19 LIMITI FONDAMENTALI - II

3. Il limite che permette il calcolo di forme indeterminate in cui sono presenti funzioni logaritmiche è:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

La dimostrazione di questo limite si ha subito dal limite

$$\lim_{x\to 0} \Big(1+x\Big)^{1/x} = e.$$

Esempio. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Scriviamo

$$\log(\cos x) = \log(1 + (\cos x - 1)),$$

per cui (pongo $y = \cos x - 1$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$

Allora il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

Il limite è nella forma $1^{+\infty}$. Per ricondurlo ad una forma nota, riscriviamo la funzione in base e

$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\log(\cos x)/x^2}.$$

Dato che e^y è continua e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

il limite vale $e^{-1/2}$.

Nota. *Abbiamo usato l'uguaglianza*

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)},$$

che si usa spesso per trattare le forme esponenziali quando la base è una funzione.

Esempio. Per calcolare

$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$$

scriviamo la funzione come

$$e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}.$$

Con il cambio di variabili

$$\frac{\sin x}{x}-1=y,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\frac{\sin x}{x}-1}\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1,$$

quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x}\cdot\frac{\sin x-x}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1,$$

e il limite vale e^{-1}.

Esempio. Si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty}x^4\left(\log\left(4+x^4\right)-4\log x\right).$$

Dalle proprietà dei logaritmi

$$\lim_{x\to+\infty}x^4\left(\log\left(4+x^4\right)-4\log x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^4\log\left(1+\frac{4}{x^4}\right).$$

Se poniamo $y=4/x^4$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}x^4\log\left(1+\frac{4}{x^4}\right)=\lim_{y\to 0^+}4\frac{\log(1+y)}{y}=4.$$

4. Il limite che permette di trattare limiti al finito in cui è presente un'esponenziale è

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Questo limite si ottiene subito dal precedente, scrivendo

$$e^x-1=y,\qquad x=\log(1+y),$$

per cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)}=1.$$

Esempio. Se $a>0$ allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a.$$

Infatti, basta scrivere
$$a^x = e^{x \log a},$$
e usare la sostituzione $y = x \log a$.

Esempio. Si calcoli
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x} - 1)}.$$

Dato che il limite fondamentale per il seno è in 0, dobbiamo riportarci in 0 notando che $\sin y = -\sin(y - \pi)$. Si ha quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x} - 1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 4^x - \pi)}{\sin(4^{\pi x} - 1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(4^x - 1))}{\sin(4^{\pi x} - 1)}$$
Dal limite fondamentale, (posto $y = \pi(4^x - 1)$) abbiamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(4^x - 1))}{\pi(4^x - 1)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$
e (posto $y = 4^{\pi x} - 1$)
$$\lim_{x\to 0} \frac{4^{\pi x} - 1}{\sin(4^{\pi x} - 1)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

Abbiamo quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x} - 1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\pi(4^x - 1)}{4^{\pi x} - 1}.$$

Usiamo adesso il limite fondamentale
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \log a$$
per ottenere
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x} - 1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\pi(4^x - 1)}{x} \cdot \frac{x}{(4^\pi)^x - 1} = -\lim_{x\to 0} \pi \log 4 \cdot \frac{1}{\log 4^\pi} = -1.$$

Esempio. Si calcoli
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + 3x)^{2x} - 1}{\sin(x^2)}.$$

Scrivendo $(1 + 3x)^{2x} = e^{2x \log(1+3x)}$ abbiamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + 3x)^{2x} - 1}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x \log(1+3x)} - 1}{2x \log(1 + 3x)} \cdot \frac{x^2}{\sin(x^2)} \cdot \frac{2x \log(1 + 3x)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x \log(1 + 3x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6 \log(1 + 3x)}{3x} = 6\,.$$

CONFRONTI TRA FUNZIONI

Quando si ha una somma di più funzioni di cui si vuole calcolare il limite in un punto x_0 la 'strategia' è di individuare la funzione 'dominante' e isolarla da quelle 'trascurabili'.

Esempio. Abbiamo visto che per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+x^3+5x}{6x^4+2x^2+x},$$

si nota che sia al numeratore che al denominatore l'andamento 'dominante' è quello di x^4 per cui lo si isola:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4(3+\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^4})}{x^4(6+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}=\frac{1}{2}.$$

In questo passaggio abbiamo usato il fatto che x^3, $2x^2$, x e 5 sono 'trascurabili rispetto a x^4', ovvero divise per x^4 tendono a 0 (sono infinitesime).

Se invece si vuole calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^4+x^3+5x}{6x^4+2x^2+x},$$

i termini 'dominanti' sono quelli in x e le potenze di ordine superiore sono 'trascurabili rispetto a x' (sempre nel senso che divise per x tendono a 0), ottenendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^4+x^3+5x}{6x^4+2x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x^3+x^2+5)}{x(6x^3+2x+1)}=5.$$

Introduciamo ora una notazione (i SIMBOLI DI LANDAU) per esprimere questo concetto di confronto tra comportamenti di funzioni, che generalizza quella usata per il confronto di successioni..

