23 INVERTIBILITÀ E CONTINUITÀ

Ricordiamo che se A, B sono insiemi e $f : A \to B$ è una funzione INIETTIVA, ovvero $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, allora la relazione $g(b) = a \Longleftrightarrow f(a) = b$ definisce una funzione $g : Im\, f \to A$ ($Im\, f$ l'immagine di f). Questa funzione g si chiama la FUNZIONE INVERSA di f e viene denotata con f^{-1}. Una funzione iniettiva si dice anche INVERTIBILE.

NOTA: a volte si richiede anche che l'immagine di f sia B (si dice in questo caso che f è SURIETTIVA, o surgettiva), di modo che l'inversa sia $f^{-1} : B \to A$. Questo in generale non è richiesto nei problemi di Analisi, mentre è una questione fondamentale in altri tipi di problemi.

Esempi. (1) arcsin : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ è l'inversa del seno (o meglio della sua restrizione a $[-\pi/2, \pi/2]$);
(2) arctan : $\mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ è l'inversa della tangente (o meglio della sua restrizione a $[-\pi/2, \pi/2]$);
(3) $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è l'inversa di a^x ($a > 0$, $a \neq 1$).

In tutti questi casi notiamo che la funzione f è una funzione strettamente monotona. Vediamo che questo non è un caso: per le funzioni continue (definite su un intervallo!) dire invertibile o strettamente monotona è la stessa cosa. Questo sarà importante in seguito, quando vedremo che per certe funzioni è facile determinare la stretta monotonia tramite le derivate.

Teorema. *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è invertibile $\Longleftrightarrow$ f è strettamente monotona. In tal caso $dom f^{-1}$ è un intervallo e f^{-1} è continua*

DIMOSTRAZIONE L'implicazione f strettamente monotona $\Longrightarrow$ f invertibile è sempre valida (anche quando f non è continua), perchè una funzione strettamente monotona è chiaramente iniettiva.

Proviamo l'implicazione inversa, ovvero che se f non è strettamente monotona allora f non è iniettiva. Se f non è strettamente monotona allora possiamo trovare tre punti x_1, x_2 e x_3 con $x_1 < x_2 < x_3$ e tali che $f(x_2) \leq f(x_1)$ e $f(x_2) \leq f(x_3)$, oppure $f(x_2) \geq f(x_1)$ e $f(x_2) \geq f(x_3)$.

Prendiamo il primo dei due casi: $f(x_2) \leq f(x_1)$ e $f(x_2) \leq f(x_3)$. Se una delle due diseguaglianze è un'uguaglianza allora la funzione non è iniettiva e quindi la dimostrazione è finita. Altrimenti si ha $f(x_2) < f(x_1)$ e $f(x_2) < f(x_3)$. Consideriamo allora un punto y tale che

$$f(x_2) < y < \min\{f(x_1), f(x_3)\}.$$

Dato che $f(x_2) < y < f(x_1)$ possiamo applicare il teorema dei valori intermedi all'intervallo $[x_1, x_2]$ e trovare un punto $x' \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x') = y$. Dato che $f(x_2) < y < f(x_3)$ possiamo applicare il teorema dei valori intermedi all'intervallo $[x_2, x_3]$ e trovare un punto $x'' \in (x_2, x_3)$ tale che $f(x'') = y$. Questo mostra che f non è iniettiva.

Dato che f è continua e definita su un intervallo la sua immagine (ovvero il dominio dell'inversa) è un intervallo per il teorema dei valori intermedi. Vediamo che f^{-1} è continua: dobbiamo vedere che se $y_n \to y$ allora $x_n = f^{-1}(y_n) \to x = f^{-1}(y)$. Se così non fosse allora (a meno di estrarre sottosuccessioni) $x_n \to x'$ con $x \neq x'$ (o x_n diverge) e allora $y_n = f(x_n)$ tende a $y' = f(x')$ con $y' \neq y$ (similmente, se x_n diverge y_n non tende a y).

Esempio. arcsin, arctan, log sono funzioni continue.

Domanda. Il teorema resta vero per funzioni che non siano continue, o che, pur essendo continue non sono definite su un intervallo?

La risposta è NO: entrambe le condizioni sono necessarie. Infatti ci sono funzioni continue (non definite su intervalli) invertibili ma non strettamente monotone. Per esempio:

$$f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

che è l'inversa di se stessa.

