

5 ALCUNI ESEMPI

1. Troviamo, se esistono, sup/inf, max/min dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}.$$

A è composto dai numeri

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Vediamo subito che $1 \in A$ e $\frac{1}{n} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Questa è la definizione che ci dice che $\max A = 1$ (e quindi anche $\sup A = 1$).

Per quanto riguarda il minimo e l'estremo inferiore, vediamo che per ' n grande' i numeri $1/n$ sono 'piccoli'. Questo ci suggerisce che 0 sia l'estremo inferiore. Questo è dimostrato se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < \varepsilon$$

(fermatevi a interpretare questa formula!) ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Se cio' non fosse esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che

$$n < \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ovvero $\mathbb{N}$ sarebbe superiormente limitato (cosa che non è).

Chiaramente 0 non appartiene all'insieme A e quindi A non ammette minimo.

2. Troviamo, se esistono, sup/inf, max/min dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Notiamo che $(-1)^n = 1$ se n è pari e $(-1)^n = -1$ se n è dispari. A è composto dai numeri

$$\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \dots$$

Quindi A si può scrivere come $B \cup C$, dove

$$B = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \right\}$$

e

$$C = \left\{ -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \dots \right\}$$

Come nell'esempio precedente si vede che $\max B = 1/3$ e $\min C = -1/4$. È facile vedere che $\max A = \max B = 1/3$ e $\min A = \min C = -1/4$. Infatti, per esempio, $\sup A = \sup(B \cup C) = \sup B$, dato che gli elementi di C sono tutti negativi.

3. Troviamo, se esistono, $\sup/\inf$, $\max/\min$ dell'insieme

$$A = \left\{ \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

In questo caso (notiamo che, sfruttando la periodicità di $\sin x$ basta calcolare solo i primi 6 valori)

$$A = \left\{ \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) : n = 1, \dots, 6 \right\} = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

In questo caso, banalmente

$$\max A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \min A = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Altri concetti sugli insiemi.

Per descrivere alcune proprietà sulla struttura degli insiemi introduciamo alcune ulteriori notazioni.

Diremo che x è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per l'insieme A se 'vicino a lui sono presenti (infiniti) punti di A diversi da lui stesso', ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto $a \in A$, $a \neq x$, con $|x - a| < \varepsilon$. Negli esempi 1 e 2 sopra 0 è (l'unico) punto di accumulazione per A .

Se un punto $a \in A$ non è di accumulazione per A (ovvero vicino ad a non ci sono altri punti di A) allora a si dice un PUNTO ISOLATO. Se un insieme A è composto solo da punti isolati si dice DISCRETO. Questo è il caso di tutti gli esempi sopra.

L'insieme costituito da A e da tutti i suoi punti di accumulazione (se esistono) si chiama CHIUSURA di A e si denota con $\overline{A}$. Negli esempi 1 e 2 sopra $\overline{A} = A \cup \{0\}$. Se $A = (a, b)$ è un intervallo limitato, la sua chiusura è l'intervallo chiuso $[a, b]$ (come è giusto che sia).

Se un insieme coincide con la sua chiusura, ovvero contiene tutti i suoi punti di accumulazione, allora l'insieme si dice CHIUSO. Se il suo complementare è chiuso allora si dice APERTO. Questa notazione è coerente con quella introdotta per gli intervalli. Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono chiusi, discreti e non hanno punti di accumulazione.

Se $A \subset B$ e la chiusura di A contiene B allora diremo che A è denso in B . La chiusura di $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{R}$ (e quindi $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$) L'insieme

$$A = \{\cos n : n \in \mathbb{N}\}$$

è denso in $[-1, 1]$ (questo fatto non è immediato, pensate al significato di $\cos n$ come la prima componente di un punto sulla circonferenza trigonometrica).

6 ESTREMI DI FUNZIONI

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di dominio X . Per i massimi/minimi, sup/inf dell'immagine di una funzione si adotta una nomenclatura particolare.

