Foglio di esercizi N. 1 - Soluzioni

1. *Determinare il dominio della funzione* $f(x) = \log_3(1 + \log_3(3x))$.

Deve essere $1 + \log_3(3x) > 0$, ovvero $\log_3(3x) > -1$, ovvero (prendendo l'esponenziale in base 3 di entrambi i membri) $3x > 1/3$, ovvero $x > 1/9$. Questa condizione comprende anche la condizione $x > 0$ che definisce il dominio di $\log(3x)$. Dunque il dominio è $(1/9, +\infty)$.

2. *Determinare il dominio della funzione* $f(x) = e^x \sqrt{\log_2(2x - x^2) + 1}$.

La funzione e^x è definita per ogni valore di x, quindi basta esaminare il dominio di $\sqrt{\log_2(2x - x^2) + 1}$, che è definta quando $\log_2(2x - x^2) + 1 \geq 0$, ovvero $2x - x^2 \geq 1/2$, ovvero

$$x^2 - 2x + \frac{1}{2} \leq 0, \qquad \text{ovvero} \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dunque il dominio è $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

3. *Determinare il dominio della funzione* $f(x) = \dfrac{\log(x^2 - 4)}{\log(9 - x^2)}$.

Devono essere soddisfatte contemporaneamente le condizioni

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 9 - x^2 > 0 \\ \log(9 - x^2) \neq 0 \text{ ovvero } 9 - x^2 \neq 1, \end{cases}$$

che si scrivono equivalentemente

$$\begin{cases} x^2 > 4 & \text{ovvero} \quad x < -2 \text{ oppure } x > 2 \\ x^2 < 9 & \text{ovvero} \quad -3 < x < 3 \\ x^2 \neq 8 & \text{ovvero} \quad x \neq -2\sqrt{2} \text{ oppure } x \neq 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Dunque, deve essere $-3 < x < -2$ oppure $2 < x < 3$ e contemporaneamente $x \neq \pm 2\sqrt{2}$. Come unione di intervalli, il dominio di f si scrive

$$\text{dom} f = (-3, -2\sqrt{2}) \cup (-2\sqrt{2}, -2) \cup (2, 2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3).$$

4. *Determinare il dominio della funzione* $f(x) = \sqrt{\log(1 - \sin x)}$.

Deve essere $\log(1 - \sin x) \geq 0$, ovvero $1 - \sin x \geq 1$, ovvero $\sin x \leq 0$. Questo accade per tutti gli intervalli della forma $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ con k intero (per esempio per $[-\pi.0]$ ($k = 0$), $[\pi, 2\pi]$ ($k = 1$), etc.). Dunque il dominio è l'unione (infinita) di tutti questi insiemi

$$\text{dom} f = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi] = \{x : \exists k \in \mathbf{Z} : (2k-1)\pi \leq x \leq 2k\}.$$

5. *Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione* $f(x) = 4^x$ *sulla semiretta* $(-\infty, \log_2 3]$.

La funzione 4^x è strettamente crescente e definita su un intervallo. Dato che l'intervallo è chiuso superiormente, esiste il massimo (che quindi è anche il sup) ed è uguale al valore della funzione in $\log_2 3$, ovvero

$$4^{\log_2 3} = 2^{2 \log_2 3} = 2^{\log_2 9} = 9.$$

Dato che l'intervallo è aperto inferiormente, non esiste il minimo di f. È facile convincersi che l'inf è 0, ricordandosi il grafico di 4^x (notare che $4^x > 0$ per ogni x e quindi $\inf f \leq 0$). *Questo ragionamento diventerà parte di una regola generale quando si tratteranno i limiti.*

6. *Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione* $f(x) = \log^2 x + 2\log x + 1$ *sull'insieme* $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$.

Dobbiamo calcolare gli estremi dell'insieme

$$\{\log^2 x + 2\log x + 1 : x \geq 1\} = \{y^2 + 2y + 1 : y = \log x,\ x \geq 1\} = \{z^2 + 2z + 1 : z \geq 0\}.$$

Questo insieme è uguale a $[1, +\infty)$. Questo si può vedere esaminando il grafico noto della parabola $y = x^2 + 2x + 1$, o notando che su $[0, +\infty)$ la funzione $g(x) = x^2 + 2x + 1$ è strettamente crescente (è somma di funzioni strettamente crescenti) e non è superiormente limitata. Dunque

$$\min f = 1, \qquad \sup f = +\infty.$$

7. *Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione* $f(x) = \cos\Big(\dfrac{\pi}{2 + x^2}\Big)$.

