17 LIMITI E COMPOSIZIONE

L'operazione di limite si 'comporta bene' per composizione con funzioni continue.

Teorema. *Sia* $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ *e sia* f *continua in* y_0. *Allora esiste*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(y_0).$$

Questo teorema ci dice che se $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ e se f è continua in y_0, per calcolare il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)),$$

basta porre $y = g(x)$ e calcolare il limite

$$\lim_{y \to y_0} f(y).$$

Se f è continua questo limite è $f(y_0)$. Un altro modo per scrivere il risultato è che se f è continua allora

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\Big(\lim_{x \to x_0} g(x)\Big).$$

Corollario. *Se* g *è continua in* x_0 *e* f *è continua in* $y_0 = g(x_0)$ *allora la composizione* $f \circ g$ *è continua in* x_0.

Esempio. Mostriamo che in generale non si può sostituire l'ipotesi che f sia continua in y_0 con l'ipotesi che esista il $\lim_{y \to y_0} f(y)$.

Basta infatti prendere $f(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \neq 0 \\ 1 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ e g la costante 0. Allora per ogni x_0 abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

per cui $y_0 = 0$, ma

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = 1 \neq 0 = \lim_{y \to 0} f(y).$$

La ragione per cui non vale la conclusione del teorema in questo esempio è che la funzione g prende il valore 0 che è 'proibito' nel calcolo del limite $\lim_{y \to 0} f(y)$. Se si evita il valore 'proibito' il teorema vale come segue:

Teorema. *Se* $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y \to y_0} f(y) = L$, *e* $g(x) \neq y_0$ *per* $x \neq x_0$ *(per* x *sufficientemente vicino a* x_0*), allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L.$$

LIMITI DESTRO E SINISTRO

Definizione Se f è definita in un qualche intervallo della forma $(x_0, x_0 + \delta)$ allora si definisce il LIMITE DESTRO DI f IN x_0 e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0+} f(x)$$

se nella definizione di limite teniamo conto solo dei punti $x > x_0$. Simmetricamente si definisce il LIMITE SINISTRO DI f IN x_0 e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0-} f(x).$$

ESEMPIO: la funzione parte intera non ammette limite per $x \to 0$, però si ha

$$\lim_{x \to 0-} [x] = -1 \qquad \lim_{x \to 0+} [x] = 0.$$

Analogamente

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Proposizione. *Sono equivalenti le condizioni:*

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

ii) $\lim_{x \to x_0+} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to x_0-} f(x) = L.$

DIMOSTRAZIONE i) $\Longrightarrow$ ii): fissato ε (oppure M se il limite è $\pm\infty$) il δ che va bene per la def. di limite va bene anche per i limiti destro e sinistro;

ii) $\Longrightarrow$ i): fissato ε (oppure M...) si trova δ' (risp. δ'') tale che se $x \in (x_0 - \delta', x_0)$ (risp. se $x \in (x_0, x_0 + \delta'')$ allora $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ (risp. $f(x) \geq M$...). Prendendo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ questo va bene nella def. di limite. $\square$

La proposizione precedente è utile nel calcolo dei limiti che si possono suddividere nel calcolo separato di limite destro e sinistro.

18 LIMITI FONDAMENTALI - I

Abbiamo visto che il calcolo dei limiti per (quozienti di) polinomi è sempre semplice. Ora vediamo alcuni limiti (detti 'limiti fondamentali') che ci permettono di concludere che seno, logaritmo, esponenziale, ecc. sono 'molto simili' ad opportuni polinomi.

1. Il limite che permette il calcolo di forme indeterminate in cui sono presenti funzioni trigonometriche è:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

La dimostrazione di questo limite si ha subito dalla disuguaglianza trigonometrica (per $x > 0$)

$$\sin x \le x \le \tan x,$$

da cui si ottiene (dividendo per $\sin x$ e prendendo gli inversi)

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

La stessa disuguaglianza si ottiene per $x < 0$. Il limite si ottiene usando il teorema dei due carabinieri e la continuità del coseno.

