Foglio di esercizi N. 8

1. Un esempio di una funzione f tale che $f''(-3) = 0$ ma f non ha un punto di flesso nel punto -3 è $f(x) = (x + 3)^4$.

2. La derivata seconda di $f(x) = x^2 + 2 \sin x$ è $f''(x) = 2 - 2 \sin x$, che è sempre non negativa. Quindi f è una funzione convessa e non ci sono punti di flesso, anche se $f''(x) = 0$ per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. La derivata seconda di f è $f''(x) = 30x^4 + 12x^2$, che è sempre non negativa. Quindi f non ha punti di flesso.

La derivata seconda di g è $g''(x) = 30x^4 - 12x^2 = 6x^2(5x^2 - 2)$, che è non negativa per $|x| \geq \sqrt{2/5}$ e non positiva per $|x| \leq \sqrt{2/5}$. Quindi g è convessa per $|x| \geq \sqrt{2/5}$ e concava per $|x| \leq \sqrt{2/5}$, e i due punti di flesso di g sono $-\sqrt{2/5}$ e $\sqrt{2/5}$.

4. La funzione $f(x) = ||x| - 4|$ non è derivabile in $x = 0, 4, -4$. Sugli ciascuno degli intervalli $(-\infty, -4]$, $[-4, 0]$, $[0, 4]$ e $[4, +\infty)$ la funzione è una retta (e quindi sia concava che convessa). È facile disegnare il grafico di f e controllare che è convessa su $(-\infty, 0]$ mentre è concava su $(-\infty, -4]$.

5. La funzione $f(x) = |x - 6| + \sqrt{|x| - x}$ non è derivabile in $x = 0$ e 6 . Possiamo anche scrivere

$$f(x) = \begin{cases} |x - 6| + \sqrt{-2x} & \text{se } x \leq 0 \\ |x - 6| & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{e quindi } f''(x) = \begin{cases} -(-2x)^{-3/2} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < 6 \text{ o } x > 6. \end{cases}$$

La funzione è concava su $(-\infty, 0]$ e convessa su $[0, +\infty)$.

6. Per semplificare i calcoli trasliamo la funzione cambiando variabile: $y = x - 5$ per cui dobbiamo studiare la funzione $g(y) = \frac{e^{y+5}}{y}$, la cui derivata seconda è

$$g''(y) = e^{y+5} \frac{y^2 - 2y + 2}{y^3},$$

che è positiva per $y > 0$ e negativa per $y < 0$. Quindi la funzione g è convessa sugli intervalli di $(0, +\infty)$ e concava sugli intervalli di $(-\infty, 0)$ e la funzione f è convessa sugli intervalli di $(5, +\infty)$ e concava sugli intervalli di $(-\infty, 5)$.