Ci sono anche funzioni definite su intervalli (non continue) invertibili ma non strettamente monotone. Ne costruiamo facilmente una: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (-1, 1), \\ -x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Anche questa è l'inversa di se stessa.

LIMITI DI FUNZIONI CON DOMINIO QUALSIASI

In generale le funzioni che incontriamo sono definite su intervalli o unioni di intervalli, per cui la definizione di limite ha un chiaro significato in termini di proprietà del grafico. Per funzioni definite su insiemi più complessi ci si può porre il problema di quando ha senso definire l'operazione di limite.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$; ricordiamo che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per A se c'e' una successione $\{x_n\}$ con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ che tende a x_0, e che un punto di A che non sia un punto di accumulazione per A si dice un PUNTO ISOLATO di A.

ESEMPI: 1) $A = \{(1/n) : \ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$. 0 è l'unico punto di accumulazione per A. Inoltre A è composto solo di punti isolati. 2) I punti di accumulazione per $\mathbb{Z}$ sono $+\infty$ e $-\infty$. Naturalmente, anche $\mathbb{Z}$ è composto solo di punti isolati.

Definizione Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e x_0 di accumulazione per A. Allora diciamo che $f(x)$ tende a $L \in [-\infty, +\infty]$ per $x \to x_0$ (e scriviamo ancora $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$) se per ogni $x_n \to x_0$ con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x_n) \to f(x_0)$.

NOTA: questa definizione può venire riscritta con la terminologia degli ε e δ, distinguendo i vari casi. Per esempio se $x_0, L \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa che

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \neq x_0 :\ x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \varepsilon$, si ha $|f(x) - L| < \delta$
(PER ESERCIZIO: riscrivere i vari casi).

ESEMPI: 1) ogni successione è una funzione con dominio $\mathbb{N}$, e quindi $+\infty$ è l'unico punto per cui si possa applicare questa definizione (che naturalmente coincide con la solita definizione di limite di una successione). 2) $A = \{(1/n) :\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$, $f : A \to \mathbb{R}$ sia data da $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \in A$. Allora si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = e$.

Teorema. (Unicità) *Sia x_0 di accumulazione per $dom f$. Se $f(x) \to L$ e $f(x) \to L'$ per $x \to x_0$, allora $L = L'$*

DIMOSTRAZIONE (supponiamo x_0, L e L' numeri reali) Supponiamo $L \neq L'$. Sia $\frac{|L - L'|}{2} > \varepsilon > 0$. Allora $\exists\ \delta > 0$: $x_0 \neq x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$, ed esiste $\delta' > 0$: $x_0 \neq x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \delta' \Longrightarrow |f(x) - L'| \leq \varepsilon$. Quindi $x \neq x_0$ e $|x_0 - x| \leq \min\{\delta, \delta'\}$ si ha $|L - L'| \leq |L - x| + |x - L'| \leq 2\varepsilon < |L - L'|$. Assurdo. $\square$

PER ESERCIZIO: dimostrare il teorema negli altri casi, anche usando la definizione mediante successioni.

NOTA (**funzioni continue con dominio qualsiasi**): se il dominio contiene *punti isolati* (ovvero punti che non sono di accumulazione, come per esempio tuuti i punti di $\mathbb{N}$) allora la funzione è continua in ogni punto isolato del dominio. Per convincersene, basta pensare che provare che una funzione non è continua in x_0 significa trovare una successione di punti $x_n \to x_0$ tale che $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Ma non esistono successioni di punti $x_n \to x_0$ tranne quelle per cui $x_n = x_0$ da un certo n in poi, e quindi $f(x_n) \to f(x_0)$.

24 ALCUNI ESERCIZI

Confronti tra funzioni

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\,9^x + x^6\,8^x}{x^2\,3^x + x^4\,4^x}\,.$$

All'infinito sono le funzioni esponenziali che hanno il "carattere dominante" e inoltre $8^x << 9^x$ e $3^x << 4^x$. Questo suggerisce di ignorare i termini con 8^x e 3^x. Vediamo comunque tutti i passaggi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\,9^x + x^6\,8^x}{x^2\,3^x + x^4\,4^x} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\,9^x\Big(1 + x^2(\frac{8}{9})^x\Big)}{x^4\,4^x\Big(1 + \frac{1}{x^2}(\frac{3}{4})^x\Big)}$$

Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\Big(\frac{3}{4}\Big)^x = 0$$
(entrambi i fattori tendono a 0), ed anche
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\Big(\frac{8}{9}\Big)^x = 0$$
(perché $x^2 << (\frac{9}{8})^x$), quindi il limite diventa
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\,9^x}{x^4\,4^x} = \lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{9}{4}\Big)^x = +\infty$$