Definizione Diciamo che g è un O PICCOLO di f per $x\to x_0$ se si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$$

In tal caso si scrive $g=o(f)$ (per $x\to x_0$).

Questo concetto verrà usato nel seguente modo: se $g=o(f)$ allora (h è un'altra funzione)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}$$

(ovvero g si può 'trascurare'). Per convincersene, basta scrivere

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\Big(1+\frac{g(x)}{f(x)}\Big)}{h(x)}.$$

Operazioni sugli o piccolo

(1) $o(f) + o(f) = o(f)$ (ovvero: se sommiamo due funzioni trascurabili rispetto a f otteniamo ancora una funzione trascurabile rispetto a f)
(2) $o(o(f)) = o(f)$ (se una funzione è trascurabile rispetto ad una funzione trascurabile rispetto ad f, è trascurabile rispetto ad f)
(3) $g \cdot o(f) = o(fg)$ (se moltiplico una funzione trascurabile rispetto ad f per g ottengo una funzione trascurabile rispetto a fg)
(4) $o(f + o(f)) = o(f)$,
(5) se $c \neq 0$ allora $o(cf) = o(f)$ ecc.

Per dimostrare queste "regole di calcolo" basta pensare al loro significato: per esempio la prima significa che se abbiamo due funzioni g_1 e g_2 tali che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g_2(x)}{f(x)} = 0$$

allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x) + g_2(x)}{f(x)} = 0$$

(e questo vale per il teorema sul limite della somma).

Nota: (a) $g = o(1)$ equivale a g infinitesima;

(b) in analogia con la notazione per le successioni, a volte scriveremo $g << f$ invece di $g = o(f)$ (e a volte leggeremo 'f è molto più grande di g' (per $x \to x_0$)).

Esempio. Dai limiti fondamentali otteniamo (per $x \to 0$):

$$\sin x = x + o(x); \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2);$$
$$e^x = 1 + x + o(x); \qquad \log(1 + x) = x + o(x),$$

ecc.

Esempio. Abbiamo

$$\log(\cos x) = \log(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + o(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Qui abbiamo usato che

$$o(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = o(-\frac{1}{2}x^2) = o(x^2)$$

per le regole (4) e (5), e che

$$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$$

per la regola (1).

Confronti tra 'infiniti'

I limiti all'infinito calcolati per le successioni ci danno un certo numero di confronti per $x \to +\infty$:

$$1 << \log x << x^\beta << a^x$$

per ogni $a > 1$ e $\beta > 0$. Per dimostrare queste relazioni basta ricondursi agli analoghi limiti per successione tramite la funzione parte intera. Le stesse relazioni si possono scrivere

$$x^\beta = o(a^x), \qquad \log x = o(x^\beta).$$

Esempio. Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + x\log x + \sin x^2}{x + x\log x + 4^{-x}}$$

notiamo che

$$\sin x^2 \le 1 << x\log x << 2^x$$

e

$$4^{-x} << x << x\log x,$$

quindi (eliminando le funzioni trascurabili) il limite è

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x\log x} = +\infty$$

(per esempio perchè $x\log x << x^2 << 2^x$).

Esempi.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\log x = 0$ (per provarlo basta porre $y = 1/x$);

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x = 1$ (per provarlo basta scrivere $x^x = e^{x\log x}$);

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^x - 1}{x} = -\infty$. Per provarlo basta calcolare

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{x\log x} - 1}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{x\log x} - 1}{x\log x} \cdot \log x = \lim_{x\to0^+} \log x = -\infty.$$

20 ANDAMENTI ASINTOTICI

Al finito: sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

1. Se esiste il limite

$$\lim_{x\to a+} f(x) = L$$

allora diremo che f È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ (da destra) in a: la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b) \\ L & x = a \end{cases}$$

è *continua a destra* in a.

Analogamente si definisce l'estendibilità (da sinistra) in b

Esempi. (a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è estendibile con continuità (sia da destra che da sinistra) in 0, ovvero la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è *continua* in 0.
(b) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$ è estendibile con continuità da destra in 0, ma non da sinistra.

2. Se esiste il limite

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$$

allora diremo che la retta verticale $x = a$ è un ASINTOTO VERTICALE per f (analogamente in b)

Esempi. (a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, o $f(x) = -\log |x|$, ha $x = 0$ come asintoto verticale e $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0$;
(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ ha $x = 0$ come asintoto verticale ma non ne esiste il limite in 0;
(c) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$ ha $x = 0$ come asintoto verticale, ma solo il limite sinistro è $+\infty$.

