

3 GRAFICI DI FUNZIONI

Particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che noi studieremo sono i GRAFICI DI FUNZIONI. Il grafico di una funzione f (se non è specificato il dominio di definizione) è dato da

$$\{(x, y) : x \in \text{dom } f, y = f(x)\}.$$

L'immagine di una funzione f si può interpretare come l'insieme di tutti gli y per cui la retta orizzontale passante per y incontra il grafico di f .

Sapere tradurre le proprietà di una funzione in una particolare forma del grafico sarà una parte importante del corso, come viceversa sapere leggere da un grafico le caratteristiche di una funzione. In questo corso si suppongono noti i grafici delle funzioni elementari: le potenze x^m con $m \in \mathbb{Z}$, le funzioni esponenziali a^x e logaritmiche $\log_a x$ (con $a > 0$ e $a \neq 1$), le funzioni trigonometriche principali $\sin$, $\cos$, $\tan$, ecc. Dalla conoscenza dei grafici di queste funzioni si possono facilmente dedurre i grafici di altre funzioni, e quindi le proprietà di queste ultime.

Operazioni sui grafici

Operazioni algebriche sulle funzioni corrispondono ad operazioni geometriche sui grafici; ne facciamo un breve elenco, prendendo come punto di partenza la funzione f il cui grafico è quello disegnato qui sotto

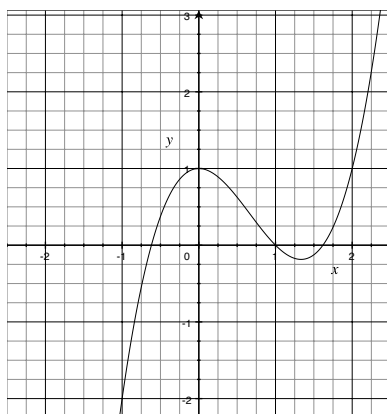


Figura 1: La funzione f

MOLTIPLICAZIONE PER UNA COSTANTE POSITIVA. Il grafico della funzione $g(x) = c f(x)$, dove c è una costante strettamente positiva si ottiene ‘dilatando’ (se $c > 1$) o ‘contraendo’ il grafico (se $c < 1$) di f rispetto all’asse delle x . Nella Figura 2 il grafico di f (tratteggiato) è confrontato con quello di $2f$ e $\frac{1}{2}f$.

GRAFICO DELL’OPPOSTO. Il grafico della funzione $g(x) = -f(x)$ si ottiene “ribaltando” il grafico di f rispetto all’asse delle x . Infatti, se (x, y) appartiene al grafico di f allora il punto $(x, -y)$ (simmetrico di (x, y) rispetto all’asse x) appartiene al grafico di $-f$. Nella Figura 3 seguente il grafico di f (tratteggiato) è confrontato con quello di $-f$.

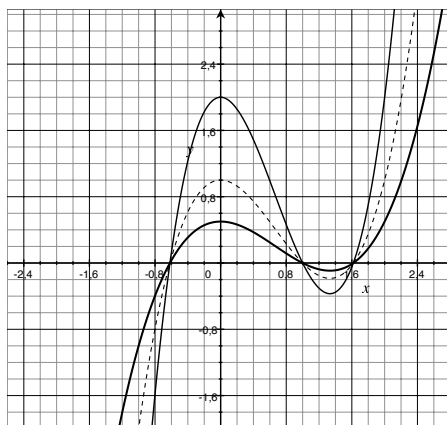


Figura 2: Le funzioni f , $2f$ e $\frac{1}{2}f$

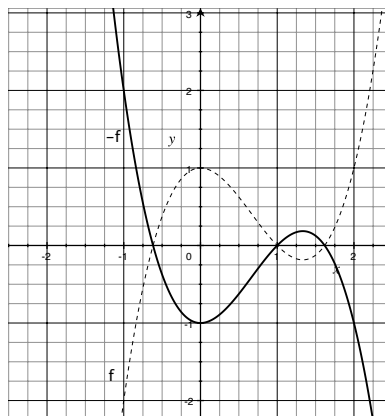


Figura 3: Le funzioni f e $-f$

ADDIZIONE DI UNA COSTANTE. Il grafico della funzione $g(x) = f(x) + c$ si ottiene ‘alzando’ il grafico di c (se $c > 0$) o ‘abbassando’ il grafico di $-c$ (se $c < 0$) rispetto all’asse delle x . Nella Figura 4 seguente il grafico di f (tratteggiato) è confrontato con quello di $f + 2$ e $f - 1$.

