

Foglio di esercizi N. 3

1. Con il linguaggio degli “o-piccolo”: per $x \rightarrow 0$

$$2^x = 1 + x \log 2 + o(x), \quad 3^x = 1 + x \log 3 + o(x),$$

quindi

$$2^x - 3^x = (\log 2 - \log 3)x + o(x).$$

Dato che

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1,$$

si ha

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x,$$

e quindi (per il teorema dei due carabinieri)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

ovvero

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(1), \quad x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x).$$

Dunque

$$2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x \log 2 + o(x) + o(x) = 1 + x \log 2 + o(x),$$

e, ricordandosi che $\log(1+y) = y + o(y)$,

$$\log\left(2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \log(1 + x \log 2 + o(x)) = x \log 2 + o(x) + o(x \log 2 + o(x)) = x \log 2 + o(x).$$

Dunque

$$\frac{2^x - 3^x}{\log\left(2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{(\log 2 - \log 3)x + o(x)}{x \log 2 + o(x)},$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 3^x}{\log\left(2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 2}.$$

Con i limiti fondamentali: bisogna usare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$

Per usare il secondo con $1 + y = 2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (notare che $y \rightarrow 0$ se $x \rightarrow 0$), moltiplichiamo e dividiamo per $y = 2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1$, ovvero scriviamo

$$\frac{2^x - 3^x}{\log\left(2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{2^x - 3^x}{2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1} \cdot \frac{2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\log\left(2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}.$$

Il secondo fattore è della forma $y/\log(1+y)$ e quindi tende ad 1. Dobbiamo quindi calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1}.$$

Per usare i limiti fondamentali, scriviamo

$$\frac{2^x - 3^x}{2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1} = \frac{(2^x - 1) - (3^x - 1)}{(2^x - 1) + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{2^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x}}{\frac{2^x - 1}{x} + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x}}{\frac{2^x - 1}{x}} = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 2}$$

per il primo dei limiti fondamentali ricordati sopra.

2. Cominciamo con notare che per $x < 0$ si ha $x = -|x|$, per cui il limite è uguale a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left| x\sqrt{|x-3|} - \sin(|x|-3x) \right|}{-|x|} &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \left| \frac{x\sqrt{|x-3|} - \sin(|x|-3x)}{x} \right| \\ &= - \left| \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x\sqrt{|x-3|} - \sin(|x|-3x)}{x} \right|. \end{aligned}$$

Dunque bisogna calcolare il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x\sqrt{|x-3|} - \sin(|x|-3x)}{x}.$$

Il risultato sarà $-|L|$. Eliminiamo i moduli: per $x < 0$ si ha $|x-3| = 3-x$ e $|x| = -x$. Il limite diventa

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{3-x} - \sin(-4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3-x} - \frac{\sin(-4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3-x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-4x)}{x} = \sqrt{3} + 4.$$

Dunque il risultato è $-\sqrt{3} - 4$.

3. Semplifichiamo prima la funzione razionale:

$$\frac{2x^4 + 2x + 1}{x^4 + x} = 2 + \frac{1}{x^4 + x}.$$

Il limite diventa allora

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x^4 + x} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) &= 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}}{x} \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = 2 - 1 = 1.\end{aligned}$$

4. Dato che $x^x = e^{x \log x}$ il limite è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2 + x \sin x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2 + x^4 \cdot \frac{\sin x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2 + o(x^2)} = 5.$$

5. Per $x > 0$ si ha $|x| = x$ e $|x + 1| = x + 1$, per cui il limite è

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x} + x)(x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = +\infty.$$

6. Per esempio

$$a_n = \begin{cases} 3 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

7. Per esempio

$$a_n = \begin{cases} -3 + \frac{(-1)^k}{k} & \text{se } n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N} \\ 3 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

8. Per esempio

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 0, 3, 6, \dots \text{ (oppure: se } n = 3k \text{ con } k \in \mathbb{N}) \\ -2 & \text{se } n = 1, 4, 7, \dots \text{ (oppure: se } n = 3k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{se } n = 2, 5, 8, \dots \text{ (oppure: se } n = 3k + 2 \text{ con } k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$