13 SUCCESSIONI E RELAZIONE D'ORDINE

I seguenti teoremi esprimono proprietà delle successioni in relazione all'ordine sulla retta reale (estesa).

Teorema. (PERMANENZA DEL SEGNO) *Se* $\{a_n\}$ *è una succ. reale e* $a_n \to L \in (0, +\infty]$ *(risp.* $a_n \to L \in [-\infty, 0)$*) allora* $\exists m \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq m \quad a_n > 0$ *(risp.* $a_n < 0$*).*

DIMOSTRAZIONE ($L \in (0, +\infty]$) Con gli intorni: basta notare che $(0, +\infty)$ è intorno di L.

Se non si vuole usare il linguaggio degli intorni si devono trattare i casi separatamente: se $L > 0$ si deve notare che da un certo n in poi tutti i termini della successione stanno in $(L/2, 3L/2)$; se $L = +\infty$ allora da un certo n in poi tutti i termini della successione stanno in $(1, +\infty)$. $\square$

Teorema. (CONFRONTO) *Siano* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *sucessioni reali convergenti o divergenti a* $\pm\infty$. *Se* $\exists m_0 : \ \forall n \geq m_0$ *si ha* $a_n \leq b_n$, *allora*

$\lim_n a_n \leq \lim_n b_n$.

DIMOSTRAZIONE Se $\lim_n a_n = \lim_n b_n = +\infty$ la tesi diventa $+\infty \leq +\infty$ (che è vera). Analogamente se $\lim_n a_n = \lim_n b_n = -\infty$. Altrimenti, consideriamo la successione $\{b_n - a_n\}$. Si ha $b_n - a_n \geq 0$, ed esiste

$\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n b_n - \lim_n a_n$.

Quest'ultima diferenza deve essere non negativa, altrimenti per il teor. di perm. del segno dovrebbe essere $b_n - a_n < 0$ da un certo m in poi. $\square$

Questo teorema viene spesso usato per dimostrare che una successione $\{b_n\}$ diverge a $+\infty$ (se $b_n \geq a_n$ con $a_n \to +\infty$).

ESEMPIO: $\lim_n (n + \sin n) = +\infty$ (infatti $n + \sin n \geq n - 1 \to +\infty$).

Teorema. (DEI DUE CARABINIERI) *Siano* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *sucessioni reali t.c.*

$\lim_n b_n = \lim_n a_n = L$

Se $\{c_n\}$ *è una terza successione reale t.c.*

$a_n \leq c_n \leq b_n$,

allora $c_n \to L$.

DIMOSTRAZIONE $|c_n - L| \leq |a_n - L| + |b_n - L|$. $\square$

ESEMPIO: $\lim_n \frac{1}{n} \sin n = 0$. Si prende

$$a_n = -\frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n}, \qquad c_n = \frac{1}{n} \sin n.$$

14 SOTTOSUCCESSIONI

Abbiamo visto che successioni che oscillano possono avere andamenti differenti, e che tali comportamenti non sono individuati semplicemente dall'immagine della successione. Per descrivere e distinguere tra comportamenti diversi si introduce questa definizione.

Definizione $\{b_n\}$ è SOTTOSUCCESSIONE di $\{a_n\}$ se $\exists\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che

$$b_k = a_{f(k)}.$$

In genere si scrive n_k invece di $f(k)$, per cui

$$b_k = a_{n_k}.$$

NOTA: si ha $\lim_k f(k) = +\infty$.

Esempi. $\{4n^2\}$ è sottosuccessione della successione $\{n^2\}$ (prendendo $f(k) = 2k$);

Le successioni costanti $\{1\}$ e $\{-1\}$ sono sottosuccessioni della successione oscillante $\{(-1)^n\}$ (prendendo $f(k) = 2k$ e $f(n) = 2k + 1$ nei due casi);

La successione costante $\{0\}$ è sottosuccessione della successione $\{\cos(n\pi/4)\}$ (prendendo per esempio $f(n) = 8n + 2$). Quali sono i possibili limiti di sottosuccessioni di tale successione?

Le successioni divergenti, rispettivamente a $= +\infty$ e $-\infty$, $\{(2n)^{2n}\}$ e $\{-(2n+1)^{2n+1}\}$ sono sottosuccessioni della successione oscillante $\{(-n)^n\}$. Ne esistono sottosuccessioni convergenti?

Teorema. $a_n \to L \Longrightarrow a_{n_k} \to L\ \forall$ *sottosuccessione* $\{a_{n_k}\}$ *di* $\{a_n\}$.

DIMOSTRAZIONE Sia I intorno di L e m_0 t.c. $\forall n \geq m_0$ si ha $a_n \in I$. Dato che $\lim_k n_k = +\infty$, $\exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall k \geq m$ si ha $n_k \geq m_0$. Allora

$$a_{n_k} \in I \quad \forall k \geq m. \qquad \square$$

Corollario Importante. Se $\exists\ \{a_{n_k}\}$ e $\{a_{n'_k}\}$ due sottosuccessioni di $\{a_n\}$ tali che

$$a_{n_k} \to L \qquad a_{n'_k} \to L'$$

e $L \neq L'$, allora $\{a_n\}$ oscilla.

Esempio. Per dimostrare che $\{(-1)^n\}$ oscilla si può notare che $(-1)^{2n} = 1 \to 1$, e $(-1)^{2n+1} = -1 \to -1 \neq 1$.

NOMENCLATURA: il costruire una successione di una successione data $\{a_n\}$ si dice "estrarre una sottosuccessione dalla successione $\{a_n\}$".