ADDIZIONE DI UNA COSTANTE NELL’ARGOMENTO. Il grafico della funzione $g(x) = f(x + c)$ si ottiene ‘spostando il grafico verso sinistra’ di c (se $c > 0$) o ‘spostando il grafico verso destra’ di $-c$ (se $c < 0$). Nella Figura 5 seguente il grafico di $f(x)$ (tratteggiato) è confrontato con quello di $f(x + 2)$ e $f(x - 1)$.

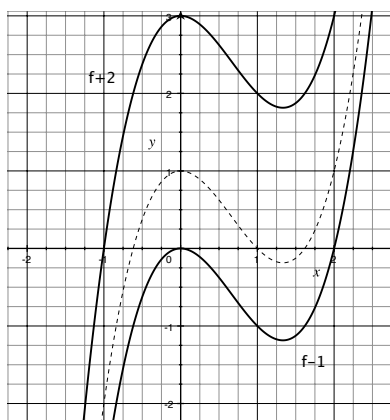


Figura 4: Le funzioni f , $f + 2$ e $f - 1$

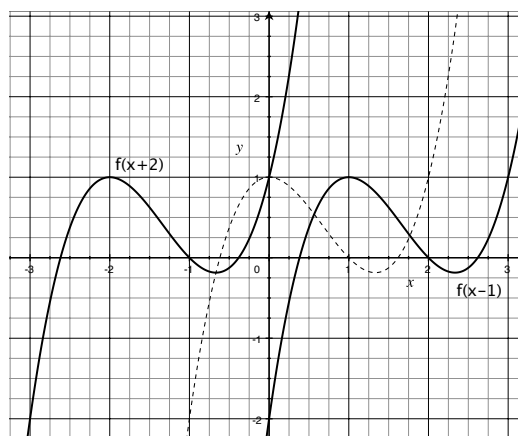


Figura 5: le funzioni f , $f(x + 2)$ e $f(x - 1)$

Esercizio. Applichiamo quanto visto sopra per disegnare il grafico di $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$ (con dominio $x \neq 1$, ovvero $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$). Facendo la divisione di polinomi otteniamo

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x-1}.$$

La funzione si ottiene quindi dalla funzione $\frac{1}{x}$ mediante operazioni del tipo sopra descritto. Partiamo quindi dal grafico noto di $\frac{1}{x}$ in Figura 6.

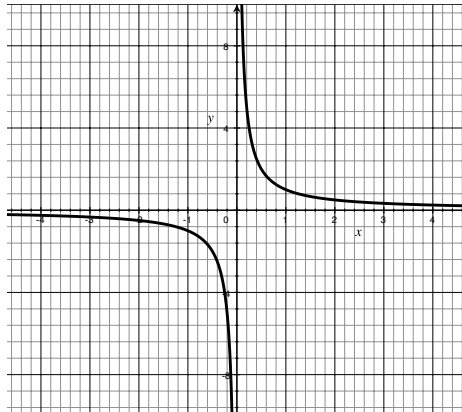


Figura 6: La funzione $\frac{1}{x}$

La moltiplicazione per 2 ‘dilata’ il grafico allontanandolo dall’asse x , e il grafico di $\frac{2}{x-1}$ si ottiene spostando quest’ultima funzione a destra di 1 (Figura 7)

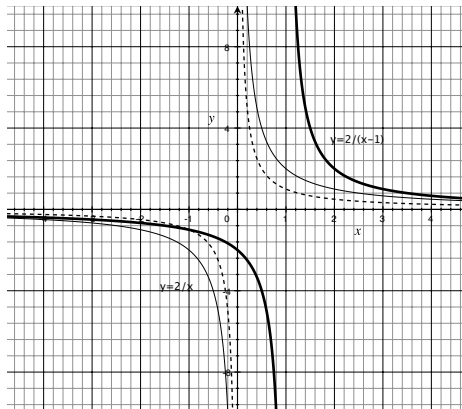


Figura 7: la funzione $\frac{2}{x-1}$

Successivamente ribaltiamo il grafico rispetto all’asse delle x per ottenere quello della funzione $-\frac{2}{x-1}$ (Figura 8) e finalmente trasliamo verso l’alto il grafico di 1 per ottenere il

grafico voluto (Figura 9). Notiamo in particolare che è facile calcolare l'immagine di f osservando il grafico. L'immagine è $\mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

