7 LE PROPRIETÀ DEI NUMERI NATURALI . SUCCESSIONI

Abbiamo usato alcune proprietà dei numeri naturali che conviene mettere in evidenza. Per prima cosa notiamo che $\mathbb{N}$ gode delle due proprietà

(i) $0 \in \mathbb{N}$;

(ii) se $n \in \mathbb{N}$ allora $n+1 \in \mathbb{N}$. (Questa proprietà si esprime dicendo che $\mathbb{N}$ è INDUTTIVO).

Queste due proprietà non sono caratteristica esclusiva di $\mathbb{N}$ (anche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ce l'hanno), ma $\mathbb{N}$ *è il più piccolo insieme che soddisfa queste due proprietà*, ovvero $\mathbb{N}$ *è il più piccolo insieme induttivo che contiene lo* 0.

Come conseguenza di questa caratterizzazione abbiamo che *i numeri naturali non costituiscono un insieme superiormente limitato di* $\mathbb{R}$.

Equivalentemente: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ n > x$.

DIMOSTRAZIONE (Per assurdo) Se $\mathbb{N}$ è superiormente limitato $\Longrightarrow \exists \sup \mathbb{N} = M$. Allora $M - 1 < \sup \mathbb{N} \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > M - 1$ (per definizione di sup) $\Longrightarrow M < n + 1 \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ è induttivo). Assurdo. □

□

Teorema (Principio di Induzione). *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia p_n una proposizione. Supponiamo che valgano:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ \ p_n \Longrightarrow p_{n+1}$

(ii) p_0 *è vera.*

Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ p_n è vera.

DIMOSTRAZIONE Consideriamo $A = \{n \in \mathbb{N} : p_n \text{ è vera}\}$.
(i) $\Longrightarrow$ A è induttivo. (ii) $\Longrightarrow 0 \in A$. Quindi $\mathbb{N} \subseteq A$. Dato che $A \subseteq \mathbb{N}$ si ha $\mathbb{N} = A$. □

Esempi.

(1) ("definizione per induzione": il principio di induzione può servire a rendere rigorose delle definizioni che altrimenti sono considerate chiare dal contesto, e in una scrittura non rigorosa vengono completate con dei puntini di sospensione) Per esempio, se $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ si definisce: $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$. (Questa è una scrittura rigorosa per "$a^n = a \cdot a \cdots a$ n-volte"). In questo caso la nostra p_n è "il numero a^n è definito".

(2) Il FATTORIALE DI n (o n FATTORIALE):

$$0! = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ (n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Per $n \geq 1$ il fattoriale è il prodotto di tutti i naturali positivi fino ad n, ovvero (p.es. se $n \geq 3$):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Quindi: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$,...

(3) ("dimostrazione per induzione") si usa il principio di induzione per verificare che una certa proposizione è vera per ogni numero naturale. Per esempio p_n = "$2^n \geq n+1$". Verifichiamo i): $1 = 2^0 \geq 0+1$ (vera). Verifichiamo (ii): $2^n > n \Longrightarrow 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2 \geq n+2 = (n+1)+1$. Abbiamo quindi dimostrato che $\forall n \in \mathbb{N}\ 2^n \geq n+1$.

VARIANTI DEL PRINCIPIO DI INDUZIONE:

(1) Se p_n è definita per $n = k, k+1, \dots$ ($k \in \mathbb{Z}$ fissato; p.es. $k = -2$), e sostituiamo a ii) l'ipotesi "p_k è vera" allora la tesi diventa: "p_n è vera $\forall n \in \mathbb{Z}\ n \geq k$".

(2) Al posto di (i) si può sostituire l'ipotesi "$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ p_{n-1} \Longrightarrow p_n$"

(3) Al posto di (i) si può sostituire l'ipotesi "$\forall n \in \mathbb{N}(p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_n) \Longrightarrow p_{n+1}$",
ovvero: se sono vere $p_0, p_1, \dots, p_n$ allora è vera anche p_{n+1}.

Esercizio. Provare questa ultima forma di principio di induzione (in questo caso $A = \{n \in \mathbb{N} : p_j$ è vera per ogni $j \leq n\}$).

Successioni

Definizione Una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$ o un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ si dice una SUCCESSIONE. Se il codominio è $\mathbb{R}$ allora si dice che la successione è *reale*.

NOTAZIONE: si usa in generale la notazione $n \mapsto a_n$ in luogo di $n \mapsto f(n)$, e la successione si denota con $\{a_n\}$.

NOTAZIONE: si possono avere anche successioni definite su sottoinsiemi di numeri interi, cambiando un po' le definizioni. È chiaro che nulla cambia in sostanza se la successione, invece che su $\mathbb{N}$, è per esempio definita su $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq -3\}$, ecc.

