Dispense di Analisi Matematica 1 - prima parte

Andrea Braides

Queste dispense seguono approssimativamente le lezioni di Analisi Matematica 1 da me tenute. Non sono pensate come un sostituto per un libro di testo, ma solo come un ausilio per poter seguire schematicamente gli argomenti trattati a lezione.

1 IL "LINGUAGGIO MATEMATICO"

Il linguaggio matematico moderno è basato su due teorie fondamentali: la 'teoria degli insiemi' e la 'logica delle proposizioni'.

La teoria degli insiemi ci assicura che gli oggetti di cui parliamo sono delle 'cose' ben definite: gli insiemi sono caratterizzati dal fatto che possiamo stabilire con esattezza se un qualcosa (che chiameremo 'elemento') sta o meno nell'insieme.

Lo stesso principio vale per le proposizioni: le frasi che si usano in matematica non devono essere ambigue, ovvero bisogna sapere dire esattamente se una frase è vera o è falsa.

Le proposizioni logiche vengono espresse usando una notazione a cui bisogna abituarsi: si usano

Connettivi logici

$$\neg \text{ (non)};\quad \wedge \text{ (e)};\quad \vee \text{ (oppure)};$$

$$\Longrightarrow\text{(se...allora/...implica...)};\quad \Longleftrightarrow\text{(...se e solo se...)}$$

Quantificatori

$$\forall \text{ (per ogni)};\qquad \exists \ldots : \ldots \text{ (esiste...tale che...)}$$

La descrizione di una frase accettabile in matematica è quella di una proposizione:

Proposizioni

"frasi sensate che non contengono variabili libere e che sono vere oppure false"

Insiemi e sottoinsiemi

In generale gli insiemi verranno definiti con una scrittura del tipo

$$A = \{x \in \mathcal{U} : P(x)\}$$

che si legge "A è l'insieme dei punti x di $\mathcal{U}$ tali che $P(x)$ vale, dove P è una proposizione che contiene la variabile x: se $P(x)$ è vera allora x appartiene all'insieme, se $P(x)$ è falsa allora no. Per quanto riguarda l'"ambiente" $\mathcal{U}$ in cui si trovano i nostri elementi x, per noi sarà sempre un insieme di numeri o di funzioni.

Altre volte un insieme è descritto semplicemente mediante un elenco

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

DOMANDA: in questo caso possiamo riscrivere A nella forma sopra? Che cosa è $P(x)$ in questo caso?

Notazioni:

$$x \in A \text{ (x appartiene all'insieme A)}$$

$$A \subseteq B \text{ (A è \textit{sottoinsieme} di B)}$$

ovvero ogni elemento di A è anche un elemento di B, ovvero $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

$$A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$$

(ovvero due insiemi sono uguali se e solo se contengono gli stessi elementi; un modo per vedere se due insiemi sono uguali è verificare che ognuno è contenuto nell'altro)

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\} \text{ (\textit{unione})}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \text{ (\textit{intersezione})}$$

Notare che se A è definita dalla proposizione $P(x)$ e B dalla $Q(x)$ allora $A \cup B$ è definita dalla proposizione $P(x) \vee Q(x)$, mentre $A \cap B$ è definita dalla proposizione $P(x) \wedge Q(x)$

$$\emptyset \text{ denota l'\textit{insieme vuoto}}$$

L'insieme vuoto è definito dal fatto che $x \in \emptyset$ è sempre falsa. È importante che l'insieme vuoto sia definito, in modo che, per esempio, $A \cap B$ sia bene definito anche quando non c'è alcun elemento che stia sia in A che in B. Si ha la "strana proprietà" che "ogni proposizione e' vera sull'insieme vuoto": dato che non contiene nessun elemento, la proposizione in questione non è mai falsa per ogni elemento dell'insieme vuoto (e quindi e' sempre vera).

$$A \text{ e } B \text{ sono \textit{disgiunti} se } A \cap B = \emptyset$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e non } x \in B\} \qquad \text{(si legge A \textit{meno} B)}$$

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \subseteq B \ e \ B \setminus A \neq \emptyset \text{ (\textit{stretta inclusione} di A in B)}$$

2 INSIEMI NUMERICI

In generale gli insiemi che tratteremo saranno insiemi di numeri. I principali insiemi numerici che tratteremo sono:

$\mathbb{N}$ insieme dei numeri *naturali* o interi positivi
ovvero $0, 1, 2, 3, \ldots$

$\mathbb{Z}$ insieme dei numeri *interi*
ovvero $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri *razionali*
ovvero le frazioni m/n dove $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri *reali*
quali per esempio π, $\sqrt{2}$, e (numero di Nepero),...

