11 IL CALCOLO DEI LIMITI

Il calcolo di un limite spesso si ricondurrà a trattare separatamente limiti più semplici, su cui poi si faranno operazioni algebriche. Dato che uno o più di questi limiti possono essere $\pm\infty$, bisogna definire le operazioni algebriche (quando possibile) tra termini di $\overline{\mathbf{R}}$.

Definizione Sia $z \in \mathbb{R}$. Definiamo
$z + (+\infty) = +\infty + z = +\infty, \quad z + (-\infty) = -\infty + z = -\infty$
se $z \in (0, +\infty]$ allora $z \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot z = +\infty$
se $z \in [-\infty, 0)$ allora $z \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot z = -\infty$
(analogamente si può moltiplicare per $-\infty$ rispettando la regola dei segni)
$\dfrac{z}{+\infty} = \dfrac{z}{-\infty} = 0.$

NON È POSSIBILE DEFINIRE

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot \pm\infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

Inoltre non è possibile definire neanche

$$\frac{L}{0} \text{ per alcun } L \in [-\infty, +\infty].$$

Queste vengono dette FORME INDETERMINATE.

Teorema. (PROPRIETÀ DEI LIMITI) *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni non oscillanti (dunque: convergenti o divergenti). Allora, se non si hanno forme indeterminate, si ha*

$$\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n \tag{1}$$

$$\lim_n (a_n \cdot b_n) = (\lim_n a_n) \cdot (\lim_n b_n) \tag{2}$$

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n} \tag{3}$$

(in (3) *supponiamo inoltre* $\lim_n b_n \neq 0$*).*

Alla dimostrazione premettiamo alcuni risultati, che sono importanti per il calcolo di alcuni limiti che non rientrano nel teorema precedente.

Teorema. (LIMITATEZZA) $\{a_n\}$ *convergente* $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ *limitata.*

DIMOSTRAZIONE Sia $L = \lim_n a_n$. Sia $m : \forall n \geq m \quad |a_n - L| < 1$. Allora $\forall n \geq m \quad |a_n| \leq |L| + 1$. Dunque $\forall n$

$|a_n| \leq \max\{|L| + 1,\ |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{m-1}|\} < +\infty$. □

Proposizione 1. $\{a_n\}$ *limitata,* $\{b_n\}$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\{a_n + b_n\}$ *diverge.*

DIMOSTRAZIONE Sia $s > 0$ tale che $|a_n| \leq s\ \forall n$. Fissiamo $M > 0$, e sia $m \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|b_n| \geq M + s$. Allora $\forall n \geq m$ si ha

$|a_n + b_n| \geq |b_n| - |a_n| \geq M$. □

ESEMPIO: La successione $\left\{n + (-1)^n \dfrac{2n}{n+1} \sin n\right\}$ diverge.

Proposizione 2. $\{a_n\}$ *limitata,* $\{b_n\}$ *infinitesima* $\Longrightarrow$ $\{a_n b_n\}$ *infinitesima.*

DIMOSTRAZIONE Sia $\varepsilon > 0$. Sia $s > 0$ tale che $|a_n| \leq s\ \forall n$. Sia $m \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|b_n| \leq \varepsilon/s$. Allora $\forall n \geq m$ si ha

$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq \varepsilon$ □

ESEMPIO: La successione $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\sin(n!) - 7\cos(42n!)\Big)\right\}$ è infinitesima.

Proposizione 3. *Somma di successioni infinitesime è infinitesima*

DIMOSTRAZIONE Esercizio □

Proviamo il teorema sulle proprietà dei limiti.

DIMOSTRAZIONE Sia $a_n \to L$ e $b_n \to L'$ $(L, L' \in \overline{\mathbb{R}})$

(1): Ci sono due casi: i) le due successioni convergono, ii) una diverge (tutte e due no: si avrebbe una forma indeterminata $+\infty - \infty$).

Nel caso i) $\{a_n - L\}$, $\{b_n - L'\}$ sono infinitesime $\Longrightarrow$ $\{a_n + b_n - L - L'\}$ infinitesima (Prop. 3) $\Longrightarrow a_n + b_n \to L + L'$.