Esempio.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

poichè si può scrivere

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Esempio. Risolvere

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}.$$

Dal limite fondamentale $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x \cos 5x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 5x} = 1$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

Esempio. Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Per ricondurci al limite fondamentale, moltiplichiamo e dividiamo per $(1+\cos x)$, per cui (ricordandoci che $1-\cos^2 x=\sin^2 x$)
$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}.$$
Dato che $(1+\cos x)\to 2$, abbiamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$
Possiamo vedere quest'ultimo limite come composizione delle funzioni
$$g(x)=\frac{\sin x}{x},\qquad f(y)=y^2,$$
e applicare il teorema sul limite di una composizione con $y_0=1$. Dunque
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$
Esempio. Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

Si ha
$$\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2},$$
quindi il limite vale 1/2.

Esempio. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x+x^2)}{10x+7x^2}.$$

Scriviamo
$$\frac{\sin(5x+x^2)}{10x+7x^2}=\frac{\sin(5x+x^2)}{5x+x^2}\cdot\frac{5x+x^2}{10x+7x^2}.$$
Si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+x^2}{10x+7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(5+x)}{x(10+7x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5+x}{10+7x}=\frac{1}{2},$$
per cui
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x+x^2)}{10x+7x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x+x^2)}{5x+x^2}.$$

Poniamo
$$g(x) = 5x + x^2, \qquad f(y) = \frac{\sin y}{y}.$$
Possiamo applicare il teorema sulla composizione di limiti con $x_0 = 0$, e
$$y_0 = \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$
dato che $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$ (per x sufficientemente vicino a x_0). Si ha allora
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x + x^2)}{5x + x^2} = \lim_{y\to 0} f(y) = 1.$$

2. Il secondo limite fondamentale è
$$\lim_{x\to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

Lo deduciamo dal corrispondente limite di successioni
$$\lim_n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = e.$$
Infatti per $x > 0$ prendiamo $n = [x]$ (la parte intera di x). Abbiamo le diseguaglianze
$$n \le x \le n + 1, \qquad \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n},$$
da cui
$$\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^x \le \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x \le \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^x,$$
Inoltre (per la monotonia delle esponenziali di base > 1) si ha
$$\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^x \ge \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^n = \frac{\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}},$$
e anche
$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^x \le \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$
In conclusione, abbiamo la doppia diseguaglianza
$$\frac{\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \le \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x \le \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$
Quando $x \to +\infty$ (e in corrispondenza $n \to +\infty$) i termini estermi della diseguaglianza tendono ad e, e il limite è dimostrato per il teorema dei due carabinieri.

Esempio. Si ha
$$\lim_{x\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

Possiamo scrivere $y=-x$, per cui
$$\lim_{x\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = \lim_{y\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{y}\Big)^{-y}$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\Big(\frac{y-1}{y}\Big)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\Big(\frac{y}{y-1}\Big)^{y}$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\Big(\frac{y-1}{y}\Big)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{y-1}\Big)^{y}$$
Poniamo $z=y-1$. Allora si ha
$$= \lim_{y\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{y-1}\Big)^{y} = \lim_{z\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{z}\Big)^{z+1}$$
$$= \lim_{z\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{z}\Big)^{z}\Big(1+\frac{1}{z}\Big) = e.$$
Esempio. Per ogni $a\in\mathbb{R}$ si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{a}{x}\Big)^x = e^a.$$

Se $a=0$ il limite è banale. Altrimenti si usa la sostituzione $y=x/a$.
Esempio. Si ha
$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Per provarlo mostriamo che coincidono i limiti destro e sinistro. Per il destro si ha, scrivendo $y=1/x$,
$$\lim_{x\to0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{y}\Big)^y = e.$$
Analogamente per il sisistro.
Esempio. Calcolare
$$\lim_{x\to0}\frac{(1+3x)^{2/x}}{(1+7x)^{1/x}}.$$

Notiamo che (ponendo $y=ax$)
$$\lim_{x\to0}(1+ax)^{b/x} = \lim_{y\to0}\Big((1+y)^{1/y}\Big)^{ab} = e^{ab}.$$

Si ha quindi
$$\lim_{x\to0}\frac{(1+3x)^{2/x}}{(1+7x)^{1/x}} = \frac{e^6}{e^7} = \frac{1}{e}.$$