$\mathbb{C}$ insieme dei numeri *complessi*
ovvero numeri della forma $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

Abbiamo le inclusioni

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Queste inclusioni sono in verità strette. Infatti $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Irrazionalità di $\sqrt{2}$: è più delicato mostrare che l'inclusione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è stretta. Vediamo per esempio che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Per farlo utilizziamo un *ragionamento per assurdo*, ovvero supponiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, e vediamo che questo ci porta ad una contraddizione. Se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ allora possiamo scrivere $\sqrt{2} = m/n$ con m ed n interi primi tra loro. Elevando questa relazione al quadrato otteniamo

$$2 = \frac{m^2}{n^2}, \text{ ovvero } m^2 = 2n^2.$$

Questo vuol dire che m è pari (poichè il suo quadrato è pari), ovvero possiamo scrivere $m = 2k$ per un qualche intero k. Questo ci porta a $2n^2 = m^2 = 4k^2$, ovvero $n^2 = 2k^2$, che implica che anche n è pari. Si ha concluso quindi che sia n che m sono pari, e in particolare non sono primi tra loro, in contrasto con l'ipotesi di partenza. Quindi questa deve essere falsa (altrimenti da una proposizione vera si possono solo dedurre cose vere).

Esempio. Per noi spesso gli insiemi di interesse sono gli insiemi di soluzioni di problemi matematici. Per esempio le *soluzioni di un'equazione*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

Risolvere l'equazione significa descrivere nel miglior modo possibile l'insieme A; in questo caso significa riscriverlo come un elenco. Questo si fa vedendo che A è uguale a ciascuno dei due insiemi

$$B = \{y \in \mathbb{R} : (y - 2)(y - 3) = 0\},$$

$$C = \{y \in \mathbb{R} : (y-2) = 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} : (y-3) = 0\} = \{2, 3\}.$$

Il passaggio logico da A a B è la scomposizione in fattori, e da B a C il notare che un prodotto è nullo se e solo se è nullo almeno uno dei suoi fattori.

Esempio. Confrontiamo A, B, C con gli insiemi

$$D = \{2\} \qquad E = \{2, \{2\}\} \qquad F = \{\{2\}\} \qquad G = \{2, 3, 2\}.$$

Allora si ha

$$A = B = C \supseteq D \in E, \qquad D \cap F = \emptyset \qquad D \cup F = E$$
$$A \cap E = D \qquad C \setminus D = \{3\} \qquad G = C.$$

Esempio. $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(1/x) = 0\}$ si può anche scrivere

$$\{x \in \mathbb{R} : 1/x = k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}\}$$

oppure $\{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} :\ 1/x = k\pi\}$ oppure

$$\{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,\ x = 1/k\pi\}$$

oppure

$$\Big\{\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{2\pi}, \dots\Big\}.$$

Notare che quest'ultima scrittura è ambigua (non è detto che sia chiaro cosa significano quei puntini) e quindi le precedenti sono da preferire.

Esercizio. Esprimere come un elenco di punti gli insiemi

$$A = \Big\{x \in \mathbb{R} : \log_{10}(x^2) \sin\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0\Big\},$$
$$A \cap \mathbb{Z}, \qquad A \cap \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Esempio. Nel corso di Analisi 2 si incontreranno anche insiemi di numeri complessi. Per cui si dovranno descrivere insiemi del tipo

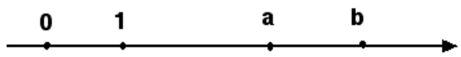
$$\begin{aligned} A &= \Big\{Im(z) \ :\ z^3 = -8i\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R} \ :\ \exists z \in \mathbb{C},\ x = Im(z),\ z^3 = -8i\Big\} = \{-1, 2\} \end{aligned}$$

(i simboli saranno chiari nella seconda parte del corso, se non sono già noti i numeri complessi).

La retta reale

L'insieme $\mathbb{R}$ è dotato della *relazione d'ordine* $\leq$ (minore o uguale) per cui dati due numeri a e b sappiamo se è vera $a \leq b$ oppure $b \leq a$, e se tutte due sono vere allora concludiamo che $a = b$. Questa relazione non può essere definita per i numeri complessi (non ha senso porsi il problema se $i \leq 1$...).

L'insieme $\mathbb{R}$ è rappresentato come una retta con un'"orientazione": $a \leq b$ viene rappresentato sulla retta come "a sta alla sinistra di b".



La retta reale estesa

Definizione I simboli $+\infty$ e $-\infty$: accanto ai numeri reali si introducono i simboli $+\infty$ (si legge più infinito) e $-\infty$ (meno infinito).

Definizione retta reale estesa $\overline{\mathbf{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (alcuni testi usano il simbolo $\mathbb{R}^*$ al posto di $\overline{\mathbf{R}}$). Si estende la relazione d'ordine $\leq$ ponendo

$$-\infty \leq x \leq +\infty$$

per tutti gli $x, y \in \overline{\mathbf{R}}$, ovvero $-\infty$ sta "alla sinistra" della retta reale, $+\infty$ alla sua destra.

