29 ALCUNI ESERCIZI SULLE DERIVATE - I

Risolvere i seguenti esercizi:

1. Calcolare derivata destra e sinistra in $x = 0$ di

$$f(x) = 4\sqrt{\sin x^2} + 7\sqrt{\cos x^2};$$

2. Calcolare derivata destra e sinistra in $x = \pi$ di

$$f(x) = \Big|3 \sin |\pi - x| - 4 \cos |\pi + x|\Big|.$$

(notare che per $x \to \pi+$ si ha

$$f(x) = 4 \cos(\pi + x) - 3 \sin(x - \pi),$$

mentre per $x \to \pi-$ si ha

$$f(x) = 4 \cos(\pi + x) - 3 \sin(\pi - x));$$

3. Calcolare la retta tangente in $x = 1$ al grafico di

$$f(x) = \frac{1 + \arctan(x^2 - x)}{|1 - 2x|};$$

4. Calcolare la retta tangente in $x = 6$ al grafico di

$$f(x) = e^x \cos(\pi x) \log(x - 5).$$

(notare che $D(f \cdot g \cdot h) = Df \cdot g \cdot h + f \cdot Dg \cdot h + f \cdot g \cdot Dh$);

5. Calcolare la retta tangente al grafico di $f(x) = (1 + \log x)^{3x}$ in $x = 1$

6. Calcolare la retta tangente al grafico di $f(x) = (3x)^{\log x}$ in $x = 1$

7. Calcolare la retta tangente al grafico di $f(x) = (\cos x + \sin x)^{\cos x}$ in $x = 2\pi$

8. Calcolare la derivata sinistra in $x = 0$ della funzione $\left|\sqrt{(|x| + x)}\, \log(|x| + \sqrt{\cos x^2})\right|$

30 ALCUNI ESERCIZI SULLE DERIVATE - II

1. Calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x^2-x+1)}{\log(3x^2-3x+1)}$$

in due modi: usando il teorema dell'Hôpital e i limiti fondamentali

2. Calcolare

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x-4}}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+8}}$$

in due modi: usando il teorema dell'Hôpital e razionalizzando

3. Calcolare (dopo avere riscritto la funzione in base e)

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}\Big)^{\frac{4}{\log x}}$$

in due modi: usando il teorema dell'Hôpital e mediante confronto di infiniti

4. Calcolare (dopo avere riscritto la funzione in base e)

$$\lim_{x\to 3^+} \Big(\log(x^2-3x+1)\Big)^{\frac{2}{\log(x-3)}}$$

5. Trovare i punti di non-derivabilità di

$$f(x)=\sqrt{||x|-1|}$$

(notare che

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x-1} & \text{per } x<-1\\ \sqrt{x+1} & \text{per } -1<x<0\\ \sqrt{-x+1} & \text{per } 0<x<1\\ \sqrt{x-1} & \text{per } x>1\end{cases}$$

e che nei rispettivi intervalli queste funzion i sono derivabili. Dedurre che 1 e -1 sono punti di cuspide, 0 è punto angoloso).

5. Trovare i punti di non-derivabilità di $f(x)=|x^2-x|\sqrt{|x^2-2x|}$

6. Verificare che **non** si può applicare il teorema dell'Hôpital al calcolo di

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3\sin x)}{\log(2x+4\cos x)}.$$