

Foglio di esercizi N. 5

1. Per calcolare il polinomio di Taylor di ordine 5 e centro 0 di $f(x) = \cos(3 \tan x) - \cos(3 \sin x)$. calcoliamo per prima cosa $T^5(\cos y) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4$.

Notiamo che basta usare i polinomi di Taylor di ordine 3 di $\sin x$ e $\tan x$ (perche' i termini di grado 5 verrebbero sempre elevati a qualche potenza o moltiplicati per un altro monomio e quindi darebbero termini di grado maggiore di 5). Quindi consideriamo

$$T^3(3 \sin x) = 3\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) = 3x - \frac{1}{2}x^3, \quad T^3(3 \tan x) = 3\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) = 3x + x^3.$$

Sostituendo nello sviluppo del coseno si ha

$$T^5(\cos(3 \tan x)) = T^5\left(1 - \frac{1}{2}(3x + x^3)^2 + \frac{1}{24}(3x + x^3)^4\right) = 1 - \frac{1}{2}(9x^2 + 6x^4) + \frac{1}{24}(3x)^4$$

(ho eliminato tutti i termini di grado maggiore o uguale a 6), e anche

$$T^5(\cos(3 \sin x)) = T^5\left(1 - \frac{1}{2}(3x - \frac{1}{2}x^3)^2 + \frac{1}{24}(3x - \frac{1}{2}x^3)^4\right) = 1 - \frac{1}{2}(9x^2 - 3x^4) + \frac{1}{24}(3x)^4$$

Facendo la differenza di questi due polinomi si ha

$$T^5(\cos(3 \tan x) - \cos(3 \sin x)) = -\frac{1}{2}6x^4 - \frac{1}{2}3x^4 = -\frac{9}{2}x^4.$$

2. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro 0 di $\log(1 + y)$ è $y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}$. Dunque

$$\begin{aligned} T^3 \log(1 - x + x^2) &= T^3\left((-x + x^2) - \frac{(-x + x^2)^2}{2} + \frac{(-x + x^2)^3}{3}\right) \\ &= (-x + x^2) - \frac{x^2 - 2x^3}{2} - \frac{x^3}{3} = -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3. \end{aligned}$$

3. Dato che il coseno è una funzione pari si ha $\cos |2x| = \cos 2x$, e

$$T^3(\cos 2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 = 1 - 2x^2.$$

Dato che $\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$, si ha

$$|x| \sin |3x| = |x| \left(|3x| - \frac{1}{6}|3x|^3 + o(x^3) \right) = 3x^2 - \frac{1}{6}(3x)^4 + o(x^4) = 3x^2 + o(x^3),$$

e quindi $T^3(|x| \sin |3x|) = 3x^2$.

Dunque $T^3(\cos |2x| + |x| \sin |3x|) = 1 + x^2$.

4. Si ha $T^3 \cos(\sqrt{2}x) = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}x)^2 = 1 - x^2$, e $T^3 \log(1 + \sqrt{3}x) = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}(\sqrt{3}x)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt{3}x)^3 = \sqrt{3}x - \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{3}x^3$; dunque

$$\begin{aligned} T^3(\cos(\sqrt{2}x) \log(1 + \sqrt{3}x)) &= T^3\left((1 - x^2)\left(\sqrt{3}x - \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{3}x^3\right)\right) \\ &= x T^2\left((1 - x^2)\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}x + \sqrt{3}x^2\right)\right) = \sqrt{3}x - \frac{3}{2}x^2. \end{aligned}$$

5. Notiamo che $\sin x^6 + x^5 - 2x^4 = -2x^4 + o(x^4)$ e quindi dobbiamo calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \left(\cos(3 \tan x) - \cos(3 \sin x) \right) + 3x^4}{-2x^4}.$$

Dobbiamo calcolare il polinomio di Taylor di grado 4 del numeratore. Nell'esercizio 1 abbiamo visto che $T^4(\cos(3 \tan x) - \cos(3 \sin x)) = -\frac{9}{2}x^4$, quindi (usando il polinomio di Taylor di $\cos x$)

$$\begin{aligned} T^4(\cos x (\cos(3 \tan x) - \cos(3 \sin x)) + 3x^4) &= T^4\left(\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right)\left(-\frac{9}{2}x^4\right) + 3x^4\right) \\ &= -\frac{9}{2}x^4 + 3x^4 = -\frac{3}{2}x^4. \end{aligned}$$

Dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \left(\cos(3 \tan x) - \cos(3 \sin x) \right) + 3x^4}{-2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2}x^4}{-2x^4} = \frac{3}{4}.$$

6. Notiamo che $x - \sin x = x - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, e quindi il limite è

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1 - x + x^2) + \sin x \tan x}{\frac{1}{6}x^3} = 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1 - x + x^2) + \sin x \tan x}{x^3}.$$

Calcoliamo il polinomio di Taylor di grado 3 del numeratore. Dall'esercizio 2 sappiamo che $T^3 \log(1 - x + x^2) = -x + \frac{1}{2}x^2$ e quindi $T^3(x \log(1 - x + x^2)) = -x^2 + \frac{1}{2}x^3$; inoltre

$$T^3(\sin x \tan x) = T^3(T^3 \sin x \cdot T^3 \tan x) = T^3\left(\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right) = x^2.$$

Dunque

$$T^3\left(x \log(1-x+x^2) + \sin x \tan x\right) = \frac{1}{2}x^3,$$

e il limite diventa

$$6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = 3.$$

7. Il limite è nella forma 0/0. Usiamo la regola dell'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(\sqrt[4]{x} + 2x - 2)}{\log(x + 4x^2 - 4)} = (H) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\frac{1}{4}x^{-3/4} + 2}{\sqrt[4]{x} + 2x - 2}}{\frac{1 + 8x}{x + 4x^2 - 4}} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 + 8} = \frac{1}{4}.$$

8. Cambiamo variabile ponendo $y = 1/x$ per cui il limite diventa

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{y^2} \cos(3y) - \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} - 1 \right) e^y \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos(3y) - (1-y)e^y}{y^2} \\ &= \frac{0}{0} = (H) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-3\sin(3y) + e^y - (1-y)e^y}{2y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-3\sin(3y)}{2y} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4 \end{aligned}$$

In alternativa possiamo usare i polinomi di Taylor di ordine 2 di $\cos 3y$ e e^y per cui il limite diventa

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos(3y) - (1-y)e^y}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{2}(3y)^2 - (1-y)(1+y+\frac{1}{2}y^2)}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{9}{2}y^2 - 1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)}{y^2} = -4. \end{aligned}$$