

## Foglio di esercizi N. 1

(Il logaritmo si intende in base naturale  $e$  dove non specificato. Il risultato comunque non dipende dalla scelta della base)

1. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log_3(1 + \log_3(3x))$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = e^x \sqrt{\log_2(2x - x^2) + 1}$$

3. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{\log(x^2 - 4)}{\log(9 - x^2)}$$

4. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log(1 - \sin x)}$$

5. Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione

$$f(x) = 4^x$$

sulla semiretta  $(-\infty, \log_2 3]$

6. Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione

$$f(x) = \log^2 x + 2 \log x + 1$$

sull'insieme  $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$

7. Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2 + x^2}\right)$$

8. Determinare il dominio e (se esistono) max/min, sup/inf della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - (\cos x)^2}$$

## Foglio di esercizi N. 2

1. Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & \text{se } x \in \mathbf{Z} \\ 3x^2 - 6 & \text{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo  $[-2, 2]$ .

2. Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{se } x \in \mathbf{Z} \\ ||x| - 1| & \text{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo  $[-2, 2]$ .

3. Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \in \mathbf{Z} \\ \sqrt{|x|} & \text{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo  $[-2, 2]$ .

4. Determinare (se esiste)  $\min\{e^{-n}(\log(n-5))^2 : n \in \mathbf{N}, n \geq 6\}$ .

5. Calcolare

$$\lim_n \frac{\log(n^2 + \sin n)}{\log(n + \cos n)}.$$

6. Calcolare

$$\lim_n \frac{(n+1)^5 - n^5 + \arctan n}{n^4 + 3n \sin n + \sqrt{n}}.$$

7. Calcolare

$$\lim_n \frac{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^{3n}}{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n}}.$$

8. Calcolare

$$\lim_n \left(\sqrt{n^2 + 2n + 2} - n\right).$$

### Foglio di esercizi N. 3

1. Dire quali sono i possibili limiti delle sottosuccessioni della successione

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n.$$

2. Dire quali sono i possibili limiti delle sottosuccessioni della successione

$$a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1 + 4x))}{\tan(4 \log(1 + x))}.$$

4. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 + x)^x - 1}{(9 + x)^x - 1}.$$

5. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 3)^x}{x^{x + \sin x}}.$$

6. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2)^{1/x}.$$

7. Dire per quali valori di  $\alpha$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + x^2)^x - 1}{x^\alpha}$$

è finito.

8. Dire per quale valori di  $a$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{ax} & \text{se } x > 0 \\ a + x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua.



**Domande a risposta aperta** (punteggio: 0–3 punti l'una)

**A.** Sia  $f(x) = (3x - 2)^2$ . Dire se esistono massimo e minimo della successione  $a_n = f(1/n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) (e in caso affermativo calcolarli), giustificando la risposta usando il grafico di  $f$ .

**B.** Svolgere il calcolo di  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{\log(1 + \sin x)}$  usando i limiti fondamentali.

### Foglio di esercizi N. 5

1. Calcolare derivata destra e sinistra della funzione

$$f(x) = |\arctan(|x^2 + 3x| - x^2 - 3x - 1)|$$

in  $x = 0$ ;

2. Calcolare derivata destra e sinistra della funzione

$$f(x) = |3 \sin |\pi - x| - 4 \cos x|$$

in  $x = \pi/2$ ;

3. Calcolare la retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \log x \arctan(x - 6)$$

in  $x = 6$ ;

4. Descrivere i punti di non-derivabilità di

$$f(x) = \sqrt{||x| - 5| - |x| + 5}$$

5. Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}} \right)$$

(cambiare variabile  $y = 1/x$ );

6. Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\sqrt{x} + 2x - 2)}{\log(x + 3x^2 - 3)}$$

7. Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log(1 + x + x^2) - \tan x \sin x}{x^3}$$

8. Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log x + \sin x)}{\log(\log^3 x + \cos x)}$$

### Foglio di esercizi N. 6

1. Determinare il polinomio di Taylor di ordine 4 e centro 0 di  $f(x) = \cos(5 \tan x) - \cos(5 \sin x)$  e calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x (\cos(5 \tan x) - \cos(5 \sin x)) + 5x^4}{2x^4 + \sin(x^5) - x^6};$$

2. Calcolare il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 3 di

$$f(x) = \sqrt[3]{1+4x} + \sqrt[4]{1-3x} - 2;$$

(usare la definizione)

3. Calcolare il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 5 della funzione

$$f(x) = 3x \cos(2x) + 6 \log(1+x^3);$$

4. Calcolare il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 2 di  $f(x) = e^x \log(1+x) \cos x$  e calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \log(1+x) \cos x - \sin x}{\sin x \tan x};$$

5. Determinare gli intervalli dove la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x}{\log |2x|} \right|$$

è non decrescente;

6. Determinare il più piccolo valore  $a$  tale che la funzione

$$f(x) = e^x \log^2 |x-5|$$

sia crescente in  $(a, +\infty)$ ;

7. Determinare gli intervalli in cui è crescente la funzione

$$f(x) = |x^2 - 4|e^{x^2/3};$$

8. Calcolare la derivata seconda di

$$f(x) = e^x(x^2 - 5x + 8)$$

e determinare gli intervalli in cui è strettamente positiva.

### Foglio di esercizi N. 7

1. Determinare tutti gli estremi locali della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ x^2 + 2x & \text{se } x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

2. Determinare tutti gli estremi locali della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ 3x^2 - 6 & \text{se } x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

3. Determinare tutti gli estremi locali della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ |x| - 1 & \text{se } x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

4. Studiare la funzione

$$g(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2},$$

e in seguito le funzioni

$$f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$$

e

$$h(x) = (x-1) \arctan \frac{1}{|x-1|}$$

(suggerimento: notare che  $f' = g$ );

5. Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione

$$f(x) = \log(x+1) + |\log|x-3||$$

e gli eventuali punti di flesso.

6. Determinare tutti gli intervalli in cui è concava

$$f(x) = \arctan|x - \pi|.$$

7. Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione

$$f(x) = (x-2)|x^2 - 2|$$

e gli eventuali punti di flesso.

8. Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

