31 IL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Abbiamo visto che molte proprietà importanti delle funzioni (crescenza, decrescenza, iniettività, ecc.) si esprimono tramite proprietà del rapporto incrementale (positività, negatività, non annullarsi, ecc.), e quindi si riflettono su proprietà della derivata. Il seguente teorema ci permette di 'tornare indietro' e dedurre da proprietà della derivata alcune proprietà del rapporto incrementale.

Teorema. (del valor medio, o di Lagrange) *Sia* $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $[x_1, x_2]$ *e derivabile in* (x_1, x_2)*. Allora esiste almeno un punto* $x \in (x_1, x_2)$ *tale che*

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Il significato geometrico del teorema è il seguente: dato che $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ è la pendenza della secante al grafico di f per i punti del grafico relativi a x_1, x_2 (ovvero il 'valor medio' della pendenza del grafico di f tra x_1 e x_2) e $f'(x)$ è la pendenza della tangente al grafico in x, il teorema afferma che esiste un punto x in cui la pendenza della retta tangente è il valor medio della pendenza del grafico di f tra x_1 e x_2, ovvero che esiste un punto x in cui la tangente al grafico è parallela alla secante al grafico per i punti estremi.

Osservazioni. Vediamo che nessuna delle ipotesi del teorema può essere omessa

(1) La funzione f deve essere continua in $[x_1, x_2]$, altrimenti ci può non essere alcuna relazione tra il rapporto incrementale agli estremi e la derivata all'interno di $[x_1, x_2]$: per esempio prendiamo $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

La funzione è discontinua in 0. Si ha $\dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{1 - 1}{1 - 0} = 0$, ma $f'(x) = 1$ per ogni $x \in (0, 1)$; quindi la tesi del teorema è falsa;

(2) La funzione f deve essere derivabile in *ogni* punto di (x_1, x_2). Prendiamo $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ e $f(x) = |x|$. La funzione f è derivabile dappertutto tranne che in 0. Questo basta a far fallire il teorema: $\dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{1 - 1}{1 - (-1)} = 0$, ma $f'(x) = \pm 1$ dove x è derivabile;

(3) Il dominio deve essere un intervallo. Se consideriamo la funzione $\frac{1}{x}$ definita per $x \neq 0$, si ha (prendendo $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$) $\dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 1$, ma la derivata di $\dfrac{1}{x}$ è $-\dfrac{1}{x^2}$ (sempre negativa!) e quindi la tesi del teorema non è verificata.

Nel caso particolare in cui $f(x_1) = f(x_2)$ allora la tesi diventa che esiste un punto $x \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(x) = 0$. Questo caso particolare del teorema di Lagrange viene a volte chiamato Teorema di Rolle. Vediamo come si dimostra questo teorema, sostanzialmente usando il Teorema di Weierstrass (il teorema di Lagrange si dimostra in modo simile, solo risulta un po' più complicata la notazione)

DIMOSTRAZIONE Se $f =$ costante la tesi è ovvia. Supponiamo allora f non costante. Il Teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di un punto di minimo x_m e di un punto di massimo x_M. Dato che f non è costante si ha $f(x_n) < f(x_M)$. Supponiamo che $x_m \notin \{x_1, x_2\}$, allora dal fatto che $f(x_m) \leq f(y)$ per ogni $y \in [x_1, x_2]$ deduciamo che

$$\frac{f(x_m) - f(y)}{x_m - y} \leq 0 \text{ se } y < x_m$$

da cui $f'_-(x_m) \leq 0$, e anche che

$$\frac{f(x_m) - f(y)}{x_m - y} \geq 0 \text{ se } y > x_m$$

da cui $f'_+(x_m) \geq 0$. Ma dato che f è derivabile in x_m si ha $f'(x) = f'_-(x_m) \leq 0$ e $f'(x_m) = f'_+(x_m) \geq 0$, da cui $f'(x_m) = 0$. Se invece $x_m \in \{x_1, x_2\}$ allora $f(x_m) = f(x_1) = f(x_2)$, e quindi $x_M \notin \{x_1, x_2\}$, si ripete il ragionamento (cambiando le diseguaglianze) e si conclude che $f'(x_M) = 0$.

Esercizio. Dimostrare il teorema di Lagrange applicando il teorema di Rolle alla funzione $g(x) = f(x) - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Come corollario al teorema di Lagrange abbiamo il seguente risultato, che è importante tenere a mente.