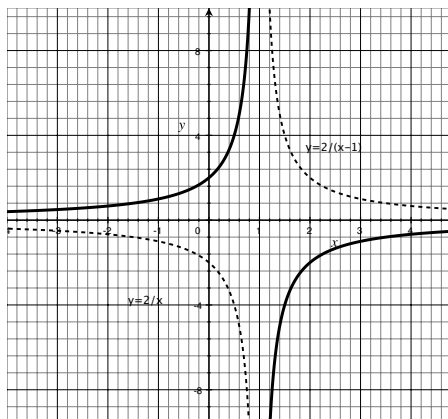


Figura 8: la funzione $-\frac{2}{x-1}$

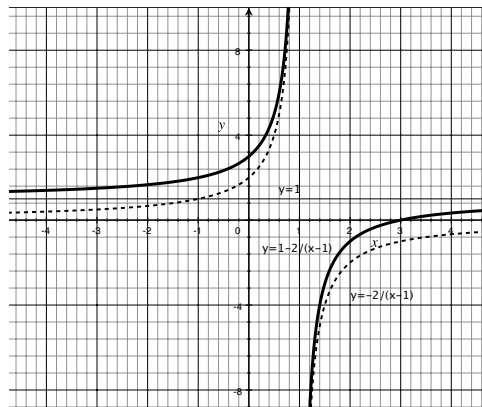


Figura 9: la funzione $1 - \frac{2}{x-1}$

Definizione Il VALORE ASSOLUTO o MODULO di x :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà del modulo:

$$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \iff x = 0$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ se } y \neq 0.$$

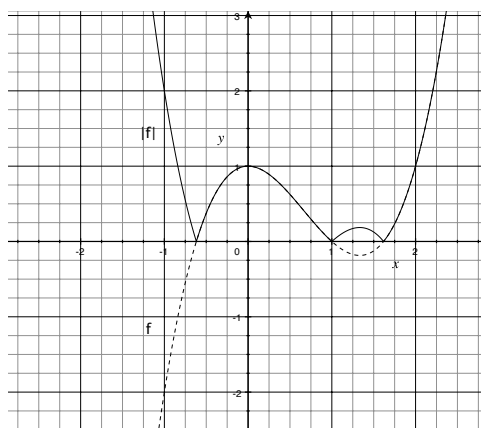


Figura 10: la funzione $|f|$ (f come in Figura 1)

GRAFICO DEL MODULO DI f . Se (x, y) è un punto del grafico di f con $y \geq 0$ allora è anche un punto del grafico di $|f|$. Se invece $y < 0$ il punto $(x, -y)$ (il simmetrico rispetto all'asse x) appartiene al grafico di $|f|$. In conclusione il grafico di $|f|$ si ottiene mantenendo il grafico di f sopra l'asse delle x , e 'ribaltando' la parte del grafico di f che sta sotto l'asse x . Riprendendo la funzione in Figura 1, il grafico di $|f|$ è riportato in Figura 10.

Esercizio. Disegnare il grafico di $g(x) = \left| \frac{x-3}{x-1} \right|$. Calcolarne l'immagine e dire per ogni y fissato quante sono le soluzioni x di $f(x) = y$.

Dato che $g = |f|$, dove il grafico di f è dato in Figura 9, il grafico di g si ottiene subito ribaltando la parte del grafico di f sotto l'asse delle x (Figura 11).

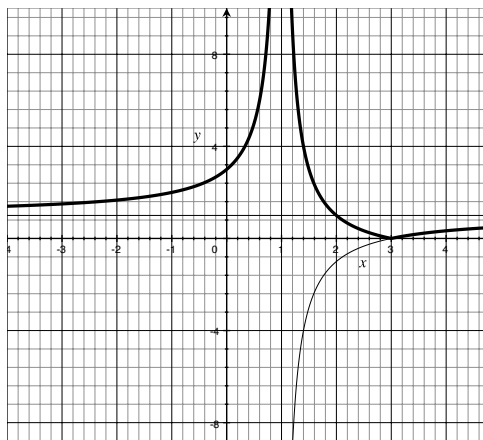


Figura 11: la funzione g

Dunque, l'immagine di g è $[0, +\infty)$, ovvero l'equazione $f(x) = y$ ha soluzione se e solo se $y \geq 0$. Più in particolare:

- per $y = 0$ si ha una sola soluzione
- per $0 < y < 1$ si hanno due soluzioni
- per $y = 1$ si ha una sola soluzione
- per $y > 1$ si hanno due soluzioni.

Esercizio. Disegnare il grafico di $h(x) = \left| \frac{|x|-3}{|x|-1} \right|$ e calcolarne l'immagine.

La funzione h è una funzione PARI, ovvero il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y . Per disegnarlo basta quindi disegnare la metà corrispondente a $x \geq 0$; l'altra metà sarà simmetrica. In questo caso $h(x) = f(x)$ (disegnata in Figura 9) per $x \geq 0$. Dunque il grafico è quello in Figura 12.