Le successioni possono essere definite con una legge come le funzioni, o (usando la struttura di $\mathbb{N}$) per induzione (si dice anche PER RICORRENZA), come per esempio $a_n = n!$ definita come sopra.

Esempio. I NUMERI DI FIBONACCI sono definiti da $a_0 = a_1 = 1$, e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, ovvero $a_2 = a_1 + a_0 = 2$, $a_3 = a_2 + a_1 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, etc. (la definizione usa il principio di induzione nella 'variante' 3 qui sopra).

8 SOMMATORIE. BINOMIO DI NEWTON

Se abbiamo una successione $a_0, a_1, \ldots$ spesso capita di farne delle somme e poi manipolarle. Per esempio, a_n può essere il punteggio $(0, 1$ o $3)$ conseguito da una certa squadra di calcio nella giornata n del campionato, allora $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ è il suo punteggio alla giornata n-ima. Alla giornata successiva aggiungeremo a_{n+1} per ottenere il nuovo punteggio, ovvero $s_{n+1} = a_1 + \ldots + a_{n+1}$ si otterrà come $s_n + a_{n+1}$, oppure potremo vedere s_n come il punteggio complessivo del girone di andata più il punteggio ottenuto nelle partite del girone di ritorno fino alla n-ima, etc.

Per manipolare rigorosamente le somme, introdurremo la notazione seguente.

Definizione Il simbolo di SOMMA (o SOMMATORIA): data una successione $\{a_n\}$ definiamo:

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0, \qquad \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

La def. di $\sum_{k=0}^{n} a_k$ (che si legge "sommatoria (o somma) degli a_k per k che va da 0 a n) è una precisazione rigorosa di

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

IMPORTANTE: i) L'indice k è *muto*: ovvero non importa se gli si cambia di nome:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n} a_k \ (= a_0 + a_1 + \ldots + a_n);$$

ii) Se si hanno solo un numero finito di termini $a_0, \ldots, a_m$ le definizoni si adattano per $n \leq m$;
iii) Si definisce analogamente il simbolo

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \ (= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n);$$

iv) Valgono le proprietà $(m \leq q \leq n)$

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k\,; \qquad \sum_{k=0}^{n} c\, a_k = c \sum_{k=0}^{n} a_k\,;$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=p-n}^{p-m} a_{p-j}\,;$$

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0; \ \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k.$$

Esempio. Sia $a > 0$. Allora definiamo la successione

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n,$$

ovvero ottenuta come sopra con $a_k = a^k$.

Notiamo che se $a = 1$ allora $s_n = n + 1$, mentre se $a \neq 1$ si ha

$$s_n = \frac{(1-a)}{(1-a)} \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a} \Big(\sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} \Big)$$

$$= \frac{1}{1-a} \Big(\sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k \Big) = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}.$$

Esercizio. Tradurre i calcoli nell'esempio qui sopra nella notazione "con i puntini", sostituendo $\sum_{k=0}^{n} a^k$ con $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n$, ecc.

I COEFFICIENTI BINOMIALI si definiscono per $n, k \in \mathbb{N}$ come

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n \end{cases}$$

(in generale noi li useremo con $0 \leq k \leq n$)

Notare in particolare che $\dbinom{n}{n} = \dbinom{n}{0} = 1$ e $\dbinom{n}{n-1} = \dbinom{n}{1} = n$, e che si ha sempre

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ per $0 \leq k \leq n$ ha anche un'interpretazione combinatoria: è il numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi (Verificate che questo è vero per $k = 0, 1$ e $k = n, n-1$).

La Formula del Binomio di Newton

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (convenendo in questa scrittura che $0^0 = 1$) si ha

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ovvero (in termini più "imprecisi"):

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

ALTRA SCRITTURA: $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Notare che si ha

$$(1+x)^n = 1 + nx + \cdots + nx^{n-1} + x^n.$$

Dimostrazione (la dimostrazione, che non è di per se importante per il nostro corso, è comunque un buon esercizio per applicare il principio di induzione e il formalismo delle sommatorie)

1) $\forall n, k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(si prova per induzione su k). Basta verificare che

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!\,(k+1)}{k!\,(k+1)\,(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)} \\ &= \frac{n!\,((k+1)+(n-k))}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

2) Proviamo la formula nella seconda forma: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(p_n) \qquad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

p_0 è vera:

$$1 = (1+x)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k = \binom{0}{0} x^0 = 1 \cdot x^0 = 1.$$

Se p_n è vera, allora

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n &= (1+x)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k
\end{aligned}$$

ovvero p_{n+1} è vera. □

NOTA: dalla formula provata si ottiene subito la formula "prima versione": se $a \neq 0$ si scrive $(a+b)^n = a^n \cdot (1+\frac{b}{a})^n$. □