3. Se $f : (a, b) \cup (b, c) \to \mathbb{R}$ ed esistono i limiti

$$\lim_{x\to b-} f(x) \neq \lim_{x\to b+} f(x),$$

entrambi in $\mathbb{R}$, allora si dice che b è un PUNTO DI SALTO O PUNTO DI DISCONTINUITÀ per f. Notiamo che in questo caso f è estendibile con continuità in b sia da destra che da sinistra.

Esempi. (a) $f(x) = \operatorname{sign} x$ ha $x = 0$ come punto di salto;
(b) $f(x) = [x]$ ha $x = 0$ come punto di salto;
(c) $f(x) = \arctan(1/x)$ ha $x = 0$ come punto di salto.

All'infinito: $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ (le stesse considerazioni valgono se $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$).

Diciamo che f e g sono ASINTOTICHE (per $x \to +\infty$) se si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Esempi. (a) $\log(x^3 + \sin x)$ è asintotica a $3\log x$ per $x \to +\infty$ (ma per esempio $e^{x^3+\sin x}$ **non** è asintotica a e^{x^3}));
(b) $x + \frac{\sin e^x}{x}$ è asintotica a x per $x \to +\infty$ (notare che questa funzione oscilla sempre di piu' quando $x \to +\infty$);
(c) $x + \arctan x$ è asintotica a $x + \pi/2$ per $x \to +\infty$ e a $x - \pi/2$ per $x \to +\infty$.

Il caso in cui g è una costante o una funzione affine è particolarmente semplice, e merita una notazione separata.

Definizione Diremo che la retta $y = L$ è ASINTOTO ORIZZONTALE per f (per $x \to +\infty$) se f è asintotica alla costante L, o, semplicemente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

Definizione Sia $m \neq 0$; diremo che la retta $y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO per f (per $x \to +\infty$) se f è asintotica alla funzione $g(x) = mx + q$.

In questo caso abbiamo $f(x) - mx - q = o(1)$, da cui (dividendo per x)

$$m = \frac{f(x)}{x} - \frac{q}{x} + \frac{1}{x}o(1) = \frac{f(x)}{x} + o(1),$$

mentre $q = f(x) - mx = o(1)$. Dunque si ha la seguente 'ricetta' per il calcolo di asintoti orizzontali/obliqui:
(1) si calcola il limite di $f(x)$. Se esiste finito ($= L$) questo da' l'asintoto orizzontale;
(2) se il limite è $\pm\infty$, allora si calcola il limite di $f(x)/x$. Se questo è infinito o non esiste, allora non c'e' asintoto. Se è finito il suo valore m ci da' il *coefficiente angolare* dell'asintoto;
(3) si calcola il limite di $f(x) - mx$. Se questo è finito allora il suo valore q da' il *termine noto* dell'asintoto

Esempio. Se f è un quoziente di polinomi (con il numeratore di un grado più alto del denominatore), l'asintoto obliquo si calcola subito facendo la divisione di polinomi:

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{x^2 - 3x + 3x - 9 + 9}{x-3} = \frac{x(x-3) + 3(x-3) + 9}{x-3} = x + 3 + \frac{9}{x-3} = x + 3 + o(1)$$

per $x \to \pm\infty$ e quindi $y = x + 3$ è asintoto obliquo per $\frac{x^2}{x-3}$ sia a$+\infty$ che a $-\infty$.

Esempio. Sia $f(x) = \log(7^x + 15x - 8)$. Il limite a $+\infty$ è $+\infty$, quindi non c'e' asintoto orizzontale. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Big(7^x\Big(1+\frac{15x}{7^x}-\frac{8}{7^x}\Big)\Big)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log 7^x + \log\Big(1+\frac{15x}{7^x}-\frac{8}{7^x}\Big)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log 7 + o(1)}{x} = \log 7.$$

Dunque $m = \log 7$ e

$$q = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - x\log 7) = \lim_{x\to+\infty} \log\Big(1+\frac{15x}{7^x}-\frac{8}{7^x}\Big) = 0.$$

quindi l'asintoto obliquo è $x\log 7$.

Esempio. Sia $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4\log(1 + x^3)}$. Notiamo che per $x \to +\infty$

$$f(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} + 4\frac{\log(1+x^3)}{x^2}} = x(1 + o(1)) = x + o(x).$$

Allora

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + o(x)}{x} = 1,$$

e

$$q = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 + 2x + 4\log(1 + x^3)} - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 4\log(1+x^3)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4\log(1 + x^3)} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 4\log(1+x^3)}{2x + o(1)} = 1.$$

Quindi l'asintoto obliquo è $y = x + 1$.

Esempio. Sia $f(x) = x + \log x$. Questa funzione evidentemente non ammette asintoti a $+\infty$, anche se il calcolo da':

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{\log x}{x}) = 1.$$

In questo caso pero' $q = +\infty$.