In particolare vediamo che il dominio di h è $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ e l'immagine è $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$.

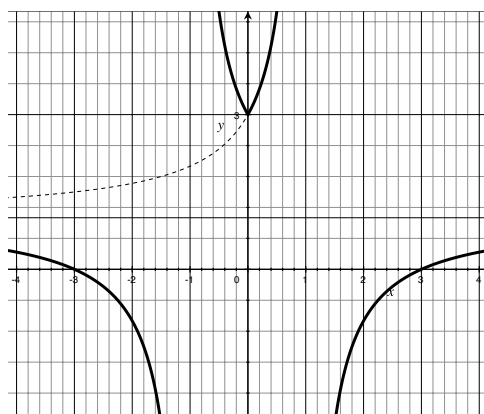


Figura 12: la funzione h

4 PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI

Ora definiamo alcuni concetti fondamentali a partire dalla relazione d'ordine.

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che M è un MAGGIORANTE per A se

$$\forall a \in A \quad a \leq M$$

(graficamente: sulla retta M sta “alla destra di tutti i punti di A ”). Si dice che M è un MINORANTE per A se

$$\forall a \in A \quad a \geq M$$

(graficamente: sulla retta M sta “alla sinistra di tutti i punti di A ”).

Esempi. 1): $A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 1\}$.

I punti 1, 2, 100 sono maggioranti di A . I punti -1 , -3 , $-7/5$ sono minoranti di A . Il punto 0 non è ne' maggiorante ($0 < \frac{1}{2} \in A$) ne' minorante ($0 > -1 \in A$) di A .

In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$; l'insieme dei minoranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$.

2): $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \leq 0\}$. In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}$.

3): $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \leq 0\}$. L'insieme dei maggioranti di A è ancora $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}$.

4): $K = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\}$. In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \pi\}$, L'insieme dei minoranti è $\emptyset$.

5): $A = \emptyset$. Allora ogni elemento di $\mathbb{R}$ è sia maggiorante che minorante per A .

6): $A = \mathbb{N}$. Non esistono maggioranti. L'insieme dei minoranti è $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

Nota: non è difficile convincersi che l'insieme dei maggioranti di un insieme A può avere tre forme:

- (1) tutti gli x maggiori o uguali a un certo numero (ovvero una semiretta);
- (2) l'insieme vuoto (ovvero A non è superiormente limitato);
- (3) tutti i numeri reali.

Quest'ultimo caso si può avere solo se A è l'insieme vuoto

□

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{R}$. Si chiama MASSIMO di A un maggiorante M di A tale che $M \in A$ (graficamente: sulla retta M è “il più alla destra di tutti i punti di A ”). Si chiama MINIMO di A un minorante M di A tale che $M \in A$ (graficamente: sulla retta M è “il più alla destra sinistra di tutti i punti di A ”). .

Il massimo di A viene denotato con $\max A$; il minimo di A viene denotato con $\min A$.

Nell'esempio 1: A ha minimo $= -1$, ma non ha massimo.

Negli esempi 2 e 5: A non ha ne' minimo ne' massimo.

Nell'esempio 3: si ha $\min A = -\sqrt{2}$, $\max A = \sqrt{2}$.

Nell'esempio 4: $\max A = \pi$, $\min A$ non esiste.

Nell'esempio 6: $\min A = \min \mathbb{N} = 0$, $\max A$ non esiste.

Teorema. Massimo e minimo di A sono unici.

DIMOSTRAZIONE (basta provarlo per il minimo) Supponiamo M' e M'' due minimi di A . Allora

$$(1) \quad M' \in A \quad M' \leq a \quad \forall a \in A$$

$$(2) \quad M'' \in A \quad M'' \leq a \quad \forall a \in A.$$

Abbiamo allora $M' \leq M''$ e $M'' \leq M'$. Dunque $M'' = M'$. □

Definizione Diremo che A è un sottoinsieme SUPERIORMENTE LIMITATO di $\mathbb{R}$ quando esiste almeno un maggiorante di A :

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \leq M.$$

Diremo che A è un sottoinsieme INFERIORMENTE LIMITATO di $\mathbb{R}$ quando esiste almeno un minorante di A :

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \geq M.$$

Diremo che A è un sottoinsieme LIMITATO di $\mathbb{R}$ quando è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.