Il dominio della funzione è tutto $\mathbf{R}$. Dobbiamo calcolare gli estremi dell'insieme

$$\Big\{\cos\Big(\frac{\pi}{2 + x^2}\Big) : x \in \mathbf{R}\Big\} = \Big\{\cos\Big(\frac{\pi}{y}\Big) : y \in \mathbf{R} : y \geq 2\Big\} = \Big\{\cos z : z \in \mathbf{R} : 0 < z \leq \frac{\pi}{2}\Big\}$$

(abbiamo cambiato variabili: $y = 2 + x^2$ (e quindi $y \in [2, +\infty)$) e $z = \pi/y$ (e quindi $z \in (0, \pi/2]$). Dunque bisogna trovare gli estremi della funzione coseno su $(0, \pi/2]$. Ricordando il grafico del coseno si ha quindi

$$\sup f = 1 \qquad \min f = 0,$$

e non esiste $\max f$. Notare che $\cos x$ è strettamente crescente in $(0, \pi/2]$, e usando questa informazione si ha un altro modo per calcolarsi gli estremi.

8. *Determinare il dominio e (se esistono) max/min, sup/inf della funzione* $f(x) = \dfrac{1}{1 - (\cos x)^2}$.

Il dominio della funzione è

$$\{x \in \mathbf{R}; \cos x \notin \{-1, 1\}\} = \{x \in \mathbf{R} : x \neq k\pi\ \forall k \in \mathbf{Z}\}.$$

Nel dominio si ha $\cos^2 x \in [0, 1)$, e quindi $1 - \cos^2 x \in (0, 1]$. Dunque

$$\Big\{\frac{1}{1 - (\cos x)^2} : \cos x \notin \{-1, 1\}\Big\} = \Big\{\frac{1}{y} : y \in (0, 1]\Big\} = [1, +\infty),$$

e quindi

$$\min f = 1, \qquad \sup f = +\infty.$$

Notare che si può anche scrivere $f(x) = \dfrac{1}{(\sin x)^2}$. L'esercizio non viene semplificato sensibilmente in questa forma.

Foglio di esercizi N. 2 - Soluzioni

1. *Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & \textit{se } x \in \mathbf{Z} \\ 3x^2 - 6 & \textit{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

L'immagine di f è

$$\mathrm{Im}(f) = \{3x^2 - 6 : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} \cup \{2x - x^3 : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\}.$$

Si ha

$$\{3x^2 - 6 : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} = (-6, 6) \setminus \{-3\} = (-6, -3) \cup (-3, 6),$$
$$\{2x - x^3 : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\} = \{0, \pm 1, \pm 4\},$$

e quindi

$$\mathrm{Im}(f) = (-6, -3) \cup (-3, 6).$$

Dunque f non ha ne minimo ne massimo.

2. *Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \textit{se } x \in \mathbf{Z} \\ ||x| - 1| & \textit{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

L'immagine di f è

$$\mathrm{Im}(f) = \{||x| - 1| : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} \cup \{x^2 - 2x + 2 : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\}.$$

Si ha

$$\{||x| - 1| : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} = (0, 1)$$
$$\{x^2 - 2x + 2 : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\} = \{1, 2, 5, 10\},$$

e quindi

$$\mathrm{Im}(f) = (0, 1) \cup \{2, 5, 10\}.$$

Dunque f non ha ne minimo e $\max f = 10$.

3. *Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \textit{se } x \in \mathbf{Z} \\ \sqrt{|x|} & \textit{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

L'immagine di f è

$$\mathrm{Im}(f) = \{\sqrt{|x|} : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} \cup \{x^2 - 2x : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\}.$$

Si ha

$$\{\sqrt{|x|} : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} = (0, \sqrt{2}) \setminus \{1\}$$
$$\{x^2 - 2x : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\} = \{-1, 0, 3, 8\},$$

e quindi

$$\mathrm{Im}(f) = [0,1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup \{-1, 3, 8\}.$$

Dunque $\min f = -1$ e $\max f = 10$.

4. *Determinare (se esiste)* $\min\Big\{e^{-n}\Big(\log(n-5)\Big)^2 : n \in \mathbf{N},\ n \geq 6\Big\}$.

Notiamo che la successione è non negativa, e per $n = 6$ il termine della successione è 0, quindi il minimo è 0.

5. *Calcolare*

$$\lim_n \frac{\log(n^2 + \sin n)}{\log(n + \cos n)}.$$

Si ha

$$\log(n^2 + \sin n) = \log\Big(n^2\Big(1 + \frac{\sin n}{n^2}\Big)\Big) = \log n^2 + \log\Big(1 + \frac{\sin n}{n^2}\Big)$$

e

$$\log(n + \cos n) = \log\Big(n\Big(1 + \frac{\cos n}{n}\Big)\Big) = \log n + \log\Big(1 + \frac{\cos n}{n}\Big).$$

Dato che

$$\lim_n \log\Big(1 + \frac{\cos n}{n}\Big) = \lim_n \log\Big(1 + \frac{\sin n}{n^2}\Big) = \log 1 = 0,$$

il limite è uguale al

$$\lim_n \frac{\log n^2}{\log n)} = \lim_n \frac{2\log n}{\log n)} = 2.$$

6. *Calcolare*

$$\lim_n \frac{(n+1)^5 - n^5 + \arctan n}{n^4 + 3n\sin n + \sqrt{n}}.$$

Si ha $(n+1)^5 - n^5 = 5n^4 + \ldots + 5n + 1$, quindi, raccogliendo n^4 e semplificando si ottiene

$$\lim_n \frac{n^4\Big(5 + \ldots + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{\arctan n}{n^4}\Big)}{n^4\Big(1 + 3\frac{\sin n}{n^3} + \frac{1}{n^3\sqrt{n}}\Big)} = 5.$$

