt{|x|}$. Il punto 0 è l'unico punto di minimo (assoluto e relativo); è anche un punto di cuspide;

6) $f(x) = \min\{|x|, |x-2|+1\}$. Il punto 0 è punto di minimo assoluto; il punto 2 è punto di minimo relativo. Notare che la funzione non è derivabile in 0 e 2.

7) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -1 \\ -x & \text{se } -1 < x < 1 \\ x-2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. La funzione non ha punti di massimo e minimo assoluti. 1 è punto di minimo relativo; -1 è punto di massimo relativo.

Esercizio. Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \\ x^4 & \text{se } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Questa funzione è ottenuta 'modificando' in punti isolati la funzione continua $4x^2$, che ha un unico punto di minimo relativo (e assoluto) $x = 0$. Notiamo che si ha

$$\text{(a) } 4x^2 < x^4 \iff x < -2 \text{ o } x > 2;$$

$$\text{(b) } 4x^2 > x^4 \iff -2 < x < 2 \text{ e } x \neq 0;$$

$$\text{(c) } 4x^2 x^4 \iff x = -2, 2 \text{ o } 0.$$

Dunque (caso (c)) la funzione non viene modificata vicino ai punti -2, 0 e 2, e dunque 0 continua ad essere un minimo relativo, mentre ± 2 non sono estremi relativi.

Nel caso (a) la funzione viene modificata nei punti $x_0 \in \mathbb{Z}$ con $x_0 < -2$ o $x_0 > 2$ e per tali x_0 si ha $f(x_0) > f(x)$ in un intorno di x_0, dato che $\lim_{x \to x_0} f(x) = 4x_0^2 < x_0^4 = f(x_0)$. Dunque questi x_0 sono punti di massimo relativo.

Nel caso (b) la funzione viene modificata nei punti $x_0 \in \mathbb{Z}$ con $-2 < x_0 < 2$, $x_0 \neq 0$ (ovvero $x_0 = \pm 1$) e per tali x_0 si ha $f(x_0) < f(x)$ in un intorno di x_0, dato che $\lim_{x \to \pm 1} f(x) = 4 > 1 = f(\pm 1)$. Dunque questi ± 1 sono punti di minimo relativo.

Riassumendo: $0, \pm 1$ sono i punti di minimo relativo per f; ± 3, ± 4, $\pm 5, \ldots$ sono i punti di massimo relativo.

Osservazione: nell'esercizio precedente abbiamo usato (per i punti ± 1) il seguente ragionamento: "se si ha

$$f(x_0) < \lim_{x \to x_0} f(x),$$

allora x_0 è un punto di minimo relativo."

Analogamente (per i punti $\pm 3, \pm 4, \ldots$): "se si ha

$$f(x_0) > \lim_{x \to x_0} f(x),$$

allora x_0 è un punto di massimo relativo."

Nel caso di funzioni derivabili e punti di estremo relativo interni, si è visto che la derivata deve annullarsi, ovvero la tangente essere orizzontale (parallela all'asse delle x). Conviene dare una definizione per quest'ultima proprietà.

Definizione x_0 è PUNTO STAZIONARIO O PUNTO CRITICO di f se $f'(x_0) = 0$.

ESEMPI: 1) $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x \Longrightarrow 0$ è l'unico punto stazionario (e di minimo assoluto)
2) $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2 \Longrightarrow 0$ è l'unico punto stazionario (ma non è punto di estremo relativo);
3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0. \end{cases}$ 0 è punto stazionario. Verificarlo tramite la definizione di derivata.

Ricordiamo ora un ragionamento fatto per arrivare alla dimostrazione del Teorema del Valor Medio, che viene condensato nel teorema seguente. e che ci dà una "ricetta" per la ricerca di estremi (relativi) ma *solo in punti interni al dominio e in cui f è derivabile.*

Teorema. (di Fermat) *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $x_0\in(a,b)$ un punto di estremo relativo per f in cui esiste $f'(x_0)$; allora x_0 è punto stazionario di f.*

DIMOSTRAZIONE (nel caso in cui x_0 sia punto di min. rel.) $\exists\delta>0$ tale che se $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, allora $f(x)-f(x_0)\geq 0$. Quindi

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\begin{cases} \leq 0 & \text{se } x_0-\delta<x<x_0 \\ \geq 0 & \text{se } x_0+\delta>x>x_0. \end{cases}$$

Dunque passando al limite per $x\to x_0\pm$ si ha $f'_-(x_0)\leq 0$, $f'_+(x_0)\geq 0$. Quindi deve essere $f'(x_0)=0$. $\square$

NOTA: abbiamo dimostrato qualcosa di più:
"*Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $x_0\in[a,b]$ un punto di estremo relativo per f in cui esistono le derivate destra e/o sinistra.*
(i) se x_0 è punto di minimo relativo allora $f'_-(x_0)\leq 0$, $f'_+(x_0)\geq 0$;
(ii) se x_0 è punto di massimo relativo allora $f'_-(x_0)\geq 0$, $f'_+(x_0)\leq 0$."

Esercizio. Verificare che queste condizioni sono soddisfatte dalle funzioni negli esempi sopra.

Eercizio. Trovare estremi relativi e punti stazionari di

$$f(x)=\arcsin\Big(\frac{x}{3}\Big)+\sqrt{|x-1|}.$$

In questo caso la funzione è definita in $[-3,3]$, la sua derivata è

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{|x-1|}}\cdot\frac{x-1}{|x-1|}$$

definita per $x\in(-3,3)$, $x\neq 1$. Per $x>1$ la derivata è strettamente positiva (somma di funzioni positive). Per $x<1$ si scrive

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}},$$

e si ha $f' > 0$ se e solo se

$$2\sqrt{1-x} > \sqrt{9-x^2},$$

ovvero $4(1-x) > 9-x^2$, cioè $x^2-4x-5 = (x-5)(x+1) > 0$. Dunque $f' > 0$ se $-3 < x < -1$ o $1 < x < 3$ e $f' < 0$ per $-1 < x < 1$.

Dunque f ha due minimi relativi in $x = -3$ e $x = 1$, e due punti di massimo relativo in $x = -1$ e $x = 3$; inoltre f ha un solo punto stazionario $(x = -1)$ (gli altri punti sono un punto di cuspide $(x = 1)$ e due punti con $f' = +\infty$).

34 PROPRIETÀ DEDUCIBILI DA f''. CONVESSITÀ E CONCAVITÀ

Definizione Sia f derivabile sull'intervallo I. Se esiste la derivata della funzione $x \mapsto f'(x)$ in x, allora $(f')'(x)$ si dice la DERIVATA SECONDA di f in x, e si denota con $f''(x)$ o $f^{(2)}(x)$.

Vediamo per prima cosa un tipo di informazioni 'locali': noi sappiamo che se una funzione è derivabile in un punto x_0, lì il suo grafico è simile a quello di una retta. Se una funzione è derivabile due volte ci aspettiamo che il suo grafico sia simile a quello di una parabola.

Teorema. *Sia f derivabile due volte in x_0, allora*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

(notare il fattore $\frac{1}{2}$, che viene dal derivare due volte $(x - x_0)^2$)

DIMOSTRAZIONE Dobbiamo vedere che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \Big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2\Big)}{(x - x_0)^2} = 0$$

Per vedificarlo possiamo applicare due volte il teorema dell'Hôpital:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} \\ &= (H) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) + f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)} \\ &= \frac{1}{2} = \lim_{x \to x_0} \Big(\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - f''(x_0)\Big) = 0 \end{aligned}$$

per definizione di $f''(x_0)$. □

Se x_0 è un punto stazionario, ovvero $f'(x_0) = 0$, allora

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

e f si approssima con una parabola con il vertice in x_0. Questo ci permette di concludere che x_0 è un massimo o minimo relativo.

Teorema. (criterio della derivata seconda) *Sia f' una funzione continua e x_0 un punto stazionario di f. Se esiste $f''(x_0) > 0$ (risp. < 0), allora x_0 è un punto di minimo (risp. massimo) relativo per f.*

DIMOSTRAZIONE Si ha $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$, quindi esiste, per il Teorema della permanenza del segno $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ per } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Quindi per $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ si ha $f'(x) < 0$, ovvero la funzione è decrescente in $(x_0 - \delta, x_0)$, mentre per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ si ha $f'(x) > 0$, ovvero la funzione è crescente in $(x_0, x_0 + \delta)$. Questo mostra che $f(x_0) < f(x)$ per $0 < |x - x_0| < \delta$. □

NOTA: questo teorema suggerisce un metodo per la ricerca di punti di estremo relativo per funzioni due volte derivabili. Attenzione però : la condizione è solo sufficiente (si consideri la funzione x^4 nel punto 0).

Definizione Se x_0 è punto stazionario per f e f è monotona in un intorno di x_0, allora x_0 si dice un PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE (per esempio: $f(x) = x^3$ e $x = 0$).

Proposizione. *Se x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale ed esiste $f''(x_0)$, allora $f''(x_0) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE f monotona $\Longrightarrow f' \geq 0$ (oppure ≤ 0) $\Longrightarrow x_0$ è un punto di minimo relativo (oppure massimo relativo) per $f' \Longrightarrow f''(x_0) = (f')'(x_0) = 0$. □

Vediamo ora come dallo studio di f'' si deducano anche delle informazioni 'globali', allo stesso modo in cui dallo studio della derivata prima si deducono informazioni sulla monotonia.

Definizione Una funzione f definita su un intervallo si dice CONVESSA se il segmento congiungente due punti del grafico non passa mai 'sotto il grafico'. Una funzione si dice CONCAVA se il segmento congiungente due punti del grafico non passa mai 'sopra il grafico'.

Questa proprietà geometrica può essere descritta analiticamente: una funzione è convessa se per ogni x, y e $t \in (0, 1)$ si ha

$$f(ty + (1 - t)x) \leq tf(y) + (1 - t)f(y)$$

(*diseguaglianza di convessità*). Il significato di questa diseguaglianza, letto sul grafico, è il seguente: al variare di t tra 0 e 1 il punto $z = ty + (1 - t)x$ prende tutti i valori tra x e y. Il valore $tf(y) + (1 - t)f(y)$ non è altro che quello della retta secante il grafico nei punti relativi a x e y corrispondente a z. Quindi, appunto, la diseguaglianza dice che la retta secante sta sopra (o meglio non sta sotto) al grafico.

Esempi. (1) $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$ sono convesse (provarlo: basta osservare i grafici).

(2) $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$ non sono convesse. Per la prima verificare che il segmento secante al grafico tra $x = -1$ e $x = 0$ sta sotto il grafico, per la seconda che il segmento secante al grafico tra $x = 0$ e $x = 1$ sta sotto il grafico;

(3) $f(x) = x^3$ non è ne' concava ne convessa. $f(x) = \sqrt{x}$ è concava.

NOTA: se f è derivabile, allora dire che f è convessa è equivalente a dire che per ogni $x, x_0 \in (a, b)$ si ha

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x),$$

ovvero *il grafico della funzione f sta sopra la tangente in un punto x_0*, e anche che f' è non decrescente. Se f è derivabile due volte ha quindi il seguente criterio:

Teorema. (criterio di convessità) *Sia I intervallo e f due volte derivabile in I. Allora f è convessa in I se e solo se $f'' \geq 0$, e f è concava in I se e solo se $f'' \leq 0$.*

Come per i punti in cui cambia la monotonia, è utile avere una notazione per i punti in cui f cambia da concava a convessa o viceversa.

Definizione Diciamo che x_0 è un PUNTO DI FLESSO per f se f è derivabile in x_0 e se esiste un $\delta > 0$ tale che f è concava in $(x_0 - \delta, x_0)$ e convessa in $(x_0, x_0 + \delta)$, o viceversa.

NOTA: *se x_0 è un punto di flesso ed esiste $f''(x_0)$ allora $f''(x_0) = 0$.*

Esempio Determinare gli intervalli su cui $f(x) = x^3 + x^2$ è concava/convessa.

In questo caso la funzione è derivabile due volte, quindi la domanda si traduce in determinare gli intervalli in cui $f'' \geq 0$ e $f'' \leq 0$ rispettivamente.

Calcoliamo:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x, \qquad f''(x) = 6x + 2 = 2(3x + 1).$$

Dunque f è convessa su $[-1/3, +\infty)$ e concava su $(-\infty, -1/3]$. In particolare $x = -1/3$ è punto di flesso.

Esempio Determinare i più grandi intervalli illimitati superiormente su cui $f(x) = ||x| - 1|$ è concava/convessa.

Basta esaminare il grafico: su $[0, +\infty)$ la funzione coincide con $|x - 1|$ ed è quindi convessa, mentre non lo è su ogni intervallo più grande; su $[1, +\infty)$ la funzione coincide con $x - 1$ e quindi è (anche) concava.