15 LIMITI DI FUNZIONI

Estendiamo la nozione di limite a funzioni reali di variabile reale.

Definizione (caratterizzazione per successioni) Si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

($x_0, L \in \overline{\mathbf{R}}$) se e solo se per ogni successione $a_n \to x_0$ con $a_n \neq x_0$ (almeno per n grande) si ha $\lim_n f(a_n) = L$.

Limiti all'infinito

La definizione per successioni si traduce nella seguente.

Definizione Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; diremo che $f(x)$ TENDE al numero $L \in \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$ se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \ x \geq M \Longrightarrow |L - f(x)| \leq \varepsilon$.

In tal caso il numero L si dice il limite di f per $x \to +\infty$, e si scrive $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Allo stesso modo si definiscono

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall N > 0 \ \exists M > 0 : \ \forall x \geq M \ \ f(x) \geq N$,

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall N > 0 \ \exists M > 0 : \ \forall x \geq M \ f(x) \leq -N$.

La nozione di limite per $x \to -\infty$ viene data per simmetria:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \ \forall x \leq -M \ \ |f(x) - L| \leq \varepsilon$,

ovvero $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = L$.

Ovviamente si estendono le definizioni di limiti $\pm\infty$.

Esempi. Molti esempi visti con le successioni si adattano a questo caso, per cui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{1 + x^2} = 2, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty, \ \text{etc.}$$

Limiti al finito

Definizione Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$; diremo che $f(x)$ *tende* al numero $L \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| \le \delta, x \ne x_0 \implies |L - f(x)| \le \varepsilon.$$

In tal caso il numero L si dice il limite di f per $x \to x_0$, e si scrive $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

NOTA: x_0 non viene preso in considerazione perche non vogliamo che il valore di f in x_0 influenzi il limite.

Allo stesso modo si definiscono

i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall N > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ |x - x_0| \le \delta, x \ne x_0\ \ f(x) \ge N,$

ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall N > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ |x - x_0| \le \delta, x \ne x_0\ \ f(x) \le -N.$

NOTA: le definizioni di limite ora date si possono riassumere con il linguaggio degli intorni: siano $L, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$; allora

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall$ intorno I di L esiste un intorno J di x_0 tale che se $x_0 \ne x \in J$, allora $f(x) \in I$.

NOTA. Per definire il limite per $x \to x_0$ basta che il dominio di f contenga un intorno "bucato" di x_0, ovvero un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Esempi.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \ne x_0 \\ 1 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$ In questo caso $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, ma $f(x_0) = 1$.

Esempi di non esistenza

Per dimostrare che un limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste basta trovare due successioni a_n e a'_n che convergono entrambe a x_0, ma tali che $\lim_n f(a_n) \ne \lim_n f(a'_n)$.

Applicheremo questo criterio agli esempi qui di seguito.

Esempio 1. $f(x) = \sin x$, $x_0 = +\infty$. Non esiste

$$\lim_{x\to +\infty} \sin x$$

Basta prendere

$$a_n = n\pi, \qquad a'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to +\infty$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 1 \to 1.$$

Esempio 2. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n\pi}, \qquad a'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 1 \to 1.$$

Esempio 3. $f(x) = \sin x$, $x_0 = +\infty$. Non esiste

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin x$$

Basta prendere

$$a_n = n\pi, \qquad a'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to +\infty$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty.$$

Definiamo la funzione **parte intera** di x come

$$[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$

(questa è una buona definizione. Qui si usa la proprietà che *ogni insieme superiormente limitato e non vuoto di* $\mathbb{Z}$ *ha massimo*).
NOTA: se si scrive x nella forma decimale e $x \geq 0$ allora $[x]$ coincide con il numero 'prima della virgola' (bisogna solo evitare di scrivere $0,999999....$ invece di 1). Questa regola non è valida per $x < 0$. Infatti la parte intera di $-0,5$ è -1.

Esempio 4. $f(x) = [x]$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} [x]$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = -1 \to -1.$$

Definiamo la funzione **segno** di x come

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Esempio 5. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sign} x$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 1 \to 1, \qquad f(a'_n) = -1 \to -1.$$

Esempio 6. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = n \to +\infty, \qquad f(a'_n) = -n \to -\infty.$$

Esempio 7. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = -2n \to -\infty.$$

16 CALCOLO DEI LIMITI - FUNZIONI CONTINUE IN UN PUNTO x_0

I teoremi di somma, prodotto, quoziente, confronto, e dei due carabinieri continuano a valere per i limiti di funzioni con lo stesso enunciato dei limiti di successioni.