7. *Calcolare*

$$\lim_n \frac{\Big(1 + \frac{4}{n}\Big)^{3n}}{\Big(1 + \frac{5}{n}\Big)^{2n}}.$$

Notare che $(m = n/4)$

$$\lim_n \Big(1 + \frac{4}{n}\Big)^{3n} = \lim_m \Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^{12m} = e^{12}$$

e $(m = n/5)$

$$\lim_n \Big(1 + \frac{5}{n}\Big)^{2n} = \lim_m \Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^{10m} = e^{10},$$

quindi il limite vale $e^{12}/e^{10} = e^2$.

8. *Calcolare*

$$\lim_n \Big(\sqrt{n^2 + 2n + 2} - n\Big).$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $\Big(\sqrt{n^2 + 2n + 2} + n\Big)$ il limite diventa

$$\lim_n \frac{2n + 2}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + n} = \lim_n \frac{2 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1} = 1.$$

Foglio di esercizi N. 3 - soluzioni

1. *Dire quali sono i possibili limiti delle sottosuccessioni della successione*

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n.$$

Per n pari $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ che tende a e. Per n pari $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ che tende a $e^{-1} = \frac{1}{e}$. Dunque i limiti sono e e $\frac{1}{e}$.

2. *Dire quali sono i possibili limiti delle sottosuccessioni della successione*

$$a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Esaminando i termini della successione, per la periodicità di sin e cos, si ha che $a_{n+8} = a_n$, ovvero i termini si ripetono uguali dopo 8 indici. Quindi le possibili sottosuccessioni convergenti devono tendere ad uno dei valori $a_0, a_1, \dots, a_7$, che sono 0, 1, -1, $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm 1$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm 1$.

3. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+4x))}{\tan(4\log(1+x))}.$$

Usando il fatto che $\sin y = y + o(y)$, $\log(1+4x) = 4x + o(x)$ $\tan y = y + o(y)$ e $\log(1+x) = x + o(x)$, si ottiene

$$\frac{\sin(\log(1+4x))}{\tan(4\log(1+x))} = \frac{4x + o(x)}{4(x + o(x))} = 1 + o(1),$$

ovvero il limite è 1.

4. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(3+x)^x - 1}{(9+x)^x - 1}.$$

Ricordando che $e^y - 1 = y + o(y)$ si ha ($c = 3$ o 9)

$$(1+cx)^x - 1 = e^{x\log(c+x)} - 1 = x\log c + o(x)$$

e dunque

$$\frac{(3+x)^x - 1}{(9+x)^x - 1} = \frac{x\log 3 + o(x)}{x\log 9 + o(x)} = \frac{1}{2} + o(1),$$

ovvero il limite è 1/2

5. *Calcolare*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x+3)^x}{x^{x+\sin x}}.$$

Si ha

$$\frac{(x+3)^x}{x^{x+\sin x}} = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \frac{1}{x^{\sin x}} = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x x^{-\sin x}.$$

Dato che $\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \to e^3$, dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} x^{-\sin x}.$$

Ma questo limite non esiste perchè quando $\sin x = 1$ si ha $x^{-\sin x} = 1/x$ che tende a 0, mentre quando $\sin x = -1$ si ha $x^{-\sin x} = x$ che tende a $+\infty$.

6. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{1/x}.$$

Scriviamo

$$(1+x+x^2)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\log(1+x+x^2)}.$$

Si ha

$$\frac{1}{x}\log(1+x+x^2) = \frac{x+x^2+o(x+x^2)}{x} = \frac{x+x^2+o(x)}{x} = 1+o(1),$$

quindi il limite è $e^1 = e$.

7. *Dire per quali valori di* α *il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+x^2)^x-1}{x^\alpha}$$

è finito.

Scriviamo

$$(1+x+x^2)^x - 1 = e^{x\log(1+x+x^2)} - 1 = x\log(1+x+x^2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2).$$

Quindi il limite è uguale al limite

$$\lim_{x\to 0} x^{2-\alpha},$$

che è finito se e solo se $2-\alpha \geq 0$, ovvero $\alpha \leq 2$.

8. *Dire per quale valori di* a *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{ax} & \textit{se } x > 0 \\ a + x & \textit{se } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua.

Deve essere

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x),$$

ovvero

$$\frac{3}{a} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{ax} = \lim_{x\to 0^-}(x+a) = a.$$

Dunque $a^2 = 3$, ovvero $a = \sqrt{3}$ o $a = -\sqrt{3}$.

Foglio N.4 - Soluzioni.

