Foglio di esercizi N. 7

Negli esercizi 1–3 la funzione f è ottenuta "modificando" una funzione $g(x)$ nei punti interi, "sostituendola" con un'altra funzione $h(x)$. Per prima cosa si esaminano i punti in cui g ha punti di estremo relativo. Questi (sia interi che non) rimangono punti di estremo relativo. Per i punti $x \in \mathbb{Z}$ vicino ai quali g è strettamente monotona, si avrà

$$\begin{aligned}
&x \text{ è un punto di massimo relativo se } h(x) > g(x),\\
&x \text{ è un punto di minimo relativo se } h(x) < g(x),\\
&x \text{ non è un punto di estremo relativo se } h(x) = g(x),
\end{aligned}$$

(perchè in quest'ultimo caso la funzione f coincide con g, che è strettamente monotona vicino a x).

1. La funzione è ottenuta modificando la funzione $g(x) = |x| + 2$ nei punti interi, sostituendola con la funzione $h(x) = |x(x-3)|$. Dato che g ha un solo punto di estremo relativo $x = 0$ esaminiamo prima questo. Dato che $h(0) = 0 < g(0) = 2$ il punto 0 rimane un punto di minimo relativo.

Dobbiamo quindi esaminare la disuguaglianza $h(x) < g(x)$, ovvero

$$|x(x-3)| < |x| + 2,$$

che diviene

$$\begin{cases} x(x-3) < x+2 & \text{se } x > 3 \\ x(3-x) < x+2 & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ x(x-3) < -x+2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x - 2 < 0 & \text{se } x > 3 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 2x - 2 < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ovvero} \qquad \begin{cases} 3 < x < 2 + \sqrt{6} \\ \text{ oppure } 0 \le x \le 3 \\ \text{ oppure } 1 - \sqrt{3} < x < 0. \end{cases}$$

In conclusione si ha $h(x) > g(x)$ se $1 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{6}$. I numeri interi che cadono in questo intervallo sono $0, 1, 2, 3, 4$ che sono quindi punti di minimo relativo. Per i rimanenti punti interi si ha $g(x) < h(x)$ e quindi sono punti di massimo relativo.

2. La funzione è ottenuta modificando la funzione $g(x) = |16x|$ nei punti interi, sostituendola con la funzione $h(x) = |x^3|$. Dato che g ha un solo punto di estremo relativo $x = 0$ esaminiamo prima questo. Dato che $h(0) = 0 = g(0)$ il punto 0 rimane un punto di minimo relativo.

Dobbiamo quindi esaminare la disuguaglianza $h(x) < g(x)$, ovvero

$$16|x| < |x|^3, \qquad \text{ovvero} \qquad 16 < x^2, x \ne 0 \qquad \text{ovvero} \qquad -4 < x < 4, x \ne 0.$$

I punti interi che soddisfano questa disuguaglianza sono $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ e quindi questi sono punti di minimo relativo (come 0). I punti di massimo relativo sono i punti interi che soddisfano $x^2 > 16$, ovvero $\pm 5, \pm 6, \ldots$.

3. La funzione è ottenuta modificando la funzione $g(x) = \frac{3}{2}|x|$ nei punti interi, sostituendola con la funzione $h(x) = x^2 - x$. Dato che g ha un solo punto di estremo relativo $x = 0$ esaminiamo prima questo. Dato che $h(0) = 0 = g(0)$ il punto 0 rimane un punto di minimo relativo.

Dobbiamo quindi esaminare la disuguaglianza $h(x) < g(x)$, ovvero

$$x^2 - x < \frac{3}{2}|x|, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x^2 - x < \frac{3}{2}x & \text{se } x > 0 \\ x^2 - x < -\frac{3}{2}x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{ovvero} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 5x < 0 & \text{se } x > 0 \\ 2x^2 + x < 0 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} 0 < x < \frac{5}{2} \\ \text{oppure } -\frac{1}{2} < x < 0. \end{cases}$$

I numeri interi che soddisfano a questa disequazione sono 1 e 2 e quindi questi sono punti di minimo relativo (come 0). Gli altri soddifano la diseguaglianza $h(x) > g(x)$ e quindi sono punti di massimo relativo .

4. Risolvere l'equazione $x^3 - x = a$ significa trovare l'intersezione della curva di $y = x^3 - x$ e la retta orizzontale $y = a$.

Esaminiamo la funzione $f(x) = x^3 - x$. La sua derivata è $f'(x) = 3x^2 - 1$ che è negativa tra $-1/\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{3}$, positiva altrimenti. quindi f è strettamente crescente tra $-\infty$ e $-1/\sqrt{3}$, strettamente decrescente tra $-1/\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{3}$, strettamente crescente tra $1/\sqrt{3}$ e $+\infty$. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad f(-1/\sqrt{3}) = \frac{2}{3/\sqrt{3}}, \qquad f(1/\sqrt{3}) = -\frac{2}{3/\sqrt{3}}.$$

Quindi, l'equazione $x^3 - x = a$ ha una soluzione per $|a| > \frac{2}{3/\sqrt{3}}$, due soluzioni per $|a| = \frac{2}{3/\sqrt{3}}$, tre soluzioni per $|a| < \frac{2}{3/\sqrt{3}}$.

5. Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^5 - 5x^3$. Si ha $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$, quindi la funzione è crescente per $x \leq -\sqrt{3}$, decrescente per $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ (anche se $f'(0) = 0$), e crescente per $x \geq \sqrt{3}$. Dunque $-\sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo e $\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo.

6. La derivata di $f(x) = \frac{1}{3x+1} \log x$ è

$$f'(x) = -\frac{3}{(3x+1)^2} \log x + \frac{1}{x(3x+1)} = \frac{-3x \log x + (3x+1)}{x(3x+1)^2}.$$

che si annulla solo se $\log x = 1 + \frac{1}{3x}$. Questa equazione si risolve graficamente ed ha una sola soluzione (che non si determina esplicitamente). Questo punto stazionario è il punto di massimo di f.