2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4\,9^x + x^6\,8^x}{x^2\,3^x + x^4\,4^x}\,.$$

A $-\infty$ sono ancora le funzioni esponenziali che hanno il "carattere dominante", ma adesso $9^x << 8^x$ e $4^x << 3^x$. Questo suggerisce di trascurare i termini con 9^x e 4^x. Vediamo comunque tutti i passaggi:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4\,9^x + x^6\,8^x}{x^2\,3^x + x^4\,4^x} \quad = \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6\,8^x\Big(1 + \frac{1}{x^2}(\frac{9}{8})^x\Big)}{x^2\,3^x\Big(1 + x^2(\frac{4}{3})^x\Big)}$$

Si ha
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}\Big(\frac{9}{8}\Big)^x = 0$$

(entrambi i fattori tendono a 0), ed anche

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\Big(\frac{4}{3}\Big)^x = 0$$

(perché $x^2 << (\frac{4}{3})^x$ a $-\infty$), quindi il limite diventa

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^6\,8^x}{x^2\,3^x} = \lim_{x\to-\infty} x^4\Big(\frac{8}{3}\Big)^x = 0$$

perché $x^4 << \Big(\frac{3}{8}\Big)^x$ a $-\infty$. Un altro modo per calcolare questo ultimo limite (utile, perché siamo abituati a pensare agli andamenti a $+\infty$) è cambiare variabile $y = -x$, per cui il limite diventa

$$\lim_{y\to+\infty} y^4\Big(\frac{8}{3}\Big)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^4}{(\frac{8}{3})^y} = 0,$$

perché $y^4 << (\frac{8}{3})^y$ per $y \to +\infty$.

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(x^4\,9^x + x^6\,8^x)}{\log(x^2\,3^x + x^4\,4^x)}\,.$$

Possiamo procedere come sopra mettendo in evidenza gli andamenti dominanti a $-\infty$, oppure direttamente cambiare variabile $y = -x$ e considerare gli andamenti a $+\infty$. Seguiamo questa seconda strada. Il limite diventa

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to+\infty} \frac{\log(\frac{y^4}{9^y} + \frac{y^6}{8^y})}{\log(\frac{y^2}{3^y} + \frac{y^4}{4^y})} &= \lim_{y\to+\infty} \frac{\log\Big(\frac{y^6}{8^y}(1 + \frac{1}{y^2}\,(\frac{8}{9})^y)\Big)}{\log\Big(\frac{y^2}{3^y}(1 + y^2\,(\frac{3}{4})^y)\Big)} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{\log y^6 - \log 8^y + \log(1 + \frac{1}{y^2}\,(\frac{8}{9})^y)}{\log y^2 - \log 3^y + \log(1 + y^2\,(\frac{3}{4})^y)} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{6\log y - y\log 8 + \log(1 + \frac{1}{y^2}\,(\frac{8}{9})^y)}{2\log y - y\log 3 + \log(1 + y^2\,(\frac{3}{4})^y)}
\end{aligned}$$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} y^2\,(\frac{3}{4})^y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{y^2}\,(\frac{8}{9})^y = 0$, abbiamo

$$\log\Big(1 + \frac{1}{y^2}\,(\frac{8}{9})^y\Big) << 1 << 6\log y << y\log 8$$

e

$$\log\Big(1 + y^2\,(\frac{3}{4})^y\Big) << 1 << 2\log y << y\log 3.$$

Dunque, gli andamenti dominanti sono $y\log 8$ e $y\log 3$, e il limite è $\dfrac{\log 8}{\log 3}$.

Asintoti

1. Calcolare l'asintoto a $-\infty$ di

$$f(x) = \log(e^x + 2^x) + \frac{3x^4 + 3x^3 + x^2 \log|x| + 2}{x^3 + x^2}.$$

Consideriamo separatamente le due funzioni

$$f_1(x) = \log(e^x + 2^x), \qquad f_2(x) = \frac{3x^4 + 3x^3 + x^2 \log|x| + 2}{x^3 + x^2}.$$

Per f_1 notiamo che l'andamento dominante a $-\infty$ è quello di 2^x per cui

$$f_1(x) = \log\Big(2^x\Big(1 + (\frac{e}{2})^x\Big)\Big) = \log 2^x + o(1) = 2\log x + o(1).$$

Dunque f_1 è asintotica a $2\log x$ per $x \to -\infty$.