1. Il dominio di $\sqrt{2-x}$ è $(-\infty, 2]$; il denominatore si annulla solo in 1. Quindi la risposta esatta è **A**.

2. Una successione convergente è limitata, quindi anche inferiormente limitata. Quindi la risposta esatta è **D**. Le altre possono essere false.

3. Dato che $n^4 << 3^n << 4^n$ il limite è uguale a

$$\lim_n \frac{-4^n}{3^n} = -\lim_n (\frac{4}{3})^n = -\infty.$$

Quindi la risposta esatta è **B**.

4. Dato che $\log(1+3x) = 3x + o(x)$ $e^x = 1 + x + o(x)$, $x^2 = o(x)$ e $x^3 = o(x)$ il limite è uguale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{x} = 3.$$

Quindi la risposta esatta è **E**.

5. Razionalizzando, si ha che il limite è uguale a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5 + x^2}{\sqrt{x^6 + 2x^5 + x^2} - x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5}{-2x^3} = -\lim_{x\to-\infty} x^2 = -\infty.$$

Quindi la risposta esatta è **C**.

6. Eliminando le funzioni che sono trascurabili, si ha che il limite è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^4}{\log x^5} = \frac{4}{5}.$$

Quindi la risposta esatta è **C**.

7. Il minimo di $2|x| - 1$ è -1 (per $x = 0 \in \mathbf{Z}$) mentre il minimo di $|x-1|$ vale 0. Quindi il minimo è -1 e la risposta esatta è **D**.

8. Cambiando variabile $y = \log x$ l'insieme diviene $\{y^2 - 2y : y > 3\}$. Dato chela funzione $y^2 - 2y$ è crescente e continua per $y > 3$, l'estremo inferiore è assunto in 3 e vale 3. Quindi la risposta esatta è **C**.

9. Semplificando, il limite diventa la somma di limiti

$$\lim_n \frac{(1+n)^{n+1}}{n^{n+1}} + \frac{(1+2n)}{n} = \lim_n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \frac{n+1}{n} + \frac{(1+2n)}{n} = e + 2.$$

Quindi la risposta esatta è **E**.

10. Dato che $\sin(\pi/2n) \to 0$, bisogna solo esaminare la successione $-\tan((2n+1)\pi/4)$, che prende alternativamente i valori 1 e -1. Quindi la risposta esatta è **E**.

11. Facendo una divisione di polinomi, si ha

$$\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1},$$

quindi possimao esaminare la sola funzione $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x \sin x}$

Se l'asintoto di g è $y = mx + q$, il calcolo del coefficiente angolare m da'

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x\sin x}}{x} = -1.$$

Il termine q è determinato da

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + 2x\sin x} + x.$$

Razionalizzando si ha il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x\sin x}{\sqrt{x^2 + 2x\sin x} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x\sin x}{-2x + o(x)} = -\lim_{x\to-\infty} \sin x,$$

che non esiste. Quindi la risposta esatta è **E**.

A. La funzione f è decrescente per $x < 2/3$ e crescente per $x > 2/3$, quindi la successione a_n è crescente per i termini n con $1/n < 2/3$, ovvero $n > 3/2$, ovvero da $n = 2$ in poi. Per la monotonia, si ha

$$\min\{a_n : n \geq 2\} = a_2 = \frac{1}{4}, \qquad \sup\{a_n : n \geq 2\} = \lim_n a_n = f(0) = 4.$$

Inoltre $a_1 = 1$. Quindi $\min\{a_n\} = \frac{1}{4}$ e non esiste massimo.

B. Per esempio (ma ci sono altre vie possibili)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{\log(1 + \sin x)} = \lim_{x\to 0^+} e^x \cdot \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\log(1 + \sin x)} = 1.$$

Foglio di esercizi N. 5 - Soluzioni

1. *Calcolare derivata destra e sinistra della funzione*

$$f(x) = |\arctan(|x^2 + 3x| - x^2 - 3x - 1)|$$

in $x = 0$.

Sostituendo $x = 0$ si ha $\arctan(|x^2 + 3x| - x^2 - 3x - 1) = \arctan(-1) = -\pi/4$, quindi, in un intorno di $x = 0$ si ha

$$f(x) = -\arctan(|x^2 + 3x| - x^2 - 3x - 1).$$

Si ha

$$|x^2 + 3x| = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se } x < -3 \text{ o } x > 0 \\ -x^2 - 3x & \text{se } -3 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Quindi, per $x \to 0^-$ si ha

$$f(x) = -\arctan(-x^2 - 3x - x^2 - 3x - 1) = -\arctan(-2x^2 - 6x - 1) = \arctan(2x^2 + 6x + 1).$$

Dato che

$$D\arctan(2x^2 + 6x + 1) = \frac{1}{1 + (2x^2 + 6x + 1)^2} \cdot (4x + 6),$$

si ha (sostituendo $x = 0$) $f'_(0) = 3$.

Per $x \to 0^+$ si ha $f(x) = -\arctan(-1) = \pi/4$ e $f'_+(0) = 0$.