OSSERVAZIONI: 1) A è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ se e solo se

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad |a| \leq M.$$

2) A non è superiormente limitato se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : a \geq M.$$

Abbiamo visto che non sempre un insieme ha massimo o minimo, anche se è limitato. Introduciamo ora i concetti di “estremo” (superiore e inferiore), che per definizione esisteranno sempre (almeno per insiemi limitati), e che coincidono con i massimi e minimi se questi esistono

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo l'ESTREMO SUPERIORE di A in $\mathbb{R}$ (che denoteremo con $\sup A$) il minimo dei maggioranti di A . Definiamo l'ESTREMO INFERIORE di A in $\mathbb{R}$ (che denoteremo con $\inf A$) il massimo dei minoranti di A .

NOTA: $\sup A$ e $\inf A$, se esistono, sono unici (per l'unicità di minimo e massimo).

Nell'esempio 1: si ha $\sup A = 1$, $\inf A = -1$.

Nell'esempio 2: $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$, ma non esistono $\sup A$ e $\inf A$ in $\mathbb{Q}$.

Nell'esempio 3: $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$.

Nell'esempio 4: $\sup A = \pi$, ma non esiste $\inf A$.

Nell'esempio 5: $A = \emptyset$ non ha ne' $\sup$ ne' $\inf$ in $\mathbb{R}$.

Nell'esempio 6: $\inf \mathbb{N} = 0$, ma non esiste $\sup \mathbb{N}$. □

Teorema. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

- i) se $\exists \max A$ allora A è sup. lim. e $\sup A = \max A$;
- ii) se $\exists \min A$ allora A è inf. lim. e $\inf A = \min A$;
- iii) se $\exists \sup A$ allora $(\exists \max A \iff \sup A \in A)$;
- iv) se $\exists \inf A$ allora $(\exists \min A \iff \inf A \in A)$.

DIMOSTRAZIONE i) $M = \max A \implies M$ è maggiorante di $A \implies A$ è sup. lim. Se M' è maggiorante di A allora in particolare $M' \geq M$ e quindi M è il min dei maggioranti di A .

ii) si dimostra alla stessa maniera di i).

iv) supponiamo $\exists \inf A$. Se $\exists \min A$ allora per ii) $\inf A = \min A \in A$. Se $M = \inf A \in A$, per definizione $M \leq a \forall a \in A$ e quindi verifica la definizione di $\min A$.

iii) si dimostra come iv). □

La completezza di $\mathbb{R}$

Teorema. $\mathbb{R}$ è completo, ovvero ogni suo sottoinsieme non vuoto superiormente limitato ammette estremo superiore in $\mathbb{R}$.

Non dimostreremo questo teorema. Notiamo solo che $\mathbb{Q}$ non è completo (esempio 2 sopra).

NOTA: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ed A inf. lim. Allora $\exists \inf A$.

DIMOSTRAZIONE Definiamo $A' = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. A' è sup. lim. Quindi $\exists \sup A'$. Allora $-\sup A' = \inf A$. □

Estremi nella retta reale estesa

Abbiamo visto che i concetti di $\sup$ e $\inf$ sono utili per descrivere proprietà di insiemi superiormente/inferiormente limitati. Per coprire con questi concetti tutti gli insiemi abbiamo bisogno di fare in modo di potere parlare sempre di maggioranti/minoranti (anche per insiemi non limitati). Per questo è conveniente ripetere questi concetti nell'ambito della retta reale estesa.

Osservazione: qualunque sia l'insieme $A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ $+\infty$ è maggiorante di A (e $-\infty$ è minorante di A).

Teorema. Estendendo la definizione di estremo superiore ed estremo inferiore a sottoinsiemi di $\overline{\mathbf{R}}$, si ha che per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ esistono $\sup A$ e $\inf A \in \overline{\mathbf{R}}$. Se $A \subseteq \mathbb{R}$, allora

- (i) $\sup A = +\infty \iff A$ non è sup. lim.;
- (ii) $\inf A = -\infty \iff A$ non è inf. lim.;
- (iii) $\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE (per il $\sup$) $A \neq \emptyset$. Se $+\infty \in A$, allora $+\infty = \sup A = \max A$. Escludendo il caso $A = \{-\infty\}$, resta da considerare il caso $A \subseteq \mathbb{R}$.

i) A sup. lim. $\implies \exists \sup A \in \mathbb{R} \implies \exists \sup A \in \overline{\mathbf{R}}$; A non sup. lim. $\iff \{\text{maggioranti}\} = \{+\infty\} \iff \sup A = +\infty$;

ii) stesso ragionamento;

iii) $A = \emptyset \implies \{\text{maggioranti}\} = \overline{\mathbf{R}} \implies \sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$ $\square$

Esempi. $\sup \mathbb{N} = +\infty$; $\max \overline{\mathbf{R}} = +\infty$