Il $\sup\{f(x) : x \in X\}$ viene detto l'ESTREMO SUPERIORE DI f (su X) e il $\max\{f(x) : x \in X\}$ (se esiste) viene chiamato il MASSIMO DI f (su X). Questi numeri vengono denotati con

$$\max_X f, \quad \sup_X f,$$

rispettivamente (si può omettere X se è chiaro dal contesto; in particolare se non viene specificato in partenza, ovvero se è il dominio 'naturale' della funzione f).

NOTA:

(1) $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante per $\{f(x) : x \in X\}$ se

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in X.$$

In tal caso si dice che f è LIMITATA SUPERIORMENTE.

(2) esiste il $\max_X f$ se e solo se

$$\text{esiste } x \in X \text{ tale che } f(x) \geq f(y) \quad \forall y \in X$$

In tal caso $f(x) = \max_X f$.

NOTA: le definizioni sopra si possono tradurre come proprietà del *grafico* di f ; M è maggiorante se e solo se il grafico di f sta tutto al di sotto della retta orizzontale $y = M$, e $y = \sup_X f$ è la più bassa di queste rette. In questo modo, se sono note proprietà del grafico di f , si semplifica il calcolo di max e sup.

Ovviamente, vengono date in modo analogo anche le definizioni di MINIMO ed ESTREMO INFERIORE di una funzione.

Esempi. (si risolvono subito esaminando il grafico di funzioni note)

1. $f(x) = \arctan x$, $X = \mathbb{R}$. Allora

$$\sup \arctan = \frac{\pi}{2}, \quad \inf \arctan = -\frac{\pi}{2},$$

e non esistono max e min.

2. $f(x) = \sin x$.

Se $X = \mathbb{R}$ allora $\max \sin = 1$, $\min \sin = -1$.

Se $X = \{0 \leq x < \pi\}$ allora $\max_X \sin = 1$, $\min_X \sin = 0$.

Se $X = \{0 < x < \pi\}$ allora $\max_X \sin = 1$, $\inf_X \sin = 0$ ma non esiste $\min_X \sin = 0$ (ovvero $\sin$ non ha minimo in X).

3. $f(x) = x^2 - 2$.

Se $X = \mathbb{R}$ allora $\min f = -2$ e $\sup f = +\infty$

Se $X = \{1 \leq x \leq 2\}$ allora $\min f = -1$ e $\max f = 2$

Se $X = \{-1 \leq x \leq 2\}$ allora $\min f = -2$ e $\max f = 2$

4. $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ e $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. Allora (ci si riconduce al grafico di $\frac{1}{x}$ scrivendo $f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$) $\min f = \frac{2}{3}$, $\sup f = 1$ ma non esiste il $\max f$.

5. $\sup e^x = +\infty$, $\inf x^3 = -\infty$, ecc.

Funzioni monotone

(X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$; monotono si pronuncia con l'accento sulla penultima o)

Definizione Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice (monotona) NON DECRESCENTE se mantiene la relazione d'ordine $\leq$, ovvero se

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

Esempi. x , e^x , $\log x$, x^3 , ogni funzione costante.

Definizione Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice (monotona) NON CRESCENTE se inverte la relazione d'ordine $\leq$, ovvero se

$$x \leq y \implies f(y) \leq f(x).$$

Esempi. L'opposto $-f$ di ogni funzione non decrescente, ogni funzione costante, ecc.

Definizione Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice (monotona) (STRETTAMENTE) CRESCENTE se mantiene la relazione d'ordine $<$, ovvero se

$$x < y \implies f(x) < f(y).$$

Esempi. x , e^x , $\log x$, x^3 . Non è strettamente crescente ogni funzione costante, ne' la parte positiva (si veda più avanti per la sua definizione).

Definizione Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice (monotona) (STRETTAMENTE) DECRESCENTE se inverte la relazione d'ordine $<$, ovvero se

$$x < y \implies f(y) < f(x).$$

Una funzione si dice semplicemente MONOTONA se soddisfa una delle quattro definizioni precedenti (STRETTAMENTE MONOTONA se è strettamente crescente o strettamente decrescente).