2. *Calcolare derivata destra e sinistra della funzione*

$$f(x) = |3\sin|\pi - x| - 4\cos x|$$

in $x = \pi/2$.

Per $x = \pi/2$ si ha $3\sin|\pi - x| - 4\cos x = 3\sin(\pi/2) - 4\cos(\pi/2) = 3$, quindi in un intorno di $\pi/2$ si ha $f(x) = 3\sin|\pi - x| - 4\cos x$ e inoltre $|pi - x| = \pi - x$; dunque la funzione è uguale a

$$f(x) = 3\sin(\pi - x) - 4\cos x,$$

che è derivabile e

$$f'(x) = -3\cos(\pi - x) + 4\sin x.$$

Sostituendo $x = \pi/2$ si ha $f'(\pi/2) = 4$.

3. *Calcolare la retta tangente al grafico della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x}\log x \arctan(x-6)$$

in $x = 6$.

Si ha $f(6) = 0$ e

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\log x \arctan(x-6) + \frac{1}{x^2}\arctan(x-6) + \frac{1}{x}\log x \frac{1}{1+(x-6)^2}.$$

Dunque $f'(6) = \frac{1}{6}\log 6$.

L'equazione della retta tangente è

$$y = f(6) + f'(6)(x-6) = \frac{1}{6}\log 6(x-6) = \frac{\log 6}{6}x - \log 6.$$

4. *Descrivere i punti di non-derivabilità di*

$$f(x) = \sqrt{||x|-5| - |x| + 5}$$

La funzione si può scrivere come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -5 \\ \sqrt{2x+10} & \text{se } -5 \le x \le 0 \\ \sqrt{-2x+10} & \text{se } 0 < x \le 5 \\ 0 & \text{se } x > 5. \end{cases}$$

Dunque, si ha $f'_-(-5) = f'_+(5) = 0$, $f'_+(-5) = +\infty$, $f_-(0) = 1/\sqrt{10}$, $f_+(0) = -1/\sqrt{10}$, $f'_-(-5) = -\infty$.

Dunque -5, 0 e 5 sono punti angolosi.

5. *Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital*

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(x^2\cos\Big(\frac{2}{x}\Big) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}}\Big).$$

Cambiando variabile $y = 1/x$, si ottiene il limite

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{\cos 2y + (1-y)e^y}{y^2} = (H) = \lim_{y\to 0^+}\frac{-2\sin 2y + ye^y}{2y}$$

$$= (H) = \lim_{y\to 0^+}\frac{-4\cos 2y + (y+1)e^y}{2} = -\frac{3}{2}.$$

6. *Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\sqrt{x}+2x-2)}{\log(x+3x^2-3)}$$

Si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\sqrt{x}+2x-2)}{\log(x+3x^2-3)}=(H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(1/2\sqrt{x})+2}{\sqrt{x}+2x-2}}{\frac{1+6x}{x+3x^2-3}}.$$
Raccogliendo gli infiniti di ordine maggiore il limite diviene
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{2x}}{\frac{6x}{3x^2}}=\frac{1}{2}.$$

7. *Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital*
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\log(1+x+x^2)-\tan x\sin x}{x^3}$$

In questo caso il calcolo è possibile ma risulta molto complicato. *Si sconsiglia quindi l'uso della regola dell'Hôpital.*

8. *Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log x+\sin x)}{\log(\log^3 x+\cos x)}$$

Il rapporto delle derivate risulta
$$\frac{\frac{1}{\log x+\sin x}\cdot(\frac{1}{x}+\cos x)}{\frac{1}{\log^3 x+\cos x}\cdot(\frac{3\log^2 x}{x}-\sin x)}=\frac{\log^3 x+\cos x}{\log x+\sin x}\cdot\frac{\frac{1}{x}+\cos x}{\frac{3\log^2 x}{x}-\sin x},$$
il cui limite non esiste, e quindi non si ouò applicare la regola dell'Hôpital.

Foglio di esercizi N. 6 - Soluzioni

1. *Determinare il polinomio di Taylor di ordine* 4 *e centro* 0 *di* $f(x)=\cos(5\tan x)-\cos(5\sin x)$ *e calcolare il limite*
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x(\cos(5\tan x)-\cos(5\sin x))+5x^4}{2x^4+\sin(x^5)-x^6};$$

Si ha
$$T^4\cos y=1-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{24}y^4,$$
e
$$T^4\tan x=x+\frac{1}{3}x^3,$$
quindi
$$\begin{aligned}T^4(\cos(5\tan x))&=T^4\Big(1-\frac{5^2}{2}(x+\frac{1}{3}x^3)^2+\frac{5^4}{24}(x+\frac{1}{3}x^3)^4\Big)\\&=1-\frac{5^2}{2}(x^2+\frac{2}{3}x^4)+\frac{5^4}{24}x^4\end{aligned}$$

