Foglio di esercizi N. 4

Bisogna ricordare che la retta tangente a f in x_0 è data dall'equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

1. Se $f(x) = \log(2x-1) + (x-1)\log x$ e $x_0 = 1$, abbiamo $f(1) = 0$, e

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} + \log x + (x-1)\frac{1}{x}.$$

Quindi $f'(1) = 2$ e la retta tangente è

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 2(x-1) = 2x - 2.$$

2. Se $f(x) = e^{2e^{-x}}$ e $x_0 = 0$, abbiamo $f(0) = e^2$, e

$$f'(x) = e^{2e^{-x}} D(2e^{-x}) = -e^{2e^{-x}} 2e^{-x}.$$

Quindi $f'(0) = -2e^2$ e la retta tangente è

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = e^2 - 2e^2 x.$$

3. Se $f(x) = 4 + (2-x)\log(2e^{x-2} - 1)$ e $x_0 = 2$, abbiamo $f(2) = 4$, e

$$f'(x) = -\log(2e^{x-2} - 1) + (2-x)\frac{2e^{x-2}}{2e^{x-2} - 1}.$$

Quindi $f'(2) = 0$ e la retta tangente è

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) = 4.$$

Nelle seguenti funzioni f troviamo le funzioni modulo e radice quadrata del modulo, che non sono derivabili in 0, quindi bisogna andare a cercare i punti di discontinuità tra i valori che annullano l'argomento di queste due funzioni.

4. Se $f(x) = \sqrt{|e^{x^2} - e|}\sqrt{|x^2 - 1|}$, dobbiamo esaminare i punti x per cui

$$e^{x^2} - e = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x^2 - 1 = 0,$$

ovvero $x = 1$ e $x = -1$. Dato che la funzione è pari basta vedere quello che succede per $x = 1$.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in 1:

$$f'_{\pm}(1) = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{\sqrt{|e^{x^2} - e|\,|x^2 - 1|}}{x - 1}.$$

Per $x \to 1^+$, dato che $|e^{x^2} - e| = e^{x^2} - e$ e $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, si ha

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{(e^{x^2} - e)(x^2 - 1)}{(x - 1)^2}},$$

quindi bisogna calcolare

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{(e^{x^2} - e)(x^2 - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(e^{x^2} - e)(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(e^{x^2} - e)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= 2 \lim_{x \to 1^+} \frac{(e^{x^2} - e)}{x - 1} = 2e \lim_{x \to 1^+} \frac{(e^{x^2 - 1} - 1)}{x - 1} = 2e \lim_{x \to 1^+} \frac{(e^{x^2 - 1} - 1)}{x^2 - 1}(x + 1) = 4e,$$

che da' $f'_{+}(1) = 2\sqrt{e}$. Un calcolo analogo da' $f'_{-}(1) = -2\sqrt{e}$, e quindi 1 (e -1) sono punti angolosi.

5. Se $f(x) = |x|\sqrt{|x^2 - x|}$ dobbiamo esaminare i punti x per cui

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x^2 - x = 0,$$

ovvero $x = 0$ e $x = 1$.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in 0:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{|x|\sqrt{|x^2 - x|}}{x} = \pm \lim_{x \to 0^{\pm}} \sqrt{|x^2 - x|} = 0.$$

Dunque f è derivabile in 0.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in 1:

$$f'_{\pm}(1) = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{|x|\sqrt{|x||x - 1|}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{\sqrt{|x - 1|}}{x - 1} = \pm\infty.$$

Dunque f ha un punto di cuspide in 1.

6. Se $f(x) = |x-1|(\sqrt{|x|} + |x|)$ dobbiamo esaminare i punti x per cui

$$x - 1 = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x = 0,$$

ovvero $x = 0$ e $x = 1$.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in 0:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{|x-1|(\sqrt{|x|} + |x|)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{|x|} + |x|}{x} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{|x|}}{x} + \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{|x|}{x} = \pm\infty \pm 1 = \pm\infty$$

Dunque f ha un punto di cuspide in 0.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in 1:

$$f'_{\pm}(1) = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{|x-1|(\sqrt{|x|} + |x|)}{x - 1} = 2 \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{|x-1|}{x-1} = \pm 2$$

Dunque f ha un punto angoloso in 1.