DOMANDA: come si esprime il fatto che una funzione non è monotona?

Definizione Sia A un sottoinsieme del dominio di f . Una funzione f si dice NON DECRESCENTE (strettamente crescente, ecc.) SU A se la restrizione di f ad A è non decrescente (strettamente crescente, ecc.), ovvero

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

per ogni $x, y \in A$.

Esempio. x^2 è strettamente crescente su $[0, +\infty)$, strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$, ma non è monotona su $(-1, 1)$.

NOTA IMPORTANTE (monotonia e calcolo degli estremi di una funzione): si userà spesso il fatto seguente, che ci dice che per una funzione monotona su un intervallo il calcolo di massimi/minimi, sup/inf è particolarmente semplice:

- (1) se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è non decrescente allora $\min f = f(a)$ e $\max f = f(b)$;
- (2) se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente allora non esistono né $\min f$ né $\max f$.

Siete invitati a interpretare questa osservazione disegnando dei grafici di funzioni monotone.

Esercizio. Estendere questa osservazione a intervalli semi-aperti $(a, b]$ e $[a, b)$ e a funzioni non crescenti/strettamente decrescenti.

L'osservazione (1) è immediata: dato che $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ per ogni $x \in [a, b]$ per la monotonia di f , $f(a)$ è il minimo e $f(b)$ è il massimo. Per l'osservazione (2) possiamo ragionare per assurdo, e supporre per esempio che esista un punto x_m in cui f ha minimo. Dato che $f(x) < f(x_m)$ per ogni $x \in (a, x_m)$ si arriva ad una contraddizione.

Esempio. Esistono massimo e minimo di $x^3 + e^x + \log x$ nell'intervallo $I = (1, 2]$? Basta notare che la funzione è strettamente crescente. Quindi il minimo non esiste (perché 1 non appartiene a I) mentre il massimo è la funzione calcolata in 2, ovvero $2^3 + e^2 + \log 2 = 8 + e^2 + \log 2$.

NOTA: Una funzione è non-decrescente se e solo se

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$; una funzione è strettamente crescente se e solo se

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$.

In questo modo è possibile esprimere una proprietà *qualitativa* di una funzione tramite proprietà *quantitativa* di un oggetto, il cosiddetto RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

legato alla funzione di partenza.

Alcune funzioni utili

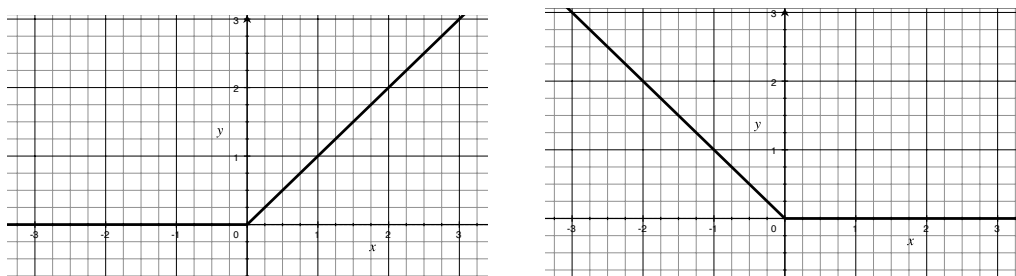
La PARTE POSITIVA x^+ definita da

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La PARTE NEGATIVA x^- definita da

$$x^- = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

I grafici di queste funzioni sono



Le funzioni *parte positiva* e *parte negativa*

Notiamo che $|x| = x^+ + x^-$ e $x = x^+ - x^-$.

Esempio. La parte positiva è una funzione non decrescente ma non è strettamente crescente. Analogamente, la parte negativa è una funzione non crescente ma non è strettamente decrescente. $|x|$ è strettamente crescente su $[0, +\infty)$ e strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$. $|x|$ non è monotona su $(-2, 2)$.