Analogamente, dato che
$$T^4\sin x=x-\frac{1}{6}x^3,$$

si ha

$$T^4(\cos(5\sin x)) = T^4\Big(1 - \frac{5^2}{2}(x - \frac{1}{6}x^3)^2 + \frac{5^4}{24}(x - \frac{1}{6}x^3)^4\Big)$$
$$= 1 - \frac{5^2}{2}(x^2 - \frac{1}{3}x^4) + \frac{5^4}{24}x^4$$

Dunque

$$T^4(\cos(5\tan x) - \cos(5\sin x)) = -\frac{5^2}{2}(\frac{2}{3} + \frac{1}{3})x^4 = -\frac{25}{2}x^4,$$

e, ricordandosi che $\sin(x^5) = o(x^4)$, il limite diviene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{25}{2}x^4\cos x + 5x^4}{2x^4} = -\frac{25}{4}\lim_{x\to 0^+}\cos x + \frac{5}{2} = -\frac{15}{4}.$$

2. *Calcolare il polinomio di Taylor di centro* 0 *e ordine* 3 *di*

$$f(x) = \sqrt[3]{1+4x} + \sqrt[4]{1-3x} - 2;$$

Calcoliamo il polinomio di Taylor $T^3((1+\alpha x)^{\frac{1}{m}})$ usando la definizione. Abbiamo

$$D(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-1}\alpha, \qquad D^{(2)}(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-2}\alpha^2,$$
$$D^{(3)}(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-3}\alpha^3,$$

quindi (usando la formula per $T^3 f$)

$$T^3((1+\alpha x)^{\frac{1}{m}}) = 1 + \frac{\alpha}{m}x + \frac{\alpha^2}{2}\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)x^2 + \frac{\alpha^3}{6}\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)x^3.$$

In particolare ($\alpha = 4$ e $m = 3$)

$$T^3(\sqrt[3]{1+4x}) = T^3((1+4x)^{\frac{1}{3}}) = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{2^4}{3^2}x^2 + \frac{2^6 5}{3^4}x^3$$

e ($\alpha = -3$ e $m = 4$)

$$T^3(\sqrt[4]{1-3x}) = T^3((1-3x)^{\frac{1}{4}}) = 1 - \frac{3}{4}x - \frac{3^3}{2^5}x^2 - \frac{3^3}{2^7}7x^3.$$

Infine

$$T^3(\sqrt[3]{1+4x} + \sqrt[4]{1-3x} - 2) = \frac{7}{12}x - \Big(\frac{2^4}{3^2} + \frac{3^3}{2^5}\Big)x^2 + \Big(\frac{5\cdot 2^6}{3^4} - \frac{7\cdot 3^3}{2^7}\Big)x^3.$$

3. *Calcolare il polinomio di Taylor di centro* 0 *e ordine* 5 *della funzione*

$$f(x) = 3x\cos(2x) + 6\log(1+x^3).$$

Dato che $\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \cdots$, si ha $T^5(6\log(1+x^3)) = 6x^3$, mentre

$$T^5(3x\cos(2x)) = 3xT^4(\cos(2x)) = 3x\Big(1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4\Big) = 3x - 6x^3 + 2x^5.$$

Dunque, si ha

$$T^5 f = 3x + 2x^5.$$

4. *Calcolare il polinomio di Taylor di centro* 0 *e ordine* 2 *di* $f(x) = e^x \log(1+x)\cos x$ *e calcolare*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \log(1+x)\cos x - \sin x}{\sin x \tan x}.$$

Si ha

$$T^2 e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad T^2 \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2}, \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Dunque

$$\begin{aligned} T^2(e^x \log(1+x)\cos x) &= T^2((1+x+\frac{x^2}{2})(x-\frac{x^2}{2})(1-\frac{1}{2}x^2)) \\ &= x\,T^1((1+x+\frac{x^2}{2})(1-\frac{x}{2})(1-\frac{1}{2}x^2)) \\ &= x\,T^1((1+x)(1-\frac{x}{2})) = x(1+\frac{1}{2}x) = x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Ricordando che $\sin x = x + o(x)$ e $\tan x = x + o(x)$, il limite diventa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \log(1+x)\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + \frac{1}{2}x^2 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

5. *Determinare gli intervalli dove la funzione*

$$f(x) = \left|\frac{x}{\log|2x|}\right|$$

è non decrescente.

Chiamiamo

$$g(x) = \frac{x}{\log|2x|}.$$

La funzione f si può anche scrivere

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } -\frac{1}{2} < x < 0 \text{ o } x > \frac{1}{2} \\ -g(x) & \text{se } x < -\frac{1}{2} \text{ o } 0 < x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata di g:

$$g'(x) = \frac{\log|2x| - 1}{\log^2|2x|}.$$

Il segno di g' è quello di $\log|2x| - 1$, che è non negativo se $2|x| \geq e$, ovvero $|x| \geq e/2$. Dato che

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{se } -\frac{1}{2} < x < 0 \text{ o } x > \frac{1}{2} \\ -g'(x) & \text{se } x < -\frac{1}{2} \text{ o } 0 < x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

si ha che $f' \geq 0$ negli intervalli $(-\frac{e}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$, $(e/2, +\infty)$.