Il calcolo dei limiti viene spesso semplificato nel semplice calcolo di una funzione nel punto in cui si calcola il limite.

Definizione Una funzione f si dice CONTINUA NEL PUNTO x_0 quando si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esempio. Il più semplice esempio di funzione che ammette limite in x_0 ma non è continua in x_0 è $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ 1 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$

Per i teoremi sui limiti si ha:

Teorema. *Somma, differenza, prodotto di funzioni f e g continue in x_0 sono continue in x_0. Se $g \neq 0$ in un intorno di x_0, allora anche $\dfrac{f}{g}$ è continua in x_0.*

Corollario. I polinomi sono funzioni continue in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Le funzioni razionali sono continue in ogni punto del loro dominio.

DIMOSTRAZIONE Le costanti e la funzione identità $x \mapsto x$ sono ovviamente continue. Basta quindi applicare il teorema precedente. $\square$

Proposizione. *Gli esponenziali, i logaritmi,* cos, sin *sono funzioni continue.*

Il calcolo dei limiti si riconduce spesso a trovare una funzione continua in x_0 che è uguale (o 'molto simile') alla funzione di cui si vuole calcolare il limite in x_0.

Esempio. Per calcolare il limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

(che è una forma indeterminata $0/0$) si nota che per $x \neq 1$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1,$$

quindi

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2,$$

dato che $x + 1$ è continua e vale 2 in $x = 1$.

Osservazione importante (limiti di quozienti di polinomi al finito). L'esempio precedente è in verità una situazione generale: il calcolo del limite per funzioni razionali per $x \to x_0$ è sempre possibile (con qualche piccola precisazione) ed è immediato una volta che si sa fare la scomposizione di polinomi in fattori. Volendo calcolare il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

con P, Q polinomi, si procede come segue: si scrivono

$$P(x) = (x - x_0)^n P_1(x), \text{ con } n \geq 0 \text{ e } P_1(x_0) \neq 0$$

$$Q(x) = (x - x_0)^m Q_1(x), \text{ con } m \geq 0 \text{ e } Q_1(x_0) \neq 0$$

(i casi interessanti saranno quelli in cui $n, m > 0$ e quindi si ha una forma indeterminata $0/0$), per cui

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^n P_1(x)}{(x - x_0)^m Q_1(x)} = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-m} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \\
&= \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)} \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-m}
\end{aligned}$$

(abbiamo usato il limite del prodotto e la continuità delle funzioni razionali sul loro dominio).

Abbiamo quindi i casi:
(1) $n > m$, e il limite vale 0;
(2) $n = m$, e il limite vale $\frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$;
(3) $m > n$. In questo caso il limite esiste se $m - n$ è pari poichè in tal caso

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-m} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{m-n}} = +\infty$$

(e il risultato è $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del coefficiente $\frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$), mentre non esiste se $m - n$ è dispari. In questo ultimo caso la situazione è analoga al limite di $1/x$ in 0 e bisognerà usare la notazione dei limiti destro/sinistro che introdurremo più avanti).

Caso particolare importante: $x_0 = 0$. In tal caso la scomposizione dei polinomi è immediata: scrivere $P(x) = x^n P_1(x)$ significa mettere in evidenza il termine x^n di grado **minimo**, per cui **il limite del quoziente di due polinomi in** 0 **è lo stesso che quello dei loro termini non nulli di grado minimo**.
Esempio. Si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + x^5 + 3x^6}{3x^3 + 4x^4 + x^7} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3(2 + x^2 + 3x^3)}{x^3(3 + 4x + x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 + x^2 + 3x^3}{3 + 4x + x^4} = \frac{2}{3}.$$

'Razionalizzazioni'. Un altro caso frequente è un limite che si presenta in una forma indeterminata $+\infty - \infty$ la quale 'scompare' moltiplicando e dividendo opportunamente per la stessa quantità la funzione di cui si calcola il limite.

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Moltiplicando e dividendo per

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

A questo punto abbiamo una forma $1/+\infty$, e quindi il limite è 0.

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Moltiplicando e dividendo per

$$\sqrt{x^2+x}-x$$

si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}.$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = -\frac{1}{2}.$$