Nel caso ii) basta applicare il teorema di limitatezza e la Prop. 1

(2): ci sono due casi: i) le due successioni convergono, ii) $L' = \pm\infty$ e $L \neq 0$ (non può essere $L = 0$: si avrebbe una forma indeterminata $0 \cdot \pm\infty$).

Nel caso i) basta scrivere

$a_n b_n - LL' = (a_n - L)b_n + L(b_n - L')$

e usare le Prop. 2 e 3.

Nel caso ii) dato che $L \neq 0$ $\exists r > 0$ t.c. $I = \{z \in \mathbb{R} : \ |z| \geq r\}$ è un intorno di L. Quindi $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c $\forall n \geq m_0$ $a_n \in I$, ovvero $|a_n| \geq r$. Fissiamo ora $M > 0$; dato che $b_n \to \pm\infty$ $\exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|b_n| \geq M/r$. Allora

$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \geq M$.

(3): basta vedere che $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{L'}$ (e poi ci si riconduce al caso (2)). Se $L' = 0$ o $L' = \pm\infty$ basta applicare la definizione (farlo per esercizio). Rimane il caso $L' \neq 0$, $L' \in \mathbb{R}$. Notiamo che $I = \{z \in \mathbb{R} : \ |z| \geq L'/2\}$ è un intorno di L'. Quindi $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c $\forall n \geq m_0 \quad b_n \in I$, ovvero $|b_n| \geq L'/2$. Se $n \geq m_0$ si ha allora

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L'}| = \frac{|b_n - L'|}{|b_n|\,|L'|} \leq \frac{2}{L'^2}|b_n - L'|. \quad \square$$

FORME INDETERMINATE: vediamo per esempio perche non si può dare un senso alla forma $(+\infty) + (-\infty)$:

i) consideriamo $a_n = n$ e $b_n = 1 - n$. Allora $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, e $a_n + b_n = 1 \to 1$;

ii) consideriamo $a_n = 2n$ e $b_n = -n$. Allora $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, e $a_n + b_n = n \to +\infty$;

iii) consideriamo $a_n = n$ e $b_n = -n + (-1)^n$. Allora $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, e $a_n + b_n = (-1)^n$ è oscillante.

ESERCIZIO: costruire due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n \to +\infty$, $b_n \to 0$ e $a_n \cdot b_n \to L \in \mathbb{R}$ (oppure $a_n \cdot b_n \to \pm\infty$, oppure $a_n \cdot b_n$ oscilla).

$\square$

NON SI PUÒ DEFINIRE $\frac{1}{0} = \pm\infty$ (infatti se $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ allora $\frac{1}{a_n} = n \to +\infty$; se $a_n = -\frac{1}{n} \to 0$ allora $\frac{1}{a_n} = -n \to -\infty$; se $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ allora $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ non diverge ad alcun infinito con segno). Ciononostante, se $a_n \to 0$ e $a_n > 0$ allora $\frac{1}{a_n} \to +\infty$, mentre se $a_n < 0$ allora $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.

LIMITI DI QUOZIENTI DI POLINOMI

Un esempio importante di applicazione del teorema sul calcolo dei limiti è dato dal calcolo di
$$\lim_n \frac{a_s n^s + a_{s-1} n^{s-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_r n^r + b_{r-1} n^{r-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$
dove $r, s > 0$ sono numeri naturali e $a_s \neq 0$, $b_r \neq 0$.

Conviene procedere come segue. Per eliminare eventuali forme indeterminate mettiamo in evidenza le potenze di n di grado massimo. Il limite si scrive

$$\lim_n \frac{n^s \Big(a_s + a_{s-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{n^{s-1}} + \frac{a_0}{n^s}\Big)}{n^r \Big(b_r + b_{r-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{b_1}{n^{r-1}} + \frac{b_0}{n^r}\Big)} = \lim_n n^{s-r} \frac{\Big(a_s + a_{s-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{n^{s-1}} + \frac{a_0}{n^s}\Big)}{\Big(b_r + b_{r-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{b_1}{n^{r-1}} + \frac{b_0}{n^r}\Big)}.$$

Ora, si ha, per ogni $k \geq 1$ e per ogni costante c

$$\lim_n \frac{c}{n^k} = \lim_n c\,\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n} = c\,\lim_n \frac{1}{n}\cdots\lim_n \frac{1}{n} = c\cdot 0\cdots 0 = 0$$