Gli intervalli in cui è non decrescente sono (quelli contenuti in uno sei seguenti) $[-\frac{e}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$ e $[\frac{e}{2}, +\infty)$.

6. *Determinare il più piccolo valore* a *tale che la funzione*

$$f(x) = e^x \log^2|x-5|$$

sia crescente in $(a, +\infty)$.

Dato che la funzione non è definita per $x = 5$ deve essere $a \geq 5$, per cui possiamo limitarci a studiare la funzione

$$g(x) = e^x \log^2(x-5).$$

La derivata di g è

$$g'(x) = e^x \log^2(x-5) + e^x\, 2\log(x-5)\frac{1}{x-5} = e^x \log(x-5)(\log(x-5)(x-5)+2)\frac{1}{x-5}$$

I termini e^x e $x-5$ sono positivi, mentre si ha $\log(x-5) > 0$ se e solo se $x-5 > 1$, ovvero $x > 6$. Studiamo il segno di $h(x) = (x-5)\log(x-5)+2$ per $x > 5$. La derivata di h è

$$h'(x) = \log(x-5)+1,$$

Dunque h è decrescente in $(5, 5+e^{-1})$ e crescente in $(5+e^{-1}, +\infty)$, e il suo minimo vale $h(5+e^{-1}) = 2-e^{-1}$, che è strettamente positivo. Dunque h 'e sempre positiva, per cui $g' > 0$ per $x > 6$ e la risposta è $a = 6$.

7. *Determinare gli intervalli in cui è crescente la funzione*

$$f(x) = |x^2-4|e^{x^2/3}.$$

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-4)e^{x^2/3} & \text{se } |x| > 2, \\ (4-x^2)e^{x^2/3} & \text{se } -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Studiamo quindi la funzione

$$g(x) = (x^2-4)e^{x^2/3},$$

la cui derivata è

$$g'(x) = (2x + (x^2-4)\frac{2}{3}x)e^{x^2/3} = \frac{2x}{3}(x^2-1)e^{x^2/3}.$$

Si ha $g' > 0$ negli intervalli $(-1, 0)$ e $(1, +\infty)$.

Dato che

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{se } |x| > 2, \\ -g'(x) & \text{se } -2 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

si ha $f' > 0$ negli intervalli $(-2, -1)$, $(0, 1)$ e $(2, +\infty)$, in cui f è quindi crescente.

8. *Calcolare la derivata seconda di*

$$f(x) = e^x(x^2-5x+8)$$

e determinare gli intervalli in cui è strettamente positiva.

Si ha

$$f'(x) = e^x(x^2-3x+3), \qquad f''(x) = e^x(x^2-x);$$

dunque $f'' > 0$ per $x < 0$ e $x > 1$.

Foglio di esercizi N. 7 - soluzioni

1. *Determinare tutti gli estremi locali della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & se\ x \notin \mathbf{Z} \\ x^2 + 2x & se\ x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

La funzione f è definita 'modificando' la funzione $g(x) = \sqrt{|x|}$ nei punti interi.

Esaminiamo prima la funzione g. Essa ha un unico punto di minimo (relativo e assoluto). Dato che f non modifica g in 0 esso continua ad essere un punto di minimo relativo.

Esaminiamo i restanti punti interi. Dove $x^2 + 2x < \sqrt{|x|}$ si avra' un punto di minimo relativo. Dove $x^2 + 2x > \sqrt{|x|}$ si avra' un punto di massimo relativo. Esaminando i grafici delle due funzioni si conclude che $0, -1, -2$ sono punti di minimo relativo, i restanti punti interi sono di massimo relativo.

2. *Determinare tutti gli estremi locali della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & se\ x \notin \mathbf{Z} \\ 3x^2 - 6 & se\ x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

La funzione f è definita 'modificando' la funzione $g(x) = 2x - x^3$ nei punti interi.

Esaminiamo prima la funzione g. Calcolandone la derivata $g'(x) = 2 - 3x^2$ ed esaminando la monotonia, si ha che $-\sqrt{2/3}$ è un punto di minimo relativo, $\sqrt{2/3}$ è un punto di massimo relativo, Dato che f non modifica g in questi punti essi continuano ad essere punti di estremo relativo.

Esaminiamo i punti interi. Dove $3x^2 - 6 < 2x - x^3$ si avra' un punto di minimo relativo. Dove $3x^2 - 6 < 2x - x^3$ si avra' un punto di massimo relativo.

La prima disequazione è equivalente a

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 < 0 \qquad \text{ovvero} \qquad (x^2 - 2)(x + 3) < 0,$$

ovvero è verificata per $x < -3$ e per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. I punti interi che verificano queste condizioni sono -1, 0, 1 e tutti i punti interi minori o uguali a -4.

La seconda disequazione è verificata per $-3 < x < -\sqrt{2}$ e per $x > \sqrt{2}$. I punti interi che verificano queste condizioni sono -2 e tutti i punti interi maggiori o uguali a 2.