Teorema. (di Bolzano-Weierstrass) *Da ogni successione limitata si estrae una sottosuccessione convergente.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo $a \le a_n \le b$ per ogni $n = 0, 1, \ldots$.

Usiamo un procedimento per induzione che ci permette ad ogni passo di ricondurci ad un intervallo di metà ampiezza del precedente. Definiamo

$$I_0 = [a, b], \qquad n_0 = 0.$$

Definiti I_k, n_k definiamo I_{k+1} e n_{k+1} come segue: denotiamo con $c_k = \min I_k$, $d_k = \max I_k$

• I_{k+1} è uno dei due intervalli $\left[c_k, \frac{c_k+d_k}{2}\right]$ e $\left[\frac{c_k+d_k}{2}, d_k\right]$ in cui cadono termini a_i per infiniti indici i. denotiamo gli estremi di questo intervallo con c_{k+1} e d_{k+1};

• $n_{k+1} = \min\{i : i > n_k,\ a_i \in I_{k+1}\}$ (il minimo indice i più grande di n_k tale che $a_i \in I_{k+1}$.

In questo modo abbiamo una successione di intervalli $I_k = [c_k, d_k]$. Questa successione è decrescente, nel senso che $I_{k+1} \subset I_k$. Questo significa che $\{c_k\}$ è una successione non decrescente e $\{d_k\}$ è una successione non crescente; inoltre, dato che ad ogni passo dimezziamo l'ampiezza dell'intervallo

$$d_k - c_k = \max I_k - \min I_k = 2^{-k}(b - a).$$

Abbiamo anche una successioni di indici $\{n_k\}$ tale che $a_{n_k} \in I_k$, ovvero

$$c_k \le a_{n_k} \le d_k.$$

Dato che $\{c_k\}$ e $\{d_k\}$ sono limitate e monotone, esse convergono. Chiamiamo c e d i loro limiti. Abbiamo

$$d - c = \lim_k (d_k - c_k) = \lim_k 2^{-k}(b - a) = 0,$$

ovvero $d = c$. Quindi possiamo usare il teorema dei due carabinieri, ottenendo che anche $\{a_{n_k}\}$ converge.

□

Corollario. *Da ogni successione si estrae una sottosuccessione che ammette limite.*

DIMOSTRAZIONE Se $\{a_n\}$ è limitata si applica il teorema sopra. Altrimenti la successione non è limitata superiormente o inferiormente. Supponiamo che non sia limitata superiormente. Allora definiamo $n_0 = 0$ e, per induzione,

$$n_{k+1} = \min\{i : i > n_k,\ a_i > k\}$$

(notare che questo insieme è non vuoto, altrimenti $\{a_n\}$ sarebbe limitata superiormente). La successione $\{a_{n_k}\}$ soddisfa $a_{n_k} > k$ e quindi ha limite $+\infty$.

Notazione. Una proprietà di una successione che è vera "da un certo indice in poi" si dice vera DEFINITIVAMENTE; ovvero: P_n è vera definitivamente se e solo se $\exists m$ tale che P_n è vera per ogni $n \geq m$.

Una proprietà di una successione che è vera "per infiniti indici" si dice vera FREQUENTEMENTE; equivalemntemente: P_n è vera frequentemente se e solo se $\forall m\ \exists n \geq m$ tale che P_n è vera.

SUCCESSIONI DI CAUCHY

La definizione di successione convergente prevede la conoscenza del limite L. Diamo ora una diversa definizione, in cui si richiede che 'da un certo punto in poi i valori della successione siano vicini tra loro'.

Definizione Una successione $\{a_n\}$ si dice una SUCCESSIONE DI CAUCHY se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m tale che per ogni $n, n' \geq m$ si ha $|a_n - a_{n'}| < \varepsilon$.
NOTA: equivalentemente si può dire che $\{a_n\}$ è di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m tale che per ogni $n \geq m$ si ha $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Infatti se è vera la prima definizione allora è vera a maggior ragione la seconda (prendendo $n' = m$). Se è vera la seconda, allora si ha $|a_n - a'_n| \leq |a_n - a_m| + |a_m - a_{n'}| < 2\varepsilon$ che implica la validità della prima.

Essere una successione di Cauchy è in verità equivalente alla convergenza.

Teorema. *$\{a_n\}$ è una successione di Cauchy se e solo se $\{a_n\}$ converge.*

DIMOSTRAZIONE Se $\{a_n\}$ converge (a L) allora per definizione fissato $\varepsilon > 0$ esite m tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ se $n \geq m$. Quindi se anche $n' \geq m$ si ha $|a_n - a'_n| \leq |a_n - L| + |L - a_{n'}| < 2\varepsilon$ e quindi vale la definizione di successione di Cauchy.

Supponiamo ora che $\{a_n\}$ sia successione di Cauchy. Notiamo per prima cosa che $\{a_n\}$ è limitata (stessa dimostrazione che per le successioni convergenti, con a_m invece che L). Se $\{a_n\}$ non converge, allora esistono due sottosuccessioni (convergenti) tali che $a_{n_k} \to L$ e $a_{n'_k} \to L'$ con $L \neq L'$. In particolare si deve avere $\lim_k (a_{n_k} - a_{n'_k}) = L - L' \neq 0$. Dato che $|a_{n_k} - a_{n'_k}| < \varepsilon$ per k grande abbastanza da avere $n_k, n'_k \geq m$ si ha un assurdo prendendo $\varepsilon < |L - L'|$.

$\square$