(abbiamo usato più volte il teorema sul prodotto dei limiti con la successione $1/n$, che sappiamo essere infinitesima; naturalmente ci sono molti altri modi per ottenere questo facile limite), dunque

$$\lim_n\Big(a_s + a_{s-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{n^{s-1}} + \frac{a_0}{n^s}\Big) = a_s + 0 + \cdots + 0 = a_s$$

(abbiamo usato il teorema sulla somma dei limiti) e analogamente

$$\lim_n\Big(b_r + b_{r-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{b_1}{n^{r-1}} + \frac{b_0}{n^r}\Big) = b_s.$$

Ci sono tre casi possibili:

(1) $r = s$, ovvero quando i due polinomi hanno lo stesso grado. Il limite diventa

$$\lim_n \frac{\Big(a_s + a_{s-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{n^{s-1}} + \frac{a_0}{n^s}\Big)}{\Big(b_s + b_{s-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{b_1}{n^{s-1}} + \frac{b_0}{n^s}\Big)} = \frac{a_s}{b_s}$$

(per il teorema sul quoziente dei limiti abbiamo). Dunque: **il limite per $n \to +\infty$ di un quoziente di polinomi dello stesso grado è il quoziente dei coefficienti dei monomi di grado massimo**.

(2) $r > s$, ovvero il denominatore ha grado maggiore del numeratore. Il limite allora diventa

$$\lim_n \frac{1}{n^{r-s}} \frac{\Big(a_s + a_{s-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{n^{s-1}} + \frac{a_0}{n^s}\Big)}{\Big(b_r + b_{r-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{b_1}{n^{r-1}} + \frac{b_0}{n^r}\Big)} = \lim_n \frac{1}{n^{r-s}}\frac{a_s}{b_r} = 0$$

(abbiamo usato il teorema sul prodotto dei limiti e che $\lim_n \frac{1}{n^{r-s}} = 0$).

(3) $r < s$, ovvero il denominatore ha grado maggiore del numeratore. Il limite allora diventa

$$\lim_n n^{s-r} \frac{\Big(a_s + a_{s-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{n^{s-1}} + \frac{a_0}{n^s}\Big)}{\Big(b_r + b_{r-1}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{b_1}{n^{r-1}} + \frac{b_0}{n^r}\Big)} = \lim_n n^{s-r}\frac{a_s}{b_r} = +\infty\cdot\frac{a_s}{b_r},$$

(abbiamo usato il teorema sul prodotto dei limiti), che è dunque $+\infty$ (se $\frac{a_s}{b_r} > 0$), o $-\infty$ (se $\frac{a_s}{b_r} < 0$).

12 CONFRONTO TRA SUCCESSIONI DIVERGENTI

Il calcolo del limite di quoziente di polinomi ci suggerisce che, per semplificare quel calcolo, possiamo tenere in considerazione solo i termini di grado massimo, e quindi possiamo "trascurare" gli altri. Questo è vero perchè

$$\lim_n \frac{n^r}{n^s} = 0$$

se $s > r$. Vogliamo ora vedere che simili confronti si possono fare anche tra funzioni non di tipo "polinomiale".

(1) Sia $a > 1$. Allora $\lim_n \dfrac{a^n}{n^\beta} = +\infty$ per ogni $\beta > 0$.

Dimostriamolo solo per $a = 4$ e $\beta = 1$. Si ha (ricordando che $2^n \geq n$ per ogni n)

$$4^n = 2^n \cdot 2^n \geq n \cdot n = n^2,$$

per cui

$$\frac{4^n}{n} \geq n$$

e il limite risulta $+\infty$ (basta applicare la definizione).

(2) Sia $a > 1$. Allora $\lim_n \dfrac{n^\beta}{\log_a n} = +\infty$ per ogni $\beta > 0$.

Lo mostriamo solo per $\beta = 1$. Per definizione, dobbiamo mostrare che fissato $M > 0$ allora

$$\frac{n}{\log_a n} \geq M,$$

o equivalentemente $n \geq M \log_a n$, per n 'sufficientemente grande'. Prendendo l'esponenziale di entambi i termini, si ha equivalentemente

$$a^n \geq a^M a^{\log_a n} = a^M n,$$

ovvero

$$\frac{a^n}{n} \geq a^M.$$

Ma questa disuguaglianza è vera per n 'sufficientemente grande' perche' abbiamo visto sopra che $\dfrac{a^n}{n} \to +\infty$.