Dunque, l'insieme dei punti di minimo relativo di f è

$$\{1, 0, -\sqrt{2/3}, -1, -4, -5, -6 \ldots\};$$

l'insieme dei punti di massimo relativo di f è

$$\{-2, \sqrt{2/3}, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

3. *Determinare tutti gli estremi locali della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & se\ x \notin \mathbf{Z} \\ |x| - 1 & se\ x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dal grafico delle funzioni si ha che 0 ò punto di minimo relativo, tutti gli altri punti sono di massimo relativo.

4. *Studiare la funzione*

$$g(x) = \arctan\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{x}{1+x^2},$$

e in seguito le funzioni

$$f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$$

e

$$h(x) = (x-1)\arctan \frac{1}{|x-1|}.$$

La funzione ha dominio $x \neq 0$. Dato che g è dispari, basta studiarla per $x > 0$. La sua derivata è

$$g'(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2},$$

e quindi è negativa. Dunque g è decrescente. Dato che

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

si ha che g è positiva per $x > 0$ (e negativa per $x < 0$).

La funzione f è pari e verifica

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1.$$

Dato che $f' = g$ la funzione è strettamente crescente per $x > 0$ (e strettamente decrescente per $x < 0$). La sua estensione per continuità in 0 ha un punto angoloso con derivate $f'_\pm(0) = \pm\pi/2$.

La funzione

$$\overline{h}(x) = x \arctan \frac{1}{|x|} = \begin{cases} f(x) & \text{per } x > 0 \\ -f(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

è dispari ed è estendibile ad una funzione derivabile in 0, con asintoti $y = \pm 1$ a $\pm\infty$.

La funzione $h(x)$ si ottiene da $\overline{h}(x)$ con un cambiamento di variabili che porta 0 in 1.

5. *Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione*

$$f(x) = \log(x+1) + |\log|x-3||$$

e gli eventuali punti di flesso.

La funzione vale

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+1) + \log|x-3| & \text{se } -1 < x \leq 2 \text{ o } x \geq 4 \\ \log(x+1) - \log|x-3| & \text{se } 2 < x < 3 \text{ o } 3 < x < 4. \end{cases}$$

La derivata prima vale

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} & \text{se } -1 < x < 2 \text{ o } x > 4 \\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3} & \text{se } 2 < x < 3 \text{ o } 3 < x < 4. \end{cases}$$

La derivata seconda vale

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2x^2-4x+10}{(x+1)^2(x-3)^2} & \text{se } -1 < x < 2 \text{ o } x > 4 \\ 8\frac{(x-1)}{(x+1)^2(x-3)^2} & \text{se } 2 < x < 3 \text{ o } 3 < x < 4, \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} f''(x) \text{ è negativa se } -1 < x < 2 \text{ o } x > 4 \\ f''(x) \text{ è positiva se } 2 < x < 3 \text{ o } 3 < x < 4, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f \text{ è concava in } (-1,1] \text{ e } [4,+\infty) \\ f \text{ è convessa in } [2,3) \text{ e } (3,4]. \end{cases}$$

La funzione non ha punti di flesso perchè non è derivabile nei punti in cui cambia di convessità.

6. *Determinare tutti gli intervalli in cui è concava*

$$f(x) = \arctan|x-\pi|.$$

La derivata di f è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(x-\pi)^2} & \text{se } x > \pi \\ -\frac{1}{1+(x-\pi)^2} & \text{se } x < \pi, \end{cases}$$

e la derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(x-\pi)}{(1+(x-\pi)^2)^2} & \text{se } x > \pi \\ -\frac{2(x-\pi)}{(1+(x-\pi)^2)^2} & \text{se } x < \pi. \end{cases}$$

Dunque f è concava sia in $(-\infty,\pi]$ che $[\pi,+\infty)$, ma non è concava negli intervalli che contengono π all'interno (perchè $f'_\pm(\pi) = \pm 1$).

7. *Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione*

$$f(x) = (x-2)|x^2-2|$$

e gli eventuali punti di flesso.

Consideriamo $g(x) = (x-2)(x^2-2)$. La sua derivata seconda è $g''(x) = 6x-4$; quindi

$$f''(x) = \begin{cases} 6x-4 & \text{se } |x| > \sqrt{2} \\ 4-6x & \text{se } |x| < \sqrt{2}, \end{cases}$$

f è concava su $(-\infty,-\sqrt{2}]$ e su $[2/3,\sqrt{2}]$, f è convessa su $[-\sqrt{2},2/3]$ e su $[\sqrt{2},+\infty]$. L'unico punto di flesso è $2/3$.

8. *Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione*

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Per semplificare i calcoli effettuiamo la traslazione $z = x-2$, e studiamo

$$g(z) = z^3 - z.$$

Si ha $g''(z) = 6z$, e quindi g è concava/convessa per $z > 0/z < 0$. Dunque f è concava/convessa per $x > 2/x < 2$.