Foglio di esercizi N. 6

1. La funzione è uguale a
$$f(x)=\begin{cases}(x-2)e^{-\frac{1}{2}x} & \text{se } x\le 2\\ (2-x)e^{-\frac{1}{2}x} & \text{se } x\ge 2.\end{cases}$$
Si ha
$$D\Big((x-2)e^{-\frac{1}{2}x}\Big)=e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}(x-2)e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\Big(4-x),$$
per cui
$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(4-x) & \text{se } x<2\\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(x-4) & \text{se } x>2.\end{cases}$$
Dunque si ha
$$\begin{cases}f'(x)>0 & \text{se } x<2\\ f'(x)<0 & \text{se } 2<x<4\\ f'(x)>0 & \text{se } x>4\end{cases}\qquad \text{e quindi}\qquad \begin{cases}f \text{ crescente} & \text{in } (-\infty,2]\\ f \text{ decrescente} & \text{in } [2,4]\\ f \text{ crescente} & \text{in } [4,+\infty).\end{cases}$$
In conclusione il più grande intervallo illimitato superiormente su cui la funzione f è monotona (crescente) è $[4,+\infty)$.

2. Si ha $f'(x)=e^x(x-3)$,
$$\begin{cases}f'(x)<0 & \text{se } x<3\\ f'(x)>0 & \text{se } x>3\end{cases}\qquad \text{e quindi}\qquad \begin{cases}f \text{ decrescente} & \text{in } (-\infty,3]\\ f \text{ crescente} & \text{in } [3,+\infty).\end{cases}$$
Dunque f non è decrescente in alcun intervallo illimitato superiormente. La risposta, in termini di insiemi, è *l'insieme vuoto*.

3. Si ha $D\Big((x^2-4)e^{x/3}\Big)=2xe^{x/3}+\dfrac{1}{3}(x^2-4)e^{x/3}=\dfrac{1}{3}e^{x/3}(x^2+6x-4)$. Dato che
$$|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & \text{se } |x|\ge 2\\ 4-x^2 & \text{se } |x|\le 2,\end{cases}$$
si ha
$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{x/3}(x^2+6x-4) & \text{se } |x|\ge 2\\ -\frac{1}{3}e^{x/3}(x^2+6x-4) & \text{se } |x|\le 2.\end{cases}$$

Le due radici di x^2+6x-4 sono $-3\pm\sqrt{13}$. Dato che
$$-3-\sqrt{13}<-2<-3+\sqrt{13}<2,$$

si ha

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x < -3-\sqrt{13} \\ f'(x) < 0 & \text{se } -3-\sqrt{13} < x < -2 \\ f'(x) > 0 & \text{se } -2 < x < -3+\sqrt{13} \\ f'(x) < 0 & \text{se } -3+\sqrt{13} < x < 2 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 2 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} f \text{ crescente} & \text{in } (-\infty,-3-\sqrt{13}] \\ f \text{ decrescente} & \text{in } [-3-\sqrt{13},-2] \\ f \text{ crescente} & \text{in } [-2,-3+\sqrt{13}] \\ f \text{ decrescente} & \text{in } [-3+\sqrt{13},2] \\ f \text{ crescente} & \text{in } [2,+\infty). \end{cases}$$

Dunque gli intervalli su cui f è crescente sono quelli contenuti in $(-\infty,-3-\sqrt{13}]\cup[-2,-3+\sqrt{13}]\cup[2,+\infty)$.

4. Si ha $f'(x) = e^x\Big((\log(x-3))^2 + 2\log(x-3)\dfrac{1}{x-3}\Big) = e^x\dfrac{\log(x-3)}{x-3}((x-3)\log(x-3)+2)$.

Dobbiamo esaminare il segno di $\log(x-3)((x-3)\log(x-3)+2)$ per $x>3$ (dato che $e^x>0$ e $x-3>0$).

Si ha $\log(x-3)>0$ se e solo se $x>4$, mentre, dato che per $x=4$ si ha $(x-3)\log(x-3)+2 = (4-3)\log(4-3)+2 = 2$ si ha che $(x-3)\log(x-3)+2>0$ su un intervallo $[\alpha,+\infty)$ per un certo $\alpha<4$ Dunque

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{su } [\alpha,4) \\ f'(x) > 0 & \text{su } (4,+\infty), \end{cases}$$

e quindi $a=4$.

5. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{\log 3x} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{3} \\ \dfrac{x}{\log 3x} & \text{se } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Dato che $D\Big(\dfrac{x}{\log 3x}\Big) = \dfrac{\log 3x - 1}{(\log 3x)^2}$ si ha

$$D\Big(\frac{x}{\log 3x}\Big) > 0 \text{ se e solo se } x > \frac{e}{3}.$$

e quindi

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{1}{3} \\ f'(x) < 0 & \text{se } \frac{1}{3} < x < \frac{e}{3} \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > \frac{e}{3}. \end{cases}$$

e f è crescente negli intervalli contenuti in $\Big(0,\frac{1}{3}\Big)\cup\Big[\frac{e}{3},+\infty\Big)$.

6. Derivando la funzione $f(x) = \dfrac{\pi - \arctan(1+x^2)}{\pi + \arctan(1+x^2)} = \dfrac{2\pi}{\pi+\arctan(1+x^2)} - 1$ si ottiene

$$f'(x) = 2\pi\frac{-1}{(\pi+\arctan(1+x^2))^2}\cdot\frac{1}{1+(1+x^2)^2}\cdot 2x.$$

Si ha $f'(x)<0$ se e solo se $x>0$ e quindi f è decrescente negli intervalli contenuti in $[0,+\infty)$.