(3) Sia $a > 1$. Allora $\lim_n \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Per dimostrarlo notiamo che

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a \cdot a}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}.$$

Sia $k \geq a$ un numero naturale (che terremo fisso). Allora

$$\frac{a^n}{n!} = \Big(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k-1}\Big) \cdot \Big(\frac{a}{k} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}\Big)$$

Il numero $C = \Big(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k-1}\Big)$ è una costante che non dipende da n. Per i numeri seguenti vale la stima

$$\frac{a}{k} \leq 1, \qquad \frac{a}{k+1} \leq 1, \qquad , \ldots , \frac{a}{n-1} \leq 1.$$

Quindi, se definiamo

$$a_n = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k-1} \cdot \frac{a}{k} \cdots \frac{a}{n-1},$$

questa è una successione limitata (da C) e si ha

$$\frac{a^n}{n!} = a_n \cdot \frac{a}{n}$$

Dato che $a/n \to 0$ anche $a^n/n! \to 0$ (successione limitata per successione infinitesima).

(4) $\lim_n \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

Per dimostrarlo notiamo che

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdots n \cdot n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n}$$

e che

$$\frac{n}{2} \geq 1, \frac{n}{3} \geq 1, \qquad \ldots \frac{n}{n-1} \geq 1, \qquad \frac{n}{n} \geq 1.$$

Quindi

$$\frac{n^n}{n!} \geq n$$

e $n^n/n! \to +\infty$ (basta applicare la definizione).

Esempi. Calcoliamo

$$\lim_n \Big(\frac{3^n - n^2}{2^n + n^3} - \frac{3^n + n^2}{2^n - n^3}\Big).$$

Notiamo che

$$\frac{3^n - n^2}{2^n + n^3} = \frac{3^n\Big(1 - \frac{n^2}{3^n}\Big)}{2^n\Big(1 - \frac{n^3}{2^n}\Big)}.$$

Dato che $\lim_n \frac{n^2}{3^n} = \lim_n \frac{n^3}{2^n} = 0$, si ha

$$\lim_n \frac{3^n - n^2}{2^n + n^3} = \lim_n \Big(\frac{3}{2}\Big)^n = +\infty.$$

Analogamente si calcola il secondo termine; dunque il limite è nella forma $+\infty - \infty$. Razionalizzando la frazione si ottiene il limite

$$\lim_n \frac{(3^n - n^2)(2^n - n^3) - (3^n + n^2)(2^n + n^3)}{(2^n + n^3)(2^n - n^3)} =$$

$$\lim_n \frac{-2n^2 2^n - 2n^3 3^n}{4^n - n^6} = -2 \lim_n \frac{n^3 3^n \Big(1 + \frac{2^n}{n 3^n}\Big)}{4^n \Big(1 - \frac{n^6}{4^n}\Big)} = -2 \lim_n \frac{n^3}{\Big(\frac{4}{3}\Big)^n} = 0.$$

NOTAZIONE

Per successioni positive, useremo la notazione $a_n << b_n$ (o $b_n >> a_n$) per intendere che

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ (equivalentemente } \lim_n \frac{b_n}{a_n} = +\infty \text{).}$$

In questo caso diremo che "a_n è molto più piccola di b_n" (o "b_n è molto più grande di a_n").

In particolare $a_n << 1$ significa che a_n è infinitesima, e $1 << b_n$ significa che b_n diverge positivamente.

Notiamo che questa relazione è transitiva, ovvero

$$a_n << b_n \text{ e } b_n << c_n \Longrightarrow a_n << c_n.$$

In questo caso si ha infatti

$$\lim_n \frac{a_n}{c_n} = \lim_n \frac{a_n}{b_n} \cdot \lim_n \frac{b_n}{c_n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Le osservazioni fatte fino ad ora si possono tradurre in una serie di "diseguaglianze": se $a > 1$ e $\beta > 0$

$$1 << \log_a n << n^\beta << a^n << n! << n^n.$$

Inoltre $n^\alpha << n^\beta$ se $\alpha < \beta$, e $a^n << b^n$ se $a < b$.