Per f_2, possiamo 'eliminare' tutti i termini al numeratore che sono $o(x^3)$, ovvero scrivere

$$f_2(x) = \frac{3x^4 + 3x^3}{x^3 + x^2} + \frac{x^2 \log|x| + 2}{x^3 + x^2} = 3x + o(1).$$

Dunque f_2 è asintotica a $3x$ per $x \to -\infty$.

Sommando le due funzioni si ottiene l'asintoto obliquo $y = (3 + \log 2)x$.

2. Calcolare l'asintoto a $-\infty$ di

$$f(x) = \log(e^3 2^x + 3^e 4^x).$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \log(e^3 2^x + 3^e 4^x) &= \log\Big(e^3 2^x\Big(1 + \frac{3^e}{e^3}2^x\Big)\Big) \\ &= \log e^3 + \log 2^x + \log\Big(1 + \frac{3^e}{e^3}2^x\Big) \\ &= 3\log e + x\log 2 + o(1) \\ &= 3 + x\log 2 + o(1), \end{aligned}$$

e quindi l'asintoto è $y = 3\log e + x\log 2$.

3. Calcolare l'asintoto a $-\infty$ di

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}.$$

Dato che non ci riduciamo direttamente ad una funzione affine eliminando dei pezzi trascurabili come abbiamo fatto nei due esercizi precedenti, cerchiamo un asintoto della forma $y = mx + q$, calcolandoci prima

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}{x} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{y^2 + y^3}}{y} \\ &= -\lim_{y\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{y^2 + y^3}{y^3}} = -1 \end{aligned}$$

(abbiamo fatto il cambio di variabile $y = -x$ per avere un limite a $+\infty$).

La formula per il calcolo di q dà

$$q = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x) = \lim_{y\to+\infty} (\sqrt[3]{y^2 + y^3} - y),$$

che è una forma indeterminata $+\infty-\infty$. Possiamo razionalizzarla. In questo caso vorremmo ottenere una differenza di cubi. Per capire come ottenere una differenza di cubi dobbiamo dividere $a^3 - b^3$ per $a - b$, ottenendo

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2,$$

cioé il "prodotto notevole"

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Questo ci dice che dobbiamo moltiplicare e dividere per

$$(\sqrt[3]{(y^2 + y^3)})^2 + y\sqrt[3]{y^2 + y^3} + y^2.$$

Il limite (tenendo conto del prodotto notevole) diventa quindi

$$q = \lim_{y\to+\infty} \frac{(\sqrt[3]{y^2 + y^3})^3 - y^3}{(\sqrt[3]{(y^2 + y^3)})^2 + y\sqrt[3]{y^2 + y^3} + y^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{3y^2} = \frac{1}{3},$$

dove abbiamo usato che

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{(\sqrt[3]{(y^2 + y^3)})^2 + y\sqrt[3]{y^2 + y^3} + y^2}{y^2} = 3.$$

Dunque l'asintoto obliquo a $-\infty$ è $y = -x + \frac{1}{3}$.

4. Calcolare l'asintoto a $-\infty$ di

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^3 + \sqrt{x^6 + x^5}}.$$

Dato che non è chiaro quale sia l'andamento di questa funzione, cerchiamo un asintoto della forma $y = mx + q$, usando la formula

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3}{x} \frac{1}{x^3+\sqrt{x^6+x^5}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^3+\sqrt{x^6+x^5}}.$$

Il denominatore dà una forma indeterminata $-\infty + \infty$, quindi ci conviene razionalizzare, moltiplicando e dividendo per $x^3 - \sqrt{x^6+x^5}$. Il limite diventa

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x(x^3-\sqrt{x^6+x^5})}{x^6-(x^6+x^5)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^4}{-x^5} = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-\sqrt{x^6+x^5}}{x^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t^3-\sqrt{t^6-t^5}}{-t^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^3+\sqrt{t^6-t^5}}{t^3} = 2$$

($t = -x$). Dunque non esite un asintoto obliquo.

Dato che il calcolo ci dà $m = 0$, vediamo se esiste un asintoto orizzontale $y = L$. Il calcolo è molto simile

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3}{x^3+\sqrt{x^6+x^5}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^3+\sqrt{x^6+x^5}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2(x^3-\sqrt{x^6+x^5})}{x^6-(x^6+x^5)} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^5}{-x^5} = -4. \end{aligned}$$

L'asintoto orizzontale è quindi $y = -4$.