Teorema. (della derivata nulla) *Sia $f' = 0$ su un intervallo I; allora f è costante su I*

DIMOSTRAZIONE Se f non è costante allora $\exists x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$. Allora per il teorema del valor medio esiste $x \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$, contro l'ipotesi. $\square$

ESEMPIO: Sia $f(x) = \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$, definita per $x \neq 0$. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^{-2}}(\frac{-1}{x^2}) = 0.$$

Non si può concludere però che f è costante sul suo dominio poichè esso non è un intervallo. Infatti $f(1)=2\arctan 1 = \pi/2, \quad f(-1)=2\arctan(-1) = -\pi/2$.
Possiamo però applicare il teorema della derivata nulla sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ e concludere che $f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } x < 0 \\ \pi/2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

32 MONOTONIA E SEGNO DELLA DERIVATA

Come conseguenza del teorema del valor medio otteniamo che se conosciamo il segno di f' su un intervallo possiamo conoscere il segno del rapporto incrementale sullo stesso intervallo e quindi dedurne la monotonia di f.

Teorema. *Sia f derivabile in $[a, b]$. Se $f' \geq 0$ (risp. $f' \leq 0$), allora f è non decrescente (risp. non crescente). Se $f' > 0$ (risp. $f' < 0$) allora f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente).*

Dimostrazione ($f' > 0$) Siano $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$; per il Teorema del valor medio si ha che $\exists\ x \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1) > 0$. □

Osservazione. Se f è non-decrescente allora il suo rapporto incrementale è non-negativo e quindi anche $f' \geq 0$, quindi possiamo dedurre che una funzione derivabile in un intervallo è non-descescente *se e solo se* $f' \geq 0$. Un enunciato analogo vale per le funzioni non-crescenti, ma se f è strettamente crescente non possiamo dedurre che $f' > 0$ in ogni punto: si consideri la funzione $f(x) = x^3$, che è strettamente crescente; la sua derivata è $f'(x) = 3x^2$ che si annulla in 0. Naturalmente in questo caso possiamo dedurre dal teorema che f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, e quindi lo è anche su tutto $\mathbb{R}$.

Studio della monotonia. Dal teorema precedente abbiamo il seguente procedimento:

1. Calcolare f';
2. Studiare il segno di f'. Individuare nel dominio di f' gli intervalli in cui $f' > 0$ e $f' < 0$;
3. Dedurre che in tali intervalli f è strettamente crescente o decrescente.

Esempio. Sia $f(x) = x^2 e^{-x}$. Allora:

1. $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$;
2. Si ha $f' > 0$ per $0 < x < 2$ e $f' < 0$ per $x < 0$ o $x > 2$;
3. Deduciamo che f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(2, +\infty)$, strettamente crescente in $(0, 2)$.

NOTA: per verificare che non si sono fatti errori conviene controllare che le deduzioni sulla monotonia siano coerenti con i valori e i limiti della funzione agli estremi degli intervalli di monotonia. In questo caso, conviene verificare che

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) > f(0)$;
b. $f(0) < f(2)$;
c. $f(2) > \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Queste condizioni sono presto verificate, traducendosi in

a. $+\infty > 0$; b. $0 < 4e^{-2}$; c. $4e^{-2} > 0$.

Esempio. Sia $f(x) = x \log |x|$. Allora:
1. $f'(x) = \log |x| + 1$;
2. Si ha $f' > 0$ per $x < -1/e$ o $x > 1/e$ e $f' < 0$ per $-1/e < x < 0$ o $0 < x < 1/e$;
3. Deduciamo che f è strettamente crescente in $(-\infty, -1/e)$ e in $(1/e, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-1/e, 0)$ e $(0, 1/e)$.

NOTA: notare che entrambi gli esempi precedenti non sono deducibili semplicemente dalla conoscenza delle proprietà di monotonia delle funzioni elementari

Esercizi Determinare gli intervalli in cui sono monotone crescenti/decrescenti, le seguenti funzioni:

1. $f(x) = \log |1 + \log x| + 2\log 2$;

2. $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{x}{x+1}\Big) + \log(2x^2 + 2x + 1)$;

3. $f(x) = e^{\sqrt{\log^2 x + \log x}}$;

4. $f(x) = |x-1|e^{x^2}$;

5. $f(x) = \arctan\Big(\log\Big(\dfrac{1+\sin x}{|\cos x|}\Big)\Big)$;

6. $f(x) = \arctan(\tan x)$;