Foglio di esercizi N. 2

Nei seguenti limiti bisogna ricordare che (se $a > 1$ e $\alpha > 0$)

$$1 << \log_a n << n^\alpha << a^n << n! << n^n,$$

e che la relazione $<<$ è transitiva, ovvero: se $a_n << b_n$ e $b_n << c_n$ allora $a_n << c_n$ (e quindi $n^\alpha << n!$, $1 << a^n$, ecc.).

La "strategia" è quindi di vedere quali sono i termini "dominanti" al numeratore e al denominatore (ovvero quelli che sono $>>$ degli altri). Una volta individuati questi termini, gli altri si possono trascurare.

1. $\displaystyle \lim_n \frac{n! - 4^n}{3^n - n^n} = \lim_n \frac{n!(1 - \frac{4^n}{n!})}{n^n(\frac{3^n}{n^n} - 1)} = -\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0.$

2. $\displaystyle \lim_n \frac{2^n + n!}{3^n + n^7} = \lim_n \frac{n!(1 + \frac{2^n}{n!})}{3^n(1 + \frac{n^7}{3^n})} = \lim_n \frac{n!}{3^n} = +\infty.$

3. $\displaystyle \lim_n \frac{ne^{n^2} + n^2}{n^2 e^n + n^3} = \lim_n \frac{ne^{n^2}(1 + \frac{n}{e^{n^2}})}{n^2 e^n (1 + \frac{n}{e^n})} = \lim_n \frac{e^{n^2-n}}{n} = +\infty.$

L'ultimo limite può essere spiegato con il teorema del confronto: se $n \geq 2$ allora $n^2 - n \geq n$ per cui $e^{n^2-n} \geq e^n$, dunque $\displaystyle \frac{e^{n^2-n}}{n} \geq \frac{e^n}{n}$, e quest'ultima successione tende a $+\infty$.

4. $\displaystyle \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{5^n + n}{2^n - n} - \frac{5^n - n}{2^n + n}\Big) = \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{(5^n + n)(2^n + n) - (5^n - n)(2^n - n)}{(2^n - n)(2^n + n)}\Big) = \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{2n5^n + 2n2^n}{4^n - n^2}\Big)$
$\displaystyle = \lim_n 2\,\frac{5^n + 2^n}{4^n - n^2} = \lim_n 2\,\frac{5^n}{4^n} = \lim_n 2\left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty.$

L'ultimo termine tende a $+\infty$ perche' la base $\frac{5}{4}$ è maggiore di 1.

5. $\displaystyle \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{4^n + n}{2^n - n} - \frac{4^n - n}{2^n + n}\Big) = \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{(4^n + n)(2^n + n) - (4^n - n)(2^n - n)}{(2^n - n)(2^n + n)}\Big) = \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{2n4^n + 2n2^n}{4^n - n^2}\Big)$
$\displaystyle = \lim_n 2\,\frac{4^n + 2^n}{4^n - n^2} = \lim_n 2\,\frac{4^n}{4^n} = 2.$

6. In questo esercizio bisogna usare la definizione di $n!$ e calcolare il limite $\lim_n \dfrac{\sin n}{n} = 0$ (gia' fatto a lezione). Si ha allora

$$\lim_n \frac{(n+1)! - 2^n}{(2n - \sin n)\, n!} = \lim_n \frac{(n+1)!(1 - \frac{2^n}{(n+1)!})}{n(2 - \frac{\sin n}{n})\, n!} = \lim_n \frac{(n+1)!}{2n\, n!} = \lim_n \frac{n!(n+1)}{2n\, n!} = \lim_n \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

7. $\displaystyle \lim_n \frac{n!\,(1+n)^n + (n-1)!(1+n)\,n^n}{n!\,n^n} = \lim_n \Big(\frac{n!\,(1+n)^n}{n!\,n^n} + \frac{(n-1)!(1+n)\,n^n}{n!\,n^n} \Big)$

$$= \lim_n \Big(\frac{(1+n)^n}{n^n} + \frac{(n-1)!(1+n)}{(n-1)!n} \Big) = \lim_n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n + \lim_n \frac{1+n}{n} = e + 1.$$

Qui abbiamo usato il limite fondamentale $\lim_n (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

8. $\displaystyle \lim_n \frac{n! - (4n)^n}{4n - n^{3n}} = \lim_n \frac{n! - 4^n\, n^n}{4n - n^{3n}} = \lim_n \frac{4^n\, n^n (\frac{n!}{4^n\, n^n} - 1)}{n^{3n}(\frac{4n}{n^{3n}} - 1)} = \lim_n \frac{4^n\, n^n}{n^{3n}} = \lim_n \frac{4^n}{n^{2n}} = 0.$

9. Questo è un quoziente di polinomi. Dobbiamo veder quali sono i termini di grado massimo di numeratore e denominatore.

Usando la formula di Newton si ha

$$(4-n)^7 = 4^7 + 7(-n)4^6 + \cdots + 7 \cdot 4(-n)^6 + (-n)^7 = 4^7 - 7n4^6 + \cdots + 28n^6 - n^7,$$

per cui il termine di grado massimo di $(4-n)^7 + n^7$ è $28n^6$.

Allo stesso modo, usando la formula di Newton si ha

$$(4-n)^6 = 4^6 + 6(-n)4^5 + \cdots + 6 \cdot 4(-n)^5 + (-n)^6 = 4^6 - 6n4^5 + \cdots - 24n^5 + n^6,$$

per cui il termine di grado massimo di $(4-n)^6 + n^6$ è $2n^6$. Dunque

$$\lim_n \frac{(4-n)^7 + n^7}{(4-n)^6 + n^6} = \frac{28}{2} = 14.$$