Intervalli di $\overline{\mathbf{R}}$

Spesso gli insiemi che studieremo si potranno descrivere come unione di insiemi più semplici: gli intervalli.

Definizione $I \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ è intervallo $\Longleftrightarrow (\forall x, y \in I \ x < z < y \Longrightarrow z \in I)$, ovvero: se due punti x e y stanno in I allora tutti i punti compresi tra questi stanno ancora in I.

Notazione: Se I è un intervallo può essere di una delle quattro forme $(a, b \in \overline{\mathbf{R}} \ \ a \leq b)$

$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a \leq x \leq b\}$,
$(a, b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a < x \leq b\}$,
$[a, b) = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a \leq x < b\}$,
$(a, b) = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a < x < b\}$.

Si usa anche la notazione $]a, b[$ per (a, b), $]a, b]$ per $(a, b]$, etc.

a e b vengono detti estremi (inferiore e superiore) dell'intervallo I, e, in effetti, $a = \inf I$ e $b = \sup I$.

Si dice che l'intervallo I è chiuso in a (o in b) se $a \in I$ (rispettivamente, $b \in I$). Si dice che l'intervallo I è aperto in a (o in b) se $a \notin I$ (rispettivamente, $b \notin I$).

Esempi: 1) $[0, 1] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : \ 0 \leq x \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leq x \leq 1\}$;

2) $[0, 0] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : \ 0 \leq x \leq 0\} = \{0\}$;

3) $(-\infty,\pi] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} :\ \infty < x \leq \pi\} = \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq \pi\}$;
4) $[-\infty,+\infty] = \overline{\mathbf{R}}$.

Se I è intervallo limitato, allora chiamiamo AMPIEZZA di I, il numero

$$\sup I - \inf I.$$

Se entrambi gli estremi di un intervallo sono numeri reali, l'intervallo è un SEGMENTO della retta reale. Gli intervalli della forma $(-\infty, b]$ e $[a, +\infty)$ (a e b in $\mathbb{R}$) sono SEMIRETTE della retta reale.
Esempi: l'ampiezza di $(-7, 3]$ è 10; l'ampiezza di $[\pi, \pi]$ è 0.

Dominio di una funzione In generale una funzione f è descritta dal suo dominio di definizione X, il codominio, ovvero l'insieme dove prende i valori e che per noi sarà in genere $\mathbb{R}$, e la 'legge' $x \mapsto f(x)$; in tal caso si scrive $f : X \to \mathbb{R}$.

A volte però è data solo la legge (ovvero il modo di calcolare $f(x)$). In questo caso il DOMINIO (o dominio 'naturale') è definito come il più grande insieme per cui $f(x)$ ha un senso, e viene indicato con *dom* f:

$$dom\, f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ è ben definita}\}.$$

Il più delle volte descrivere un dominio di funzione equivale a risolvere una o più *disequazioni* o *sistemi di disequazioni*, e descrivere l'insieme risultante come unione di intervalli.

Esempi
(1) $dom \log = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$ (per log si intende il logaritmo in base naturale (ovvero in base e, il numero di Nepero, che definiremo più avanti) ma in questi esempi ogni base maggiore di 1 va bene);
(2) Se $f(x) = \log(x^2 - x)$, allora

$$dom\, f = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2 - x) \text{ è ben definita}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ oppure } x > 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

(3) Se $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - x)}$, allora

$$dom\, f = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\log(x^2 - x)} \text{ è ben definita}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2 - x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \geq 1\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$$

$$= \Big(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big] \cup \Big[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\Big).$$

Immagine di una funzione

Spesso considereremo l'insieme di tutti i punti che si possono raggiungere tramite la funzione f; questo insieme viene chiamato l'IMMAGINE di f.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in X\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X : y = f(x)\}.$$

In altre parole l'immagine di una funzione è l'insieme formato da tutti i valori y per cui l'equazione

$$f(x) = y$$

ha almeno una soluzione x.

Esempio. Determiniamo l'immagine di $f(x) = 2^{-x^2}$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{2^{-x^2} : x \in \mathbb{R}\}.$$

Dato che $\{-x^2 : x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 0]$, possiamo scrivere

$$\mathrm{Im}(f) = \{2^{-y} : y \in (-\infty, 0]\} = (0, 1].$$

Insiemi prodotto

Se A e B sono insiemi, il PRODOTTO $A \times B$ è definito da

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A, \ b \in B\}$$

Gli oggetti del tipo (a, b) vengono detti COPPIE (o "coppie ordinate"), ed hanno la proprietà che

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow (a = a' \text{ e } b = b')$$

(a differenza dell'*insieme* $\{a, b\} = \{b, a\}$)

Possibile definizione: $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$.

Scriveremo $A \times A = A^2$. È ben noto l'insieme $\mathbb{R}^2$, che si identifica con il "piano Cartesiano".