Foglio di esercizi N. 1 - Soluzioni

7 ottobre 2004

1. Dato che $x < 0 \Longleftrightarrow 1/x < 0$

$$A = \left\{ \frac{3}{2 - 3^{1/x}} : x < 0 \right\} = \left\{ \frac{3}{2 - 3^{1/x}} : \frac{1}{x} < 0 \right\} = \left\{ \frac{3}{2 - 3^{y}} : y < 0 \right\}$$

Dato che $\{3^y : y < 0\} = (0,1)$ (per convincersi dare un'occhiata al grafico di 3^x) si ha

$$A = \left\{ \frac{3}{2 - z} : 0 < z < 1 \right\}$$

Dato che $\{2 - z : 0 < z < 1\} = (1,2)$, si ha

$$A = \left\{ \frac{3}{w} : 1 < w < 2 \right\} = \left(\frac{3}{2}, 3 \right);$$

quindi $\inf A = \frac{3}{2}$, $\sup A = 3$ ma non esistono min/max.

2. Dato che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π basta studiare l'insieme A per $-\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; ovvero

$$A = \left\{ (\cos x)^2 : -\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Si ha

$$\left\{ x : -\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \left[-\frac{5}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \right],$$

quindi

$$A = \left\{ (\cos x)^2 : x \in \left[-\frac{5}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \right] \right\}.$$

Dato che

$$\left\{ \cos x : x \in \left[-\frac{5}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \right] \right\} = [-1, 1],$$

si ha

$$A = \{ y^2 : y \in [-1, 1] \} = [0, 1],$$

per cui $\min A = \inf A = 0$ e $\sup A = \max A = 1$.

3. Dato che $x > \log_2 3 \Longleftrightarrow 2^x > 3$ si ha

$$A = \{4^x - 2^{x+1} + 1 : 2^x > 3\} = \{(2^x)^2 - 2\, 2^x + 1 : 2^x > 3\} = \{z^2 - 2z + 1 : z > 3\}.$$

Quindi $A = (4, +\infty)$ (per convincersene, disegnare la parabola $y = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$, oppure scrivere $A = \{(z-1)^2 : z > 3\} = \{w^2 : w > 2\}$. Quindi $\inf A = 4$, $\sup A = +\infty$ ma non esistono min/max.

4. Deve essere
$$\begin{cases} 1 - x > 0 \\ x^2 \neq 0, \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0. \end{cases}$$
Il dominio è quindi $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

5. Deve essere (bisogna ricordarsi che $\arccos y = 0 \iff y = \cos 0 = 1$)
$$\begin{cases} -1 \leq x + \frac{1}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{3} - x < 1 \end{cases}, \text{ ovvero } \quad \begin{cases} -\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{3} < -x \leq \frac{4}{3}, \end{cases}, \text{ ovvero } \quad x \in \Big[-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\Big] \cap \Big(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\Big] = \Big(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\Big].$$

6. I grafici sono quelli di x^2 e $|x^2 - 2|$ rispettivamente, modificati per $x \in \mathbb{Z}$: