

# Dai sistemi discreti ai problemi variazionali continui

Roberto Alicandro, Andrea Braides e Marco Cicalese

Gennaio-aprile 2008



# Introduzione: l'importanza di essere discreto

## $\Gamma$ -convergenza e problemi discreti

La  $\Gamma$ -convergenza è stata elaborata per poter analizzare il comportamento di problemi variazionali, quali l'omogeneizzazione e i cambiamenti di fase, in cui compaiono dei piccoli parametri che ne rendono la trattazione complessa o numericamente onerosa. L'idea allora è di sostituire a tali problemi un problema 'effettivo', in cui tali parametri non appaiono, o appaiono in una maniera semplificata. È quindi curioso e sorprendente che sistemi discreti, in cui i problemi di partenza sono definiti per esempio sui punti di un reticolo di passo piccolo, con chiare applicazioni sia all'analisi numerica che alla fisica atomica, siano giunti piuttosto tardi all'attenzione degli esperti di questa branca del calcolo delle variazioni.

Il concepimento della  $\Gamma$ -convergenza da parte di De Giorgi risale alla prima metà degli anni 1970, ma si dovette aspettare fino ai primi anni 1990 per vedere affrontato con queste tecniche un problema in cui la componente discreta fosse veramente essenziale. In precedenza il suo utilizzo nell'ambito dell'analisi numerica era stato limitato a dimostrare che la discretizzazione di alcune energie di cui già si conosceva il  $\Gamma$ -limite era 'compatibile' con la  $\Gamma$ -convergenza, ovvero che restringendo tali energie a spazi di elementi finiti il limite non cambiava, a patto che questa discretizzazione fosse sufficientemente fine rispetto ai parametri del problema (eludendo esattamente quelli che ora vengono considerati i problemi più interessanti). Nel 1993 apparve (in un primo tempo ignorato) un breve articolo di Chambolle, in cui si studiava un sistema variazionale alle differenze finite ispirato ai funzionali di teoria della visione di Blake e Zisserman (ai quali a sua volta è ispirato il ben noto funzionale di Mumford e Shah), e si mostrava come si potesse definire un limite delle energie discrete e che questo fosse appunto il funzionale di Mumford e Shah. In un lavoro di poco successivo lo stesso Chambolle mostrò come le stesse energie in dimensione due non conducessero proprio al funzionale di Mumford e Shah, ma ad una sua versione 'anisotropa', poco adatta all'analisi delle immagini. Questi due lavori furono molto apprezzati da De Giorgi, e una delle sue ultime congetture (poi dimostrata da Gobbino), fu direttamente ispirata dalla loro lettura (o meglio dal loro ascolto, seguendo uno dei motti

preferiti di De Giorgi: *scripta volant, verba manent*).

Dopo l'articolo di Chambolle, e con la consapevolezza ora che le tecniche discrete potessero essere utili anche per dimostrare teoremi nuovi sul continuo, si cominciarono a studiare sistemi definiti su reticolo più complessi, ma in un primo momento sempre con l'idea di fornire approssimazioni di funzionali a discontinuità libera (per i quali una semplice discretizzazione agli elementi finiti non è immediata). Un passo ulteriore venne effettuato in un lavoro di Braides, Dal Maso e Garroni (1999) in cui l'approccio di Chambolle è unito con più complesse considerazioni di riscaldamento per mostrare come, opportunamente riscaldando energie discrete concavo/convesso, si possano ottenere ancora altri tipi di funzionali più generali. In questo articolo si cominciano ad analizzare anche alcune implicazioni fisiche di questo processo studiando, oltre alla  $\Gamma$ -convergenza, il comportamento di minimi locali e effetti di scala. Questo lavoro è successivo ad una simile analisi di sistemi di Lennard-Jones da parte di Truskinovsky (1996) che però si diparte nei metodi e nei riscaldamenti dalla  $\Gamma$ -convergenza, e solo recentemente è stata inquadrata in una estensione di questa teoria (Braides e Truskinovsky (2008)).

Un primo lavoro in cui si cominciavano a trattare energie discrete che non fossero appositamente 'disegnate' per ritrovare un dato funzionale sul continuo è di Braides e Gelli (2002), ma ancora qui lo scopo era di raggiungere una classe data di energie con questo processo di  $\Gamma$ -limite. Nei lavori successivi (apparsi più o meno contemporaneamente) si abbandonava questo obiettivo, per cercare invece di descrivere i limiti in ipotesi sempre più generali, senza limitazioni sulla forma delle energie microscopiche e sul *range* delle interazioni, notando come si dovessero aggiungere ai ragionamenti di riscaldamento dei lavori di Chambolle e Braides, Dal Maso, e Garroni, anche altri effetti dovuti alle oscillazioni microscopiche ed alla 'non località' insita nella natura dei sistemi discreti. Un teorema di rappresentazione integrale di Alicandro e Cicalese (2004) provvede a dare condizioni generali sulle interazioni su reticolo affinché il limite sia un'energia integrale definita su uno spazio di Sobolev, inquadrando una classe di energie discrete nei metodi di localizzazione della  $\Gamma$ -convergenza. A scale successive ulteriori aspetti delle interazioni atomiche devono essere presi in considerazione, come effetti di bordo e di cambiamento di fase (Braides e Cicalese (2007)).

Contemporaneamente all'interesse, circoscritto, a questi problemi variazionali nell'ambito della  $\Gamma$ -convergenza, si è visto un fiorire di analisi più o meno vicine e parallele a questa, iniziato con il lavoro di Blanc, Le Bris e Lions (2002) in cui si analizza il limite di sistemi discreti sotto la classica *ipotesi di Cauchy-Born* della meccanica dei continui, ovvero supponendo che a deformazioni macroscopiche affini corrispondano disposizioni regolari a livello del reticolo. Un'analisi di questa ipotesi dal punto di vista variazionale è stata fatta da Friesecke e Theil (sempre nel 2002) che mostrano come essa non sia soddisfatta per i *ground states* di energie con semplici interazioni quadratiche tra primi e secondi vicini su reticoli quadratici. Questo esempio mostra quindi da un lato che per alcuni sistemi essa possa essere rilassata, da un altro che la scelta del reticolo di riferimento può essere importante nel formalizzarla (in particolare in due dimensioni il reticolo triangolare sembra più adatto

di quello quadrato). Entrambe le analisi sono legate al problema della ‘cristallizzazione’, ovvero a determinare se le configurazioni minimali di un sistema atomico siano parametrizzabili con un reticolo regolare, e non a caso anche questo è stato affrontato recentemente con metodi variazionali (si veda l’articolo di Theil (2006)). Accanto a questi lavori, si è anche visto un crescente interesse nell’approccio variazionale ai sistemi discreti dal punto di vista della meccanica computazionale (E, Ortiz, Blanc e Le Bris).

L’interazione con questi punti di vista differenti è stata molto stimolante per la pur piccola comunità di esperti di  $\Gamma$ -convergenza che si occupa di questi problemi, e ha prodotto recentemente interessanti lavori in cui le variabili discrete generano nuovi effetti, tra l’altro, in problemi di ottimizzazione di forma, omogeneizzazione, moto per curvatura, percolazione, ecc. In queste note vogliamo fornire una visione unitaria di queste applicazioni, assieme alle principali considerazioni generali sul calcolo dei limiti variazionali di sistemi discreti.

Ci soffermiamo ora sulla formulazione generale e su alcune motivazioni dei nostri problemi. Le nostre energie saranno definite su spazi di funzioni il cui dominio è una porzione di un reticolo; possiamo prendere come modello di reticolo il reticolo cubico  $\mathbb{Z}^d$ , ma possiamo anche pensare a reticoli diversi (ad esempio il reticolo triangolare in  $\mathbb{R}^2$ ) e a reticoli non necessariamente di Bravais (per esempio il reticolo esagonale). Dunque le nostre variabili saranno funzioni

$$u : l\mathbb{Z}^d \cap \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

dove  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  è un aperto di riferimento, e  $l$  il passo caratteristico del reticolo. Per brevità di notazioni poniamo

$$\Omega_l = l\mathbb{Z}^d \cap \Omega, \quad u_i = u(i) \text{ per } i \in \Omega_l \quad (2)$$

La natura delle energie definite su queste funzioni sarà di diversa origine, e porterà a vari tipi di problemi di carattere variazionale.

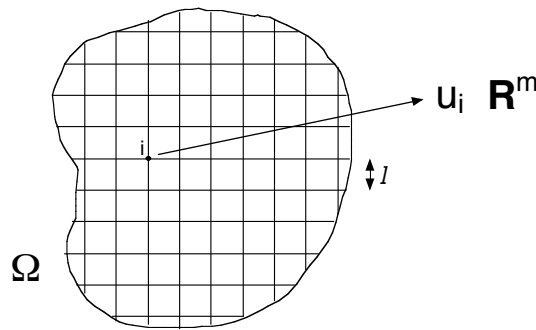


Figure 1: rappresentazione dell’ambiente discreto

## Analisi numerica di problemi variazionali

Un semplice problema di analisi numerica è l'approssimazione alle differenze finite di soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

In questo caso  $l$  è la dimensione caratteristica della griglia di discretizzazione (comunemente denotata con  $h$ ), e le funzioni in considerazione sono scalari, ovvero  $m = 1$ .

La soluzione di (3) è anche la funzione che risolve il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u = \varphi \text{ su } \partial\Omega \right\}. \quad (4)$$

Si può quindi riscrivere tale problema sulle funzioni definite in  $\Omega_l$  (perchè il dato al bordo abbia senso supponiamo tacitamente che  $\Omega$  sia poliedrale ed intersechi  $l\mathbb{Z}^d$  in un numero significativo di punti; per esempio che sia un parallelepipedo con vertici in  $l\mathbb{Z}^d$ ; naturalmente questa condizione verrà indebolita più avanti in queste note). Approssimando le derivate parziali con i relativi rapporti incrementali

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \sim \frac{u_i - u_j}{l}, \text{ dove } i = j + le_k \quad (5)$$

otteniamo come discretizzazione dell'integrale di Dirichlet l'energia

$$E(u) = \sum_{(i,j) \in NN(\Omega_l)} l^d \left( \frac{u_i - u_j}{l} \right)^2, \quad (6)$$

dove la somma è effettuata tra tutti in *primi vicini* (*Nearest Neighbours*) di  $\Omega_l$ , ovvero sulle coppie in

$$NN(\Omega_l) = \{(i, j) : i, j \in \Omega_l, |i - j| = l\}. \quad (7)$$

In questo esempio non ci preoccupiamo delle costanti moltiplicative che possono comparire in un passaggio dall'energia continua a quella discreta.

Si può allora calcolare la soluzione  $u_l$  del relativo problema di minimo

$$\min \left\{ E(u) : u : \Omega_l \rightarrow \mathbb{R}, u = \varphi \text{ su } l\mathbb{Z}^d \cap \partial\Omega \right\}. \quad (8)$$

La domanda è quindi se per  $l$  sufficientemente piccolo, tale  $u_l$  sia una discretizzazione sufficientemente accurata di  $u$ .

Notiamo che, a parte un possibile errore di bordo, considerare  $E$  equivale a restringere l'integrale di Dirichlet ad una classe di funzioni affini a tratti su una opportuna triangolazione di  $\Omega$  (approssimazione agli elementi finiti). Questa interpretazione della discretizzazione appare naturale e semplice per questa energia sul continuo. Per energie simili, ma

più complesse della forma

$$E(u) = \sum_{(i,j) \in NN(\Omega_l)} l^d \Psi\left(\frac{u_i - u_j}{l}\right) \quad (9)$$

tale identificazione può diventare più difficile o perfino fuorviante. La situazione, vedremo, diventa ancora più complessa se la funzione  $\Psi$  dipende essa stessa da (piccoli) parametri della stessa dimensione del passo di discretizzazione  $l$ .

### Meccanica statistica e sistemi di ‘spin’

Una classe di problemi fondamentali della fisica statistica riguarda lo studio di sistemi binari, ovvero in cui la variabile prenda due soli valori, che possiamo supporre essere  $+1$  e  $-1$ . In questo caso, se ci limitiamo ad interazioni tra primi vicini, due sole scelte sono possibili (a meno di costanti additive o moltiplicative) per la corrispondente densità di energia  $f$ :

$$f(u_i, u_j) = -u_i u_j \quad (\text{interazione ferromagnetica}) \quad (10)$$

$$f(u_i, u_j) = u_i u_j \quad (\text{interazione anti-ferromagnetica}). \quad (11)$$

Chiaramente, per quanto riguarda le configurazioni di energia minima, l’energia ferromagnetica favorisce stati costanti, mentre l’energia anti-ferromagnetica è minimizzata da configurazioni oscillanti che alternano i valori  $+1$  e  $-1$ . In fisica statistica, normalmente il passo  $l$  è fissato, mentre le dimensioni di  $\Omega$  divergono; nella nostra analisi penseremo, equivalentemente a  $\Omega$  fissato ed  $l$  piccolo.

Consideriamo per ora il primo dei due casi. Se si fissa la percentuale  $m$  di nodi di  $\Omega_l$  in cui  $u_i = 1$ , allora un problema che ammette un minimo non banalmente costante è

$$\min \left\{ - \sum_{(i,j) \in NN(\Omega_l)} u_i u_j : |u_i| = 1, \#\{i \in \Omega_l : u_i = 1\} = m \#\(\Omega_l) \right\} \quad (12)$$

(supponiamo  $m \#\(\Omega_l) \in \mathbb{N}$  perchè questo minimo abbia senso). Notiamo che, grazie alla condizione  $u_i^2 = u_j^2 = 1$ , possiamo scrivere

$$-u_i u_j = \frac{1}{2}(u_i - u_j)^2 - 1; \quad (13)$$

dunque, a meno di una costante additiva il problema si può riscrivere

$$\min \left\{ E(u) : |u_i| = 1, \#\{i \in \Omega_l : u_i = 1\} = m \#\(\Omega_l) \right\}, \quad (14)$$

dove

$$E(u) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in NN(\Omega_l)} (u_i - u_j)^2 \quad (15)$$

Malgrado la sua somiglianza con l'energia dell'esempio precedente, il vincolo non convesso  $|u| = 1$  rende questo problema di tipo completamente diverso. Invece di identificare  $u$  con una sua interpolata affine a tratti, è più utile identificarla con una funzione costante a tratti, o, meglio, con un insieme  $A$ . Se definiamo

$$A = \bigcup_{\{i: u_i=1\}} Q_i^l, \quad Q_i^l = i + \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)^d, \quad (16)$$

allora l'energia ferromagnetica relativa a  $u$  può venire interpretata come un'energia di superficie legata ad  $A$ . Infatti si ha  $(u_i - u_j)^2 \neq 0$  se e solo se  $i \in A$  e  $j \notin A$  (o viceversa) e quindi

$$E(u) = 4 \#\{(i, j) \in NN(\Omega_l) : u_i \neq u_j\} \quad (17)$$

$$= \frac{4}{l^{d-1}} \sum_{(i,j) \in NN(\Omega_l), u_i \neq u_j} \mathcal{H}^{d-1}(\partial Q_i^l \cap \partial Q_j^l). \quad (18)$$

A meno di errori di bordo, dunque l'energia  $E$  può venire assimilata all'energia di superficie

$$\frac{4}{l^{d-1}} \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial A). \quad (19)$$

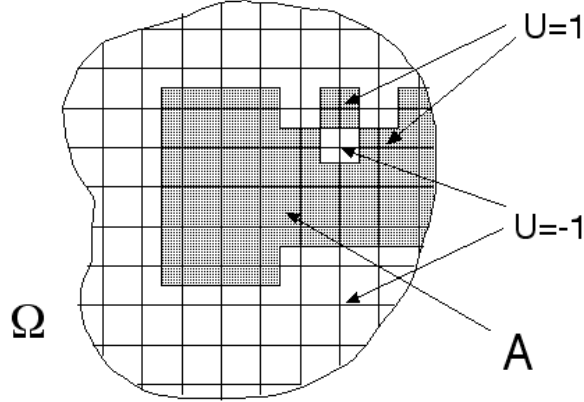


Figure 2: identificazione di un sistema di spin  $u$  con un insieme  $A$

Un problema di minimo sul continuo che descrive approssimativamente il nostro problema discreto è quindi un problema di transizione di fase (o di minima area) del tipo

$$\min \left\{ \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial A) : |A| = m |\Omega| \right\}. \quad (20)$$

Vedremo come questa descrizione possa venire formalizzata, e come debba venire corretta per tenere conto dei vincoli sugli insiemi  $A$  che derivano dalle asimmetrie del reticolo  $\mathbb{Z}^d$ .



Per effettuare tale formalizzazione dovremo riscalarle le energie di modo che rimangano equi-limitate al variare di  $l$ , e quindi ridefinire  $E$  come

$$E(u) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in NN(\Omega_l)} l^{d-1} (u_i - u_j)^2. \quad (21)$$

Questa energia può essere confrontata con la discretizzazione dell'integrale di Dirichlet (7). Questo confronto mostra come sia il riscalamento della variabile  $u$  che delle dimensioni dell'energia siano un passo cruciale della nostra analisi.

Lo studio del caso anti-ferromagnetico può essere ricondotto a quello del caso ferromagnetico con il cambiamento di variabile

$$v_i = (-1)^{i/l} u_i, \text{ dove } (-1)^k = (-1)^{k_1} (-1)^{k_2} \dots (-1)^{k_d} \text{ per } k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d. \quad (22)$$

Da notare che questo cambiamento di variabili porta configurazioni costanti in configurazioni alternanti, e quindi un'interfaccia del problema di minimo perimetro derivante dalla  $v$  non viene più interpretata come un'interfaccia tra due zone in cui lo spin è costante (anzi, *in media* lo spin è nullo in entrambe le zone). Vedremo come la situazione e i parametri in gioco diventano ancora più complessi se si considerano interazioni non solo tra i primi vicini.

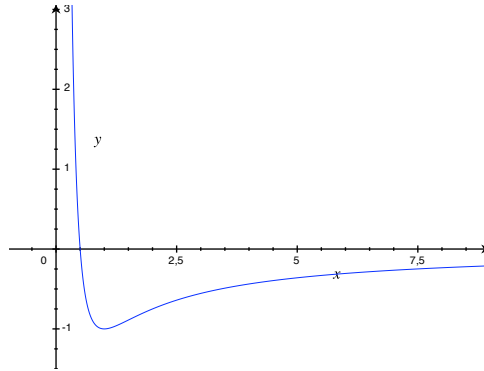


Figure 3: un potenziale di Lennard-Jones

## Le ipotesi microscopiche della meccanica dei continui

Nell'ipotesi semplificativa che gli atomi interagiscano a coppie secondo un potenziale interatomico  $J$  dipendente dalla loro mutua distanza, l'energia totale di  $N$  atomi occupanti le posizioni  $u = \{u_1, \dots, u_N\} \subset \mathbb{R}^d$  si scrive

$$E(u) = \sum_{i \neq j} J(|u_i - u_j|). \quad (23)$$

Una scelta usuale del potenziale  $J$  è il potenziale di Lennard-Jones

$$J(r) = \frac{c_1}{r^{12}} - \frac{c_2}{r^6} \quad (c_1, c_2 > 0). \quad (24)$$

Notiamo che nella nostra notazione gli indici della funzione discreta  $u$  possono venire parametrizzati su una porzione  $\Omega_l$  di reticolo (con  $N \sim l^{-d}$ ), ma questa riparametrizzazione è puramente arbitraria.

Il limite continuo di problemi variazionali relativi a questo tipo di energie nella più grande generalità è al di là delle possibilità attuali. Per la loro analisi un punto di partenza è la ricerca delle configurazioni minimali. Una congettura generale è che tali configurazioni si dispongano su reticoli regolari (*cristallizzazione*), congettura corroborata anche da un'abbondante evidenza numerica. Partendo da tale osservazione si possono considerare  $u$  che siano (piccole) variazioni da questi punti di minimo (in qualche modo questo ragionamento è alla base della derivazione di energie elastiche lineari da interazioni atomiche da parte di Cauchy). Da un punto di vista variazionale questa ipotesi può essere tradotta con una parametrizzazione, ora giustificata, di  $u$  sopra un reticolo regolare, e dalla dipendenza delle densità di energia delle interazioni atomiche dalla distanza degli atomi (o anche dalla loro posizione) sul reticolo di riferimento, del tipo

$$E(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \sum_{i, j \in \Omega_l, i-j=lk} W_k(u_i - u_j) \quad (25)$$

dove le densità di energia  $W_k$  possono riflettere delle proprietà dei potenziali atomici di partenza e ulteriori ipotesi sulla  $u$ . In questa formulazione ricadono (a parte un riscaldamento) anche le energie con interazioni solo tra primi vicini, le quali si ottengono scegliendo  $W_k = 0$  se  $|k| > 1$ . Per comprendere le proprietà effettive di tali energie ne verrà quindi fatta un'analisi limite quando  $l \ll 1$ . Vedremo che sotto ipotesi di decadimento in  $k$  e di crescita controllata delle  $W_k$  si può concludere che tali energie danno luogo a funzionali integrali, ma che la determinazione delle relative energie continue passa attraverso ragionamenti di 'omogeneizzazione microscopica'. Inoltre vedremo come l'effetto di interazioni a lunga distanza (oltre i primi vicini) si possa tradurre in effetti di ordine superiore del piccolo parametro  $l$ .

Lo studio delle energie (25) senza queste ipotesi di piccole variazioni da un reticolo di riferimento è possibile in dimensione uno, e vedremo come porta a dovere considerare la possibilità di energie macroscopiche definite su funzioni discontinue o con derivate singolari, corrispondenti a fratture e *softening*.

Tutti i problemi visti qui sopra possono essere ricondotti allo studio di problemi di minimo

$$\min\{E_l(u) + \text{condizioni al bordo, vincoli, ecc.} : u : \Omega_l \rightarrow \mathbb{R}^m\},$$

e alla loro analisi per  $l \ll 1$ . Il nostro scopo sarà di affrontare questa analisi con il linguaggio e i metodi della  $\Gamma$ -convergenza.

# Chapter 1

## $\Gamma$ -convergenza ed energie su reticolo

### 1.1 Definizione e proprietà fondamentali

L'idea della  $\Gamma$ -convergenza è quella di approssimare problemi di minimo

$$\min\{F_\varepsilon(x) : x \in X\}, \quad (1.1)$$

tramite un problema

$$\min\{F(x) : x \in X\}, \quad (1.2)$$

indipendente dal piccolo parametro  $\varepsilon$ . Questo viene fatto tramite una nozione di convergenza delle energie che viene data in termini locali (ovvero tramite la caratterizzazione del comportamento delle energie su successioni convergenti di punti  $x_\varepsilon$ ) ed è compatibile con perturbazione continue. Qui e in seguito chiameremo una successione una famiglia di punti parametrizzati indifferentemente da  $\varepsilon > 0$ ,  $(x_\varepsilon)$ , o da  $j \in \mathbb{N}$ ,  $(x_j)$ .

**Definizione 1.1.1 ( $\Gamma$ -convergenza)** *Sia  $X$  spazio metrico e siano  $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funzionali su  $X$ . Diremo che  $(F_\varepsilon)$   $\Gamma$ -converge a  $F$ , o che  $F$  è il  $\Gamma$ -limite di  $(F_\varepsilon)$ , per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  (rispetto alla metrica di  $X$ ), e scriveremo*

$$F = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon \quad (1.3)$$

se per ogni  $x \in X$  valgono le due condizioni

- (i) (diseguaglianza del liminf) per ogni  $x_\varepsilon \rightarrow x$  si ha  $F(x) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x_\varepsilon)$
- (ii) (diseguaglianza del limsup) esistono  $x_\varepsilon \rightarrow x$  per cui  $F(x) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x_\varepsilon)$ .

Tenendo conto della (i) la (ii) può essere enunciata anche come l'esistenza di una recovery sequence, ovvero  $x_\varepsilon \rightarrow x$  per cui  $F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x_\varepsilon)$ .

La prima condizione richiede che  $F$  fornisca una stima dal basso per il limite (dei minimi) delle energie  $F_\varepsilon$ , mentre la seconda assicura che questo limite è raggiunto. La definizione è concepita perchè valga il seguente teorema.

**Teorema 1.1.2 (Teorema fondamentale della  $\Gamma$ -convergenza)** *Se esiste un compatto  $K \subset X$  tale che  $\inf F_\varepsilon = \inf_K F_\varepsilon$ , allora esiste  $\min F$  e si ha*

$$\min F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf F_\varepsilon.$$

*Inoltre, se  $x_\varepsilon$  è una successione tale che  $F_\varepsilon(x_\varepsilon) = \inf F_\varepsilon + o(1)$  e ne esiste una sottosuccessione convergente a  $\bar{x} \in X$ , allora  $F(\bar{x}) = \min F$ .*

*Proof.* Basta dimostrare la seconda affermazione. Si può quindi considerare una successione  $(x_{\varepsilon_j})$  tale che al contempo si abbia  $\lim_j F_{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}) = \lim \inf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf F_\varepsilon$  e  $x_{\varepsilon_j} \rightarrow \bar{x}$ . Si ha allora  $F(\bar{x}) \leq \lim \inf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \lim_j F_{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}) = \lim \inf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf F_\varepsilon$  per (i). Dalla (ii) si ha invece che per ogni  $x \in X$  esiste una successione  $(\bar{x}_\varepsilon)$  per cui  $F(x) \geq \lim \sup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x_\varepsilon) \geq \lim \sup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf F_\varepsilon$ , da cui si conclude la dimostrazione prendendo l'estremo inferiore in  $x$  e confrontando con la disuguaglianza precedente.  $\square$

**Osservazione 1.1.3 (osservazioni sulla definizione)** Dalla definizione si ha subito che

(i) (*stabilità per perturbazioni continue*) se  $G$  è un funzionale continuo su  $X$  allora dalla  $\Gamma$ -convergenza di  $F_\varepsilon$  a  $F$  si deduce la  $\Gamma$ -convergenza di  $F_\varepsilon + G$  a  $F + G$ . Viceversa, questa condizione di stabilità e la validità del teorema fondamentale spesso permettono (sotto alcune ipotesi tecniche sul tipo di funzionali) di dedurre la  $\Gamma$ -convergenza di  $F_\varepsilon$  a  $F$  localizzando la condizione globale di convergenza dei minimi scegliendo delle perturbazioni del tipo  $G(x) = \lambda d_X(x, x_0)$  ( $d_X$  la distanza su  $X$  e  $\lambda > 0$ );

(ii) (*semicontinuità*) la convergenza di una successione costante  $F_\varepsilon = F_0$  è possibile (per (i)) solo se  $F_0$  è *semicontinuo inferiormente*, ovvero se per ogni  $x_j \rightarrow x$

$$F_0(x) \leq \liminf_j F_0(x_j); \tag{1.4}$$

(iii) (*rilassamento*) se  $F_\varepsilon = F_0$  il  $\Gamma$ -limite esiste ed è uguale all'*inviluppo semicontinuo* di  $F_0$ , ovvero al funzionale  $\bar{F}$  dato da

$$\bar{F}(x) = \sup\{G(x) : G \text{ è semicontinuo inferiormente e } G \leq F\}. \tag{1.5}$$

## 1.2 Convergenza di funzioni su reticolo

### 1.2.1 Interpolate

Le energie su funzioni discrete su reticoli sono definite su insiemi dipendenti dal passo del reticolo. Per applicare i metodi della  $\Gamma$ -convergenza dobbiamo quindi identificare tali insiemi con sottospazi di un comune spazio metrico. A tal fine, l'identificazione più semplice è quella con sottospazi di  $L^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ : una funzione  $u : \Omega \cap \varepsilon\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  viene identificata con la sua *interpolata costante a tratti* sul reticolo  $\varepsilon\mathbb{Z}^d$  data da

$$u(x) = \begin{cases} u_i & \text{se } x \in Q_i^\varepsilon, i \in \Omega \cap \varepsilon\mathbb{Z}^d, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad Q_i^\varepsilon = i + \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)^d. \quad (1.6)$$

In questo modo  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m)$ . L'estensione a 0 relativa agli indici  $i$  non contenuti in  $\Omega$  è necessaria per poter definire l'interpolata su tutto  $\Omega$ .

A seconda dei tipi di energie in considerazione sceglieremo quindi  $X = L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$  per qualche  $p \geq 1$  dotato di una delle convergenze:

- convergenza forte (in  $L^1$ )
- convergenza debole sui limitati di  $L^p$  per qualche  $p > 1$ , o debole\* se  $p = \infty$  (che sono metrizzabili).

**Osservazione 1.2.1** Ricordiamo che per funzioni equi-limitate in  $L^p$  la convergenza debole  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  equivale alla convergenza degli integrali su aperti; ovvero a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A u_\varepsilon dx = \int_A u dx$$

sugli aperti  $A$  regolari. Per funzioni discrete possiamo interpretare questa convergenza con la condizione che  $u$  rappresenti le proprietà statistiche asintotiche delle variabili discrete  $u_\varepsilon$ , ovvero che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i \in A \cap \varepsilon\mathbb{Z}^d} \varepsilon^d u_\varepsilon(i) = \int_A u dx$$

per aperti  $A$  di frontiera di misura di Lebesgue nulla.

La  $\Gamma$ -convergenza di una successione di energie  $E_\varepsilon$  definite ciascuna sugli spazi  $X_\varepsilon = \{u : \Omega \cap \varepsilon\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^m\}$  è quindi identificata con la convergenza delle energie  $F_\varepsilon$  definite su  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$  da

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} E_\varepsilon(u) & \text{se } u \in X_\varepsilon \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (1.7)$$

con la identificazione di  $X_\varepsilon$  con un sottoinsieme di  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$  illustrata sopra.

Alternativamente alle convergenze sopra citate, si potranno anche considerare la topologia della convergenza in misura, o la convergenza in  $L^p_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  (quest'ultima è utile se non si vogliono definire interpolate delle nostre funzioni discrete vicino alla frontiera di  $\Omega$ ).

### 1.2.2 Condizioni di compattezza

• *Condizioni di compattezza debole.* Queste si ottengono direttamente da stime su  $\|u\|_{L^p}$ ; per esempio se le energie  $E_\varepsilon$  soddisfano  $E_\varepsilon(u) \geq C(\|u\|_{L^p}^p - 1)$ , o se sono finite solo su sottoinsiemi limitati di  $L^\infty$  (questo è il caso per esempio degli spin).

• *Condizioni di compattezza forte.* Queste si ottengono tramite criteri di compattezza alla Fréchet-Kolmogorov. Un criterio che sarà molto utile è il seguente, che ci permetterà di ricondursi al caso uni-dimensionale.

**Teorema 1.2.2 (Criterio di compattezza per sezioni)** *Sia  $(u_\varepsilon)$  una successione limitata in  $L^p(\Omega)$  per qualche  $p > 1$ , e tale che per ogni  $\delta > 0$  e  $k = 1, \dots, d$  esista una successione di funzioni  $(v_\varepsilon)$  tale che*

- (i)  $\|v_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leq \delta$
- (ii) *per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}^{d-1}$  la successione di funzioni di una variabile  $(v_\varepsilon^y)$  definita da  $v_\varepsilon^y : \Omega^y \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo*

$$\Omega^y = \{t \in \mathbb{R} : (y_1, \dots, y_k, t, y_{k+1}, \dots, y_d) \in \Omega\} \quad (1.8)$$

$$v_\varepsilon^y(t) = v_\varepsilon(y_1, \dots, y_k, t, y_{k+1}, \dots, y_d) \quad (1.9)$$

*è precompatta in  $L^1(\Omega^y)$  (se  $\Omega^y \neq \emptyset$ ),*

*allora la successione  $(u_\varepsilon)$  è precompatta in  $L^1(\Omega)$ .*

**Osservazione 1.2.3** Il criterio sopra enunciato verrà applicato a successioni di funzioni  $u_\varepsilon \in X_\varepsilon$ , spesso riducendone lo studio direttamente a quello delle loro sezioni uni-dimensionali  $u_\varepsilon^y$  (ovvero con  $v_\varepsilon = u_\varepsilon$ ). Notiamo che la compattezza di tali funzioni costanti a tratti è equivalente alla compattezza delle corrispondenti interpolate affini a tratti.

Si ottengono facilmente la precompattezza di successioni uni-dimensionali  $(u_\varepsilon)$  per cui sono equilimitate le seguenti energie (supponiamo  $\Omega$  un intervallo limitato):

(1) (*spin*)  $E_\varepsilon(u) = \sum_i (u_i - u_{i-\varepsilon})^2$  e  $|u| = 1$ . In questo caso le funzioni  $u_\varepsilon$  sono costanti a tratti con un numero finito ed equilimitato di punti di discontinuità. La compattezza delle funzioni si riduce alla compattezza delle successioni dei punti di discontinuità;

(2) (*differenze finite*)  $E_\varepsilon(u) = \sum_i \varepsilon \left| \frac{u_i - u_{i-\varepsilon}}{\varepsilon} \right|^p$  con  $p \geq 1$ . In questo caso si identificano le funzioni discrete con le loro interpolate affini a tratti, e si usa l'immersione compatta di  $W^{1,1}$  in  $L^1$  in dimensione 1;

(3) (*problemi a discontinuità libera*)  $E_\varepsilon(u) = \sum_i \varepsilon \left( \left( \frac{u_i - u_{i-\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \wedge \frac{1}{\varepsilon} \right)$ . In questo caso si interpola  $u$  in modo affine tra  $i - \varepsilon$  e  $i$  se  $\left( \frac{u_i - u_{i-\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$ , e con la costante  $u_i$  altrimenti. La compattezza si ottiene combinando i ragionamenti dei casi (1) e (2) (più dettagli verranno forniti nel capitolo sui problemi a discontinuità libera).

### 1.2.3 Equivalenza per $\Gamma$ -convergenza

La  $\Gamma$ -convergenza definisce una relazione di equivalenza, condensata nella seguente definizione, che in particolare ci permetterà di affermare che energie discrete sono ‘equivalenti’ a energie sul continuo.

**Definizione 1.2.4 (equivalenza per  $\Gamma$ -convergenza)** *Diremo che due famiglie  $(F_\varepsilon)$  e  $(G_\varepsilon)$  sono equivalenti per  $\Gamma$ -convergenza se da ogni successione  $(\varepsilon_j)$  si estrae una sottosuccessione (denotata sempre con  $(\varepsilon_j)$ ) ed esiste una successione di numeri reali  $(m_j)$  tale che esistono i  $\Gamma$ -limiti*

$$\Gamma\text{-}\lim_j(F_{\varepsilon_j} - m_j), \quad \Gamma\text{-}\lim_j(G_{\varepsilon_j} - m_j),$$

*coincidono, e non sono banali; ovvero non prendono il valore  $-\infty$  e non sono identicamente  $+\infty$ .*

**Osservazione 1.2.5** (i) sebbene i limiti siano definiti nello stesso spazio e uguali, i domini di  $F_\varepsilon$  e  $G_\varepsilon$  saranno in generale differenti;

(ii) la traslazione assicura che si possa parlare di equivalenza anche per successioni con  $\Gamma$ -limiti identicamente  $\pm\infty$ . In questo caso non saranno equivalenti due successioni divergenti con ‘velocità’ differenti;

(iii) se esiste il  $\Gamma$  limite  $H$  di  $(F_\varepsilon - m_\varepsilon)$  in particolare  $(F_\varepsilon)$  è equivalente a  $(H + m_\varepsilon)$ ;

(iv) se  $X$  è separabile, una famiglia  $(F_\varepsilon)$  con  $\inf F_\varepsilon \in \mathbb{R}$  è equivalente a se stessa; questo è assicurato dal seguente teorema, applicato alle sottosuccessioni di  $(F_\varepsilon - \inf F_\varepsilon)$ .

**Teorema 1.2.6 (compattezza della  $\Gamma$ -convergenza)** *Se  $X$  è uno spazio metrico separabile allora da ogni successione  $(F_j)$  con  $F_j : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  si estrae una sottosuccessione  $\Gamma$ -convergente.*

## 1.3 Calcolo dei $\Gamma$ -limiti

Le proprietà di stabilità per perturbazioni continue e di semicontinuità dei  $\Gamma$ -limiti ci permettono alcune considerazioni generali riguardo al loro calcolo, che raccogliamo qui di seguito. Altri metodi più specifici (localizzazione e *blow up*) verranno illustrati nelle sezioni seguenti.

**Proposizione 1.3.1 (stabilità per sottosuccessioni)** *Una successione  $(F_\varepsilon)$   $\Gamma$ -converge a  $F$  se e solo se da ogni successione  $(F_{\varepsilon_j})$  si può estrarre una sottosuccessione convergente a  $F$ .*

Questo risultato sar  utile quando si vorr  ragionare per compattezza, prima provando che da ogni successione di funzionali se ne estrae una  $\Gamma$ -convergente, e poi caratterizzando il limite.

**Proposizione 1.3.2 (stabilit  per perturbazioni continue)** *Se  $(F_\varepsilon)$   $\Gamma$ -converge a  $F$  e  $G$    continua, allora  $(F_\varepsilon + G)$   $\Gamma$ -converge a  $F + G$ .*

Questa proposizione aiuta a ricondursi ad un  $\Gamma$ -limite gi  calcolato, se la successione  $(H_\varepsilon)$  da studiare si pu  scrivere come  $H_\varepsilon = F_\varepsilon + G$  con  $G$  continua e  $(F_\varepsilon)$  di cui   gi  noto il  $\Gamma$ -limite. Viceversa, scrivendo  $F_\varepsilon = (F_\varepsilon - G) + G$ , si pu  a volte scegliere  $G$  continua in modo che sia pi  comodo o significativo calcolarsi il  $\Gamma$ -limite di  $(F_\varepsilon - G)$ , e aggiungere  $G$  al risultato solo in seguito.

### 1.3.1 Stime dall'alto e dal basso

Si pu  ricondurre il calcolo di un  $\Gamma$ -limite a due stime separate, allo stesso modo di come il calcolo di un limite si pu  vedere come l'uguaglianza di un limite superiore ed uno inferiore.

**Definizione 1.3.3 ( $\Gamma$ -lim inf /  $\Gamma$ -lim sup)** *Se  $F_\varepsilon : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  definiamo il  $\Gamma$ -limite inferiore e il  $\Gamma$ -limite superiore di  $(F_\varepsilon)$  come, rispettivamente*

$$\Gamma\text{-lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x) := \inf \left\{ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x_\varepsilon) : x \rightarrow x \right\} \quad (1.10)$$

$$\Gamma\text{-lim sup}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x) := \inf \left\{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x_\varepsilon) : x \rightarrow x \right\}. \quad (1.11)$$

Notiamo come la definizione non sia simmetrica. Le due diseuguaglianze che caratterizzano il  $\Gamma$ -limite possono quindi essere riscritte come due stime (dal basso e dall'alto rispettivamente) per  $\Gamma$ -lim inf e per  $\Gamma$ -lim sup (quantit  ora che esistono sempre)

$$F(x) \leq \Gamma\text{-lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x), \quad \Gamma\text{-lim sup}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x) \leq F(x), \quad (1.12)$$

che possiamo trattare separatamente. Due osservazioni utili a questo scopo sono contenute nella seguente proposizione.

### Proposizione 1.3.4 (semicontinuit  e $\Gamma$ -limiti)

(i) *Le funzioni  $F'$  e  $F''$  definite da*

$$F'(x) := \Gamma\text{-lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x), \quad F''(x) := \Gamma\text{-lim sup}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x) \quad (1.13)$$

*sono inferiormente semicontinue su  $X$ ;*



(ii) Se  $\overline{F}_\varepsilon$  denota l'involuppo inferiormente semicontinuo di  $F_\varepsilon$ , ovvero

$$\overline{F}_\varepsilon(x) = \sup\{G(x) : G \leq F_\varepsilon, G \text{ inferiormente semicontinuo}\}, \quad (1.14)$$

allora si ha anche

$$F'(x) = \Gamma\text{-}\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \overline{F}_\varepsilon(x), \quad F''(x) = \Gamma\text{-}\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \overline{F}_\varepsilon(x). \quad (1.15)$$

La prima osservazione ci permette di limitare a funzionali inferiormente semicontinui la ricerca dei funzionali  $F$  per cui provare le stime in (1.12). La seconda ci permette a volte di semplificare la forma di  $F_\varepsilon$ .

**Osservazione 1.3.5 (stima inferiore - sup di misure)** Spesso il modo in cui si dimostra la stima inferiore è con una famiglia di disequaglianze, ovvero trovando una famiglia di funzionali inferiormente semicontinui  $G_\lambda$  (che per noi saranno sovente funzionali sul continuo, per cui le condizioni di semicontinuità inferiore vengono dedotte da teoremi noti, e sono più stringenti delle condizioni sul discreto) tale che

$$F'(x) = \Gamma\text{-}\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x) \geq G_\lambda(x). \quad (1.16)$$

Questa condizione in particolare è implicata dalla disequaglianza  $F_\varepsilon \geq G_\lambda$  (che per i nostri problemi discreti dovrà essere verificata solo sulle funzioni costanti a tratti in  $X_\varepsilon$ ). Da (1.16) si deduce quindi che

$$\Gamma\text{-}\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon \geq \sup_\lambda G_\lambda \quad (1.17)$$

(ricordiamo anche che l'estemo superiore di una famiglia di funzioni inferiormente semicontinue è semicontinuo).

Quest'ultima disequaglianza si può migliorare qualora si abbia una versione 'localizzata' del  $\Gamma\text{-}\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon$ , (nel caso discreto localizzarsi su un aperto  $A$  significa considerare nella definizione di  $F_\varepsilon$  solo le interazioni tra punti interni ad  $A$ ; maggiori dettagli sul metodo di localizzazione verranno forniti più avanti) usando il seguente lemma (prendendo come  $\mu$  la versione localizzata del  $\Gamma\text{-}\liminf$  menzionata sopra).

**Lemma 1.3.6 (sup di misure)** *Sia  $\mu$  una funzione definita sugli aperti limitati di  $\mathbb{R}^d$  tale che  $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$  se  $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ , sia  $\sigma$  una misura di Borel e  $(f_\lambda)$  una famiglia numerabile di funzioni Boreliane. Se  $\mu(A) \geq \int_A f_\lambda d\sigma$  per ogni  $\lambda$  e  $A$  aperto limitato, allora  $\mu(A) \geq \int_A \sup_\lambda f_\lambda d\sigma$ .*

**Osservazione 1.3.7 (stima superiore per rilassamento)** La stima superiore dipende da una costruzione o *Ansatz* sulle successioni ottimali. Usando le proprietà di semicontinuità in genere non è necessario costruire tali successioni per ogni  $x \in X$ , ma si procede come segue:

- si sceglie un insieme  $D \subset X$  e per  $x \in D$  si costruisce  $\bar{x}_\varepsilon \rightarrow x$  di modo che

$$F''(x) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq G(x) \text{ per ogni } x \in D \quad (1.18)$$

per un certo funzionale  $G$ ;

- da questa disuguaglianza si deduce che

$$F''(x) \leq \overline{G_D}(x) \text{ per ogni } x \in X, \quad (1.19)$$

dove

$$G_D(x) = \begin{cases} G(x) & \text{se } x \in D \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e  $\overline{G_D}$  è il suo involucro inferiormente semicontinuo;

- in particolare, se  $\overline{G_D} = G$ , ovvero se  $D$  è denso in  $X$ ,  $G$  è semicontinua inferiormente e per ogni  $x \in X$  esiste  $(x_j) \subset D$ ,  $x_j \rightarrow x$  e tale che  $G(x_j) \rightarrow G(x)$ , si deduce che

$$F''(x) \leq G(x) \text{ per ogni } x \in X. \quad (1.20)$$

Dunque si ottiene una stima superiore grazie ad una costruzione e al calcolo di un involucro semicontinuo (*rilassamento*). In particolare si potrà prendere come  $D$  una classe densa di funzioni semplici (costanti a tratti) o regolari. Una stima superiore ‘banale’ si avrà prendendo  $x_\varepsilon = x$  ove possibile (per energie su reticolo prendendo  $x_\varepsilon$  la discretizzazione di  $x$ ).

## 1.4 Alcuni semplici esempi

### 1.4.1 Energie di punto. Oscillazioni ‘mesoscopiche’

Consideriamo energie su reticolo definite da

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{i \in \Omega_\varepsilon} \varepsilon^d W(u_i), \quad u : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.21)$$

dove  $\Omega$  è un aperto di frontiera con misura di Lebesgue nulla e  $W : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  è inferiormente limitata e a crescita polinomiale. Supporremo senza perdita di generalità che

$$W \geq 0, \quad W(u) \geq c(|u|^p - 1) \quad (1.22)$$

per qualche  $p > 1$ . Le energie  $E_\varepsilon$  sono così (identificate con) funzionali equi-coercivi in  $L^p(\Omega)$  rispetto alla topologia debole sui limitati. Possiamo prendere come modello di  $W$  energie non-convesse del tipo

$$W(u) = \min\{(u-1)^2, (u+1)^2\} \text{ o } W(u) = (u^2 - 1)^2 \text{ (potenziale a doppio pozzo)}$$

$$W(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u = 1 \text{ o } u = -1 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Fissiamo  $\lambda > 0$ ; per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, si ha

$$\bigcup\{Q_i^\varepsilon : i \in \Omega_\varepsilon, \text{dist}(i, \partial\Omega) > \lambda/2\} \supset \Omega(\lambda) := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \lambda\}$$

per cui

$$E_\varepsilon(u) \geq \int_{\Omega(\lambda)} W(u) dx$$

per ogni  $u \in X_\varepsilon$ . A questo punto dobbiamo ricordare i teoremi di semicontinuit  inferiore in spazi  $L^p$ , in cui la semicontinuit  inferiore di un funzionale integrale rispetto alla topologia debole equivale alla semicontinuit  inferiore (in  $\mathbb{R}$ ) e alla convessit  dell'integrando. Possiamo quindi prendere come  $G_\lambda$

$$G_\lambda(u) = \int_{\Omega(\lambda)} W^{**}(u) dx,$$

dove  $W^{**}$  indica l'*inviluppo convesso e semicontinuo* di  $W$ :

$$W^{**}(u) = \sup\{V(u) : V \leq W, V \text{ convesso e semicontinuo}\}.$$

Per i nostri esempi sopra si ha in ogni caso

$$W^{**}(u) = \begin{cases} W(u) & \text{se } |u| \geq 1 \\ 0 & \text{se } |u| < 1. \end{cases}$$

Prendendo il sup in  $\lambda$  (ovvero facendo tendere  $\lambda \rightarrow 0$ ) per Beppo Levi si ha

$$E_\varepsilon(u) \geq \sup_\lambda \int_{\Omega(\lambda)} W^{**}(u) dx = \int_\Omega W^{**}(u) dx.$$

In questo caso l'introduzione del parametro  $\lambda$    stata utile per evitare di dovere stimare il contributo degli errori dovuti al bordo.

Per quanto riguarda la stima superiore in questo caso possiamo fissare  $D$  come lo spazio delle funzioni costanti a tratti su insiemi sufficientemente regolari (per esempio costanti su cubi di  $\mathbb{R}^d$ ). In tal caso si prende  $u_\varepsilon(i) = u(i)$ , ottenendo

$$\Gamma\text{-lim sup}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u) \leq G(u) = \int_\Omega W(u) dx$$

per  $u \in D$ . Si usa adesso un teorema di rilassamento.

**Teorema 1.4.1 (rilassamento in  $L^p$ )** *Siano  $W$  e  $\Omega$  come sopra, sia  $D$  l'insieme delle funzioni costanti a tratti su cubi di  $\mathbb{R}^d$  e sia*

$$G(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} W(u) dx & \text{se } u \in D \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora l'involuppo semicontinuo inferiore di  $G$  rispetto alla convergenza debole in  $L^p(\Omega)$  è

$$\overline{G}(u) = \int_{\Omega} W^{**}(u) dx.$$

Si conclude quindi che  $\Gamma\text{-lim sup}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\varepsilon}(u) \leq \int_{\Omega} W^{**}(u) dx$  su tutto  $L^p(\Omega)$ , e quindi che

$$\Gamma\text{-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\varepsilon}(u) = \int_{\Omega} W^{**}(u) dx,$$

ovvero che la famiglia di energie discrete  $E_{\varepsilon}$  è equivalente (per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) all'energia continua  $\int_{\Omega} W^{**}(u) dx$ .

**Osservazione 1.4.2 (rilassamento microscopico e oscillazioni mesoscopiche)** Il ragionamento di rilassamento sopra esposto rende la dimostrazione molto veloce ma nasconde i dettagli delle successioni ottimali, che possono essere fondamentali per analisi più dettagliate dei problemi di minimo.

Per la costruzione di successioni ottimali, effettuiamo prima un rilassamento dei funzionali  $E_{\varepsilon}$ . In questo caso, avendo un insieme finito di variabili  $\Omega_{\varepsilon}$  la semicontinuità inferiore di  $E_{\varepsilon}$  equivale alla semicontinuità di  $W$ , per cui il rilassato di  $E_{\varepsilon}$  è

$$\overline{E}_{\varepsilon}(u) = \sum_{i \in \Omega_{\varepsilon}} \varepsilon^d \overline{W}(u),$$

dove  $\overline{W}$  è l'involuppo semicontinuo inferiore (in  $\mathbb{R}$ ) di  $W$ . Possiamo quindi supporre che  $W$  stesso sia semicontinuo inferiormente. Dalla condizione di crescita e dalla semicontinuità di  $W$  abbiamo che

$$W^{**}(u) = \min\{tW(v) + (1-t)W(w) : 0 \leq t \leq 1, tv + (1-t)w = u\}. \quad (1.23)$$

Consideriamo per semplicità il caso unidimensionale, con  $\Omega = (0, 1)$  e una funzione  $u$  costante. L'argomento di rilassamento sul continuo corrisponde a scegliere come funzioni  $u_j \rightarrow u$  le funzioni costruite prendendo una funzione  $\overline{u}$  periodica di periodo 1 con

$$\overline{u}(s) = \begin{cases} v & \text{se } 0 < s \leq t \\ w & \text{se } t < s \leq 1, \end{cases}$$

dove  $v$  e  $w$  sono dati da (1.23) e  $u_j(s) = \bar{u}(T_j s)$ , dove  $T_j \rightarrow +\infty$ . Per ripetere questo ragionamento con  $u_\varepsilon$  una discretizzata di  $\bar{u}(T_\varepsilon s)$  si deve richiedere che  $T_\varepsilon \ll 1/\varepsilon$  di modo che il periodo di oscillazione  $T_\varepsilon^{-1}$  di  $\bar{u}(T_\varepsilon s)$  non interferisca con la scala discreta  $\varepsilon$ . Dunque le oscillazioni generate dalla non-convessità di  $W$  devono avvenire su una scala molto più grande di  $\varepsilon$ , anche se sempre infinitesima (scala *mesoscopica*).

**Osservazione 1.4.3 (regolarità di  $\Omega$  - un controesempio)** Nell'esempio qui sopra abbiamo supposto che  $\Omega$  abbia frontiera di misura nulla per potere confrontare la misura di  $\Omega$  e la misura dell'unione di cubi che contengono i punti di  $\Omega_\varepsilon$ . Questa ipotesi è essenziale, diversamente da quello che succede per i funzionali integrali. Un semplice esempio si ottiene come segue: prendiamo  $W$  convessa. In questo caso, per quanto visto sopra si ha  $F(u) = \int_\Omega W(u) dx$  se  $\Omega$  è regolare. Prendiamo (per esempio in una dimensione) come  $\Omega \subset (0, 1)$  un insieme aperto di misura strettamente più piccola di 1 che contiene tutti i punti razionali di  $(0, 1)$ , per  $\varepsilon_j$  razionale si ha

$$E_{\varepsilon_j}(u) = \sum_{i \in \Omega_{\varepsilon_j}} \varepsilon_j W(u_i) = \sum_{i \in \varepsilon_j \mathbb{Z} \cap (0,1)} \varepsilon_j W(u_i),$$

per cui, se  $\tilde{F}$  è il  $\Gamma$ -limite calcolato lungo questa successione, si ha

$$\tilde{F}(u) = \int_{(0,1)} W(u) dx > \int_\Omega W(u) dx$$

se  $W(u) \neq 0$  su un sottoinsieme di misura positiva di  $(0, 1) \setminus \Omega$ .

Questo tipo di esempi si trova spesso quando si trattano funzionali su strutture singolari e misure. I funzionali discreti possono essere inclusi in questa categoria identificando funzioni  $u : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  con somme di delta di Dirac  $\sum_{i \in \Omega_\varepsilon} u_i \delta_i$ .

### 1.4.2 Omogeneizzazione. Limiti ‘multi-fase’

Consideriamo una semplice variante del problema precedente, in cui la funzione integranda dipende in maniera periodica dal punto  $i$  (possiamo pensare di avere un certo numero  $K^d$  di ‘specie’ diverse di variabili). Quindi abbiamo

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{i \in \Omega_\varepsilon} \varepsilon^d W_{i/\varepsilon}(u_i)$$

dove  $k \mapsto W_k$  è periodica di periodo  $K$  in ogni direzione coordinata (ovvero  $W_k = W_{k+K e_j}$  per ogni  $j = 1, \dots, d$ ). In questo caso possiamo considerare i sotto-reticoli

$$\Omega_{K\varepsilon}^j = \varepsilon j + \varepsilon K \mathbb{Z}^d \text{ per ogni } j \in \{1, \dots, K\}^d.$$

Per l'esempio precedente possiamo studiare la convergenza dei funzionali

$$E_\varepsilon^j(u) = \sum_{i \in \Omega_{K\varepsilon}^j} (K\varepsilon)^d W_j(u_i),$$

il cui limite è

$$F^j(u) = \int_{\Omega} W_j^{**}(u) dx.$$

Se  $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  definiamo  $u_\varepsilon^j(i) = u_\varepsilon(i)$ , identificata ora con una funzione dello spazio delle funzioni  $X_{K\varepsilon}$  costanti nei cubi  $Q_i^{K\varepsilon}$ . Se  $u_\varepsilon$  è una successione equi-limitata in energia,  $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq c < +\infty$ , allora ogni successione  $(u_\varepsilon^j)$  è limitata in  $L^p$  e se ne può quindi estrarre una sottosuccessione comune convergente a  $u^j$  per ogni  $j$ . Se inoltre  $u_\varepsilon \rightarrow u$  allora si ha

$$u = \frac{1}{K^d} \sum_{j \in \{1, \dots, K\}^d} u^j.$$

Inoltre abbiamo

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sum_{j \in \{1, \dots, K\}^d} \frac{1}{K^d} E_\varepsilon^j(u_\varepsilon^j),$$

per cui si deduce la disuguaglianza del liminf

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \sum_{j \in \{1, \dots, K\}^d} \frac{1}{K^d} F^j(u^j) \geq \int_{\Omega} W_{\text{hom}}(u) dx, \quad (1.24)$$

dove  $W_{\text{hom}}$  è data dalla *formula di omogeneizzazione*

$$W_{\text{hom}}(z) = \min \left\{ \sum_{j \in \{1, \dots, K\}^d} \frac{1}{K^d} W_j^{**}(z_j) : z = \frac{1}{K^d} \sum_{j \in \{1, \dots, K\}^d} z_j \right\}. \quad (1.25)$$

La disuguaglianza opposta per una  $u = z$  costante si ottiene trovando le  $z_j$  ottimali nella formula di omogeneizzazione. Per queste si considerano le successioni oscillanti  $u_\varepsilon^j$  costruite nell'esempio precedente e ottimali per  $F^j(z_j)$ . Le successioni ottimali per  $z$  sono quindi date da  $u_\varepsilon(i) = u_\varepsilon^j(i)$  se  $i \in \Omega_{K\varepsilon}^j$ . Dunque il funzionale

$$F_{\text{hom}}(u) = \int_{\Omega} W_{\text{hom}}(u) dx$$

rappresenta il  $\Gamma$ -limite di  $E_\varepsilon$ .

**Osservazione 1.4.4 (formula di omogeneizzazione)** La formula (1.25) corrisponde a quella dell'omogeneizzazione di integrali scalari. È da notare che la formula integrale corrispondente si riconduce ad un problema di minimo del funzionale di partenza in una

cella di periodicità mentre questa formula comporta una precedente convessificazione, che coinvolge una scala mesoscopica (e quindi infinite celle di periodicità).

Da notare inoltre che nel caso continuo l'ipotesi di convessità non è restrittiva per un ragionamento di rilassamento.

**Osservazione 1.4.5 (“Coarse graining”)** Una dimostrazione alternativa all'introduzione delle variabili  $u^j$  consiste nel considerare direttamente la scala mesoscopica, introducendo una media su molte celle di periodicità (*coarse graining*). In questo caso si prende  $M \in \mathbb{N}$  e si stima l'energia  $E_\varepsilon(u)$  con l'energia  $E_\varepsilon^M(v)$  definita sulle funzioni  $v \in X_{MK\varepsilon}$  da

$$E_\varepsilon^M(v) = \sum_{i \in \Omega_{MK\varepsilon}} (MK\varepsilon)^d W^M(v_i),$$

$v$  è data dalla media di  $u$ , ovvero

$$v_i = \frac{1}{(MK)^d} \sum_{k \in \varepsilon \mathbb{Z}^d \cap Q_i^{MK\varepsilon}} u_k.$$

e  $W^M$  è data da

$$W^M(z) = \min \left\{ \sum_{j \in \{1, \dots, MK\}^d} \frac{1}{(MK)^d} W_j(z_j) : z = \frac{1}{(MK)^d} \sum_{j \in \{1, \dots, MK\}^d} z_j \right\}. \quad (1.26)$$

Facendo tendere  $M \rightarrow +\infty$  si ottiene una stima con  $\inf_M W^M$ , che in questo caso coincide con la  $W_{\text{hom}}$  definita sopra (*formula di omogeneizzazione asintotica*). Questo ragionamento di *coarse graining* è più generale di quello esposto sopra, ed è comunemente applicato a problemi vettoriali, in cui non ci si può ricondurre a ‘formule sulla cella di periodicità’.

**Osservazione 1.4.6 (limiti multi-fase)** Il ragionamento in (1.24) mostra che si può calcolare equivalentemente il  $\Gamma$ -limite rispetto alla convergenza  $u_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} := (u^j)_{j \in \{1, \dots, K\}^d}$  definita da  $u_\varepsilon^j \rightharpoonup u^j$  per ogni  $j$ . In questo caso il  $\Gamma$ -limite è definito sullo spazio di funzioni a valori vettoriali  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^{K^d})$ , di dimensione maggiore del precedente, ed è dato da

$$F(\mathbf{u}) = \sum_{j \in \{1, \dots, K\}^d} \frac{1}{K^d} F^j(u^j).$$

In questo modo si descrive separatamente l'energia relativa a ogni ‘specie’  $j$ . Da notare che la convergenza delle  $(u_\varepsilon)$  così definita risulta ancora compatta.

### 1.4.3 Energie tra primi vicini. Oscillazioni microscopiche

Negli esempi precedenti abbiamo visto alcuni calcoli di  $\Gamma$ -limite in cui le tecniche di rilassamento, convessificazione e omogeneizzazione sul continuo devono essere adattate al caso discreto. Ora esaminiamo un esempio in cui per trattare la variabile discreta dobbiamo elaborare un nuovo tipo di ragionamento.

Consideriamo il caso  $d = 1$  e  $\Omega$  un intervallo limitato. In questo caso usiamo una nuova parametrizzazione per le funzioni discrete. Se  $N = \#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap \Omega)$ , allora possiamo riparametrizzare le nostre energie prendendo come dominio delle nostre funzioni l'insieme  $\{\frac{j}{N} : j = 1, \dots, N\}$  e, con abuso di notazioni, indichiamo allora

$$\varepsilon = \frac{1}{N}, \quad u_j = u(j\varepsilon).$$

In termini dei funzionali che consideriamo, questo corrisponde a dividere per il fattore  $\varepsilon N$  ( $= |\Omega| + o(1)$  per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) e a riparametrizzare sull'intervallo  $(0, 1)$  le energie sul continuo.

Le energie che studieremo si possono scrivere nella forma

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{j=1}^N \varepsilon W_1(u_j) + \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon W_2(u_j + u_{j+1}).$$

Esse, quindi, sommano ad un'energia di punto un'energia che tiene conto dell'interazione tra i *primi vicini*. Su  $W_1$  e  $W_2$  facciamo per semplicità le stesse ipotesi (1.22) degli esempi precedenti; per un ragionamento di rilassamento si possono anche supporre semicontinue inferiormente.

Esaminiamo brevemente le stime che si ottengono ripetendo i ragionamenti visti sopra. Notiamo che se  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  allora anche per le funzioni  $\bar{u}_\varepsilon$  definite da  $(\bar{u}_\varepsilon)_j = ((u_\varepsilon)_j + (u_\varepsilon)_{j+1})/2$  si ha  $\bar{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ . Dunque otteniamo la stima inferiore

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^N \varepsilon W_1((u_\varepsilon)_j) + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon W_2(2(\bar{u}_\varepsilon)_j) \\ &\geq \int_{(0,1)} W_1^{**}(u) dx + \int_{(0,1)} W_2^{**}(2u) dt. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Viceversa, prendendo  $u_\varepsilon(\varepsilon j) = u(\varepsilon j)$  (se  $u$  è costante a tratti, per esempio), si ottiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{(0,1)} (W_1(u) + W_2(2u)) dt,$$

e quindi, per rilassamento

$$\Gamma\text{-lim sup}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u) \leq \int_{(0,1)} (W_1(u) + W_2(2u))^{**} dt. \quad (1.28)$$



I funzionali in queste due stime sono in generale differenti, e quindi non permettono di dedurre la  $\Gamma$ -convergenza.

Per calcolare il  $\Gamma$ -limite dobbiamo usare un diverso ragionamento di ottimizzazione delle interazioni tra primi vicini. Per formalizzarlo, scriviamo

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(u) &= \sum_{j=1}^N \varepsilon \frac{1}{2} W_1(u_j) + \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon \frac{1}{2} W_1(u_{j+1}) + \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon W_2(u_j + u_{j+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon \left( \frac{1}{2} W_1(u_j) + \frac{1}{2} W_1(u_{j+1}) + W_2(u_j + u_{j+1}) \right) + \frac{1}{2} \varepsilon W_1(u_N) + \frac{1}{2} \varepsilon W_1(u_1) \\
&\geq \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon W_{\text{eff}} \left( \frac{u_j + u_{j+1}}{2} \right), \tag{1.29}
\end{aligned}$$

dove

$$W_{\text{eff}}(z) = \min \left\{ \frac{1}{2} W_1(z_1) + \frac{1}{2} W_1(z_2) : \frac{z_1 + z_2}{2} = z \right\} + W_2(z). \tag{1.30}$$

In questo modo si ottiene la stima inferiore

$$\Gamma\text{-lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u) \geq \int_{(0,1)} W_{\text{eff}}^{**}(u) dt.$$

Per provare la stima superiore questa volta non possiamo usare le discretizzazioni della funzione limite. Se  $u = z$  è costante allora si sceglie  $u_\varepsilon$  definita da

$$u_\varepsilon(\varepsilon j) = \begin{cases} z_1 & \text{se } j \text{ è pari} \\ z_2 & \text{se } j \text{ è dispari,} \end{cases}$$

dove  $z_1$  e  $z_2$  minimizzano il problema in (1.30). La stessa costruzione si può effettuare se  $u$  è costante a tratti, ottenendo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{(0,1)} W_{\text{eff}}(u) dt,$$

e quindi per rilassamento la stima voluta. In conclusione, la successione presenta *oscillazioni microscopiche* con periodo  $2\varepsilon$  (descritte dalla formula di minimo per le interazioni tra primi vicini) e le oscillazioni mesoscopiche caratterizzate dal secondo processo di convessificazione.

**Esempio 1.4.7** Un semplice esempio si ottiene prendendo

$$W_1(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z = 1 \text{ o } z = -1 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad W_2(z) = \frac{1}{4} z^2.$$

Si ha allora

$$\min\left\{\frac{1}{2}W_1(z_1) + \frac{1}{2}W_1(z_2) : \frac{z_1 + z_2}{2} = z\right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in \{-1, 0, 1\} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$W_{\text{eff}}(z) = \begin{cases} z^2 & \text{se } z \in \{-1, 0, 1\} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad W_{\text{eff}}^{**}(z) = \begin{cases} |z| & \text{se } |z| \leq 1 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le funzioni ottenute in (1.27) e (1.28) sono invece

$$W_1^{**}(z) + W_2^{**}(2z) = \begin{cases} z^2 & \text{se } |z| \leq 1 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (W_1(z) + W_2(2z))^{**} = \begin{cases} 1 & \text{se } |z| \leq 1 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il confronto con l'integrando del  $\Gamma$ -limite è riportato in figura 1.1.

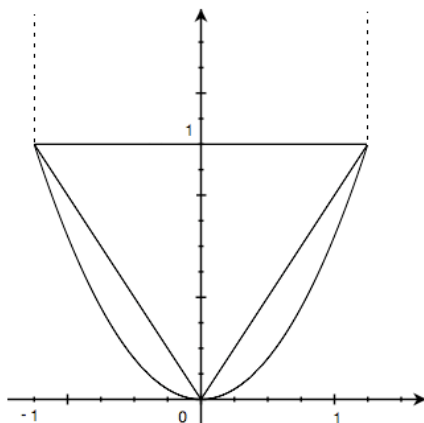


Figure 1.1: la densità di energia del  $\Gamma$ -limite nell'esempio 1.4.7 e suo confronto con le stime banali

## 1.5 Sviluppo per $\Gamma$ -convergenza

Nell'ottica di descrivere dei problemi di minimo per  $F_\varepsilon$  con un problema di minimo per il  $\Gamma$ -limite  $F^{(0)}$ , quando quest'ultimo è degenere, in particolare con molti punti di minimo, può essere utile iterare il processo di  $\Gamma$ -convergenza come segue:

- si congetta una 'scala' ulteriore (ovvero una funzione infinitesima di  $\varepsilon$ ), che supponiamo essere  $\varepsilon^\alpha$  (ma vedremo che non è sempre di tipo polinomiale);
- si considera il funzionale

$$F_\varepsilon^{(\alpha)}(x) = \frac{F_\varepsilon(x) - \inf F}{\varepsilon^\alpha}. \quad (1.31)$$

Notiamo che  $F_\varepsilon^{(\alpha)}$  ha gli stessi punti di minimo di  $F_\varepsilon$ . Poniamo

$$m_\varepsilon := \inf F_\varepsilon, \quad m^{(0)} := \inf F^{(0)}, \quad m_\varepsilon^{(\alpha)} := \inf F_\varepsilon^{(\alpha)} \quad (1.32)$$

per cui

$$m_\varepsilon^{(\alpha)} = \frac{m_\varepsilon - m^{(0)}}{\varepsilon^\alpha}; \quad (1.33)$$

- si calcola il  $\Gamma$ -limite ( $\Gamma$ -limite di  $(F_\varepsilon)$  alla scala  $\varepsilon^\alpha$ )

$$F^{(\alpha)}(x) = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon^{(\alpha)}(x); \quad (1.34)$$

• se questo limite non è banale abbiamo allora il seguente risultato, che discende subito dal Teorema Fondamentale della  $\Gamma$ -convergenza.

**Teorema 1.5.1 (sviluppo dei problemi di minimo)** *Se valgono le ipotesi di equicoerività del Teorema Fondamentale della  $\Gamma$ -convergenza allora esistono i minimi  $\min F^{(0)}$  e  $m^{(\alpha)} := \min F^{(\alpha)}$  e  $m_\varepsilon^{(\alpha)} \rightarrow m^{(\alpha)}$ , per cui*

$$m_\varepsilon = m^{(0)} + \varepsilon^\alpha m^{(\alpha)} + o(\varepsilon^\alpha). \quad (1.35)$$

*Inoltre se  $(x_\varepsilon)$  è una successione  $\varepsilon^\alpha$ -minimizzante di  $(F_\varepsilon)$ , ovvero tale che  $F_\varepsilon(x_\varepsilon) = \inf F_\varepsilon + o(\varepsilon^\alpha)$ , ed  $x$  è un suo punto di accumulazione, allora  $x$  è un punto di minimo sia per  $F^{(0)}$  che per  $F^{(\alpha)}$ .*

**Osservazione 1.5.2** (i) Dalla definizione di  $F^{(\alpha)}$  si ottiene subito che il dominio di  $F^{(\alpha)}$  è contenuto nell'insieme dei punti di minimo di  $F^{(0)}$ , ovvero  $F^{(\alpha)}(x) = +\infty$  se  $F^{(0)}(x) \neq \min F^{(0)}$ ;

(ii) nelle ipotesi del teorema può ancora esistere una scala intermedia, che supponiamo ancora polinomiale  $\varepsilon^\beta$  con  $\varepsilon^\alpha \ll \varepsilon^\beta \ll 1$ , tale che il limite

$$F^{(\beta)}(x) = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_\varepsilon(x) - \inf F}{\varepsilon^\beta} \quad (1.36)$$

esista e non sia banale, ma in tal caso si deve avere  $\min F^{(\beta)} = 0$ . In caso contrario si violerebbe lo sviluppo (1.35);

(iii) se per ogni scala intermedia  $\varepsilon^\alpha \ll s_\varepsilon \ll 1$  si ha

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_\varepsilon(x) - \inf F}{s_\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{se } F^{(0)}(x) = \min F^{(0)} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.37)$$

allora diremo che lo sviluppo è *completo alla scala  $\varepsilon^\alpha$* ;

(iv) se il dominio di  $F^{(\alpha)}$  è denso nell'insieme dei punti di minimo di  $F^{(0)}$ , allora lo sviluppo è completo alla scala  $\varepsilon^\alpha$ ;

(v) la procedura si può iterare introducendo una seconda scala  $\varepsilon^\gamma \ll \varepsilon^\alpha$  e applicando il procedimento a  $F_\varepsilon^{(\alpha)}$ , e così via.

La definizione di sviluppo per  $\Gamma$ -convergenza data sopra permette di estendere la relazione di equivalenza per  $\Gamma$ -convergenza.

**Definizione 1.5.3 (Equivalenza per  $\Gamma$ -convergenza alla scala  $\varepsilon^\alpha$ )** Diremo che due famiglie  $(F_\varepsilon)$  e  $(G_\varepsilon)$  sono equivalenti per  $\Gamma$ -convergenza alla scala  $\varepsilon^\alpha$  se da ogni successione  $(\varepsilon_j)$  si estrae una sottosuccessione (denotata sempre con  $(\varepsilon_j)$ ) ed esiste una successione di numeri reali  $(m_j)$  tale che esistono i  $\Gamma$ -limiti

$$\Gamma\text{-}\lim_j \frac{F_{\varepsilon_j} - m_j}{\varepsilon_j^\alpha}, \quad \Gamma\text{-}\lim_j \frac{G_{\varepsilon_j} - m_j}{\varepsilon_j^\alpha},$$

coincidono, e non sono banali.

In particolare, nelle ipotesi del teorema sopra e prendendo  $m_j = m_{\varepsilon_j}$ , si ha che  $F_\varepsilon$  è equivalente a  $m_\varepsilon + \varepsilon^\alpha F^{(\alpha)}$  alla scala  $\varepsilon^\alpha$ .

### 1.5.1 Spin unidimensionali

Consideriamo energie unidimensionali definite su funzioni  $u : \varepsilon\mathbb{Z} \rightarrow \{-1, +1\}$  (*spin*), con interazioni tra primi vicini della forma

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{\varepsilon i, \varepsilon j \in \Omega_\varepsilon, |i-j|=1} \varepsilon f(u_i, u_j)$$

(adottiamo la notazione  $u_i = u(\varepsilon i)$ ).

Mostriamo ora che possiamo ricondurci ad  $f$  di una forma semplificata: prima di tutto, dato che

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{\varepsilon i, \varepsilon j \in \Omega_\varepsilon, |i-j|=1} \varepsilon \left( \frac{f(u_i, u_j) + f(u_j, u_i)}{2} \right)$$

possiamo supporre che  $f$  sia simmetrica:  $f(u, v) = f(v, u)$ . Dunque, a meno di una riparametrizzazione dei punti di  $\Omega_\varepsilon$  possiamo supporre di avere l'energia

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^N \varepsilon f(u_i, u_{i-1}),$$

con  $N = 1/\varepsilon$ .

Possiamo riscrivere

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^N \varepsilon (f(u_i, u_{i-1}) + g(u_i, u_{i-1})) - \sum_{i=1}^N \varepsilon g(u_i, u_{i-1}), \quad (1.38)$$

dove  $g(u, u) := f(-u, -u)$  e  $g(1, -1) = g(-1, 1) := \frac{1}{2}(f(1, 1) + f(-1, -1))$ . L'aggiunta di tale  $g$  è fatta perchè l'integrando della prima somma abbia lo stesso valore in  $(-1, -1)$  e  $(1, 1)$ . Notiamo che

$$g(u, v) = \frac{1}{2}g(u, u) + \frac{1}{2}g(v, v), \quad (1.39)$$

e abbiamo quindi

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon g(u_i, u_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon g(u_i, u_i) + \frac{1}{2}\varepsilon g(u_0, u_0) + \frac{1}{2}\varepsilon g(u_N, u_N).$$

Dato che gli ultimi due termini si possono trascurare, la seconda somma in (1.38) si riscrive come  $\sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon W_0(u_i)$ , dove  $W_0$  è la funzione affine tale che  $W_0(\pm 1) = g(\pm 1, \pm 1)$ . Notiamo che questa somma corrisponde a  $G(u) = \int_{(0,1)} W_0(u) dt$ , che è un funzionale continuo rispetto alla topologia  $L^1$ -debole, e commuta quindi con l'operazione di  $\Gamma$ -limite. Possiamo quindi limitarci a considerare la prima somma in (1.38). Questo è un esempio in cui l'aggiunta di una perturbazione continua permette di semplificare la forma dei funzionali in considerazione.

Dunque non è restrittivo supporre che  $f$  sia simmetrica e  $f(1, 1) = f(-1, -1)$ . A meno del caso banale di  $f$  costante, quindi, ci sono solo due casi:  $f(1, 1) < f(1, -1)$  e  $f(1, 1) > f(1, -1)$ . A meno di traslazioni possiamo supporre che i due valori assunti da  $f$  siano 0 e 1. Possiamo quindi riscrivere i due casi possibili come

$$f(u, v) = \frac{1}{4}(u - v)^2, \quad f(u, v) = \frac{1}{4}(u + v)^2.$$

Notiamo che, di nuovo a meno di aggiunte di costanti moltiplicative ed additive, i due casi corrispondono, rispettivamente, a

$$f(u, v) = -uv, \quad f(u, v) = uv.$$

Trattiamo solo il primo dei due casi, poiché il secondo di questi si riconduce al primo con il cambio di variabili  $w_i = (-1)^i u_i$ .

Consideriamo quindi

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \varepsilon (u_i - u_{i-1})^2 \quad u_i \in \{-1, 1\}. \quad (1.40)$$

Possiamo confrontare  $E_\varepsilon$  con un'energia del tipo  $\tilde{E}_\varepsilon(v) = \sum_i \varepsilon W(v_i)$ , ponendo

$$v_i = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}, \quad W(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v = -1 \text{ o } v = 1 \\ 1 & \text{se } v = 0 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1.41)$$

Notiamo che se  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  allora anche  $v_\varepsilon \rightharpoonup u$ , per cui

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \tilde{E}_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \int_{(0,1)} W^{**}(u) dt.$$

La disuguaglianza per il  $\Gamma$ -limsup di  $E_\varepsilon$  non si può direttamente dedurre da quella per  $\tilde{E}_\varepsilon$  in quanto non tutte le successioni ottimali  $v_\varepsilon$  sono riconducibili a delle  $u_\varepsilon$  tramite (1.41). Per sottolineare l'errore dovuto a questa mancata corrispondenza, notiamo che per approssimare debolmente una costante con funzioni oscillanti di nuovo si deve introdurre una scala mesoscopica  $\varepsilon \ll \eta_\varepsilon \ll 1$ , e prendere  $u_\varepsilon$  oscillante su questa scala tra 1 e  $-1$ . Basta specificare la costruzione quando la funzione limite è una costante  $0 < z < 1$ . In tal caso si definisce la funzione  $u_z : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$  periodica di periodo 1 e tale che

$$u_z(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < s \leq \frac{z+1}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{z+1}{2} < s \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad u_\varepsilon(i) = u_z\left(\frac{\varepsilon i}{\eta_\varepsilon}\right).$$

Dato che  $u_z(t/\eta_\varepsilon) \rightharpoonup z$ , anche  $u_\varepsilon \rightharpoonup z$  ed è facile verificare che realizza il valore voluto. Dunque si ha

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } |u| \leq 1 \text{ quasi ovunque} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo ora analizzare il  $\Gamma$ -limite alla scala  $\varepsilon$ . Questa scala è suggerita dal fatto che  $\varepsilon$  è l'errore che viene fatto abbandonando uno stato minimale identicamente 1 o  $-1$ . In questo caso si ha semplicemente

$$E_\varepsilon^{(1)}(u) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N (u_i - u_{i-1})^2 \quad u_i \in \{-1, 1\}. \quad (1.42)$$

Dunque se  $E_\varepsilon^{(1)}(u_\varepsilon) \leq c < +\infty$  allora l'estensione costante a tratti di  $u_\varepsilon$  ha un insieme di punti di discontinuità  $S(u_\varepsilon)$  di cardinalità al più  $c$ . Se

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \#S(u_\varepsilon) = M$$

possiamo supporre quindi, a meno di sottosuccessioni, che tali punti di discontinuità  $(t_\varepsilon^j)$  verifichino  $0 < t_\varepsilon^1 < t_\varepsilon^2 < \dots < t_\varepsilon^M < 1$  e convergano a punti  $t^j$  con  $0 \leq t^1 \leq \dots \leq t^M \leq 1$ . Dunque  $u_\varepsilon$  converge (ora in senso forte) ad una funzione  $u$  costante a tratti, il cui insieme di punti di discontinuità  $S(u)$  è contenuto in  $\{t^j : j = 1, \dots, M\}$ . Si ha quindi

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon^{(1)}(u_\varepsilon) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \#(S(u_\varepsilon)) \geq \#(S(u)).$$

La disuguaglianza opposta si ottiene prendendo  $u_\varepsilon(\varepsilon i) = u(\varepsilon i)$ . Dunque il  $\Gamma$ -limite alla scala  $\varepsilon$  è

$$F^{(1)}(u) = \begin{cases} \#(S(u)) & \text{se } u \text{ è costante a tratti e } u \in \{1, -1\} \text{ q.o.} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo quindi affermare che  $E_\varepsilon$  è equivalente a  $F_\varepsilon = \varepsilon F^{(1)}$  alla scala  $\varepsilon$ . In questo caso possiamo anche scegliere altri funzionali sul continuo equivalenti a  $E_\varepsilon$ ; per esempio funzionali della teoria di gradiente delle transizioni di fase

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^1 (W_0(u) + \varepsilon^2 |u'|^2) dt, \quad u \in H^1(0, 1),$$

con  $W_0$  un potenziale a doppio pozzo con minimi in  $-1$  e  $1$  e tale che  $2 \int_{-1}^1 \sqrt{W(s)} ds = 1$ .

Notiamo che le funzioni su cui  $F^{(1)}$  è finito sono dense per la topologia debole nell'insieme dei punti di minimo di  $F^{(0)}$  e quindi lo sviluppo alla scala  $\varepsilon$  è completo.

**Osservazione 1.5.4 (interfaccia di anti-fase)** Notiamo che il parametro  $w$  definito da  $w_i = (-1)^i u_i$  modifica un'energia di tipo antiferromagnetico (in  $u$ ) rendendola un'energia di tipo ferromagnetico (in  $w$ ). Un'interfaccia di fase per  $w$  corrisponde ad un'interfaccia di antifase di  $u$ , ovvero un passaggio da uno stato  $(-1)^i$  a  $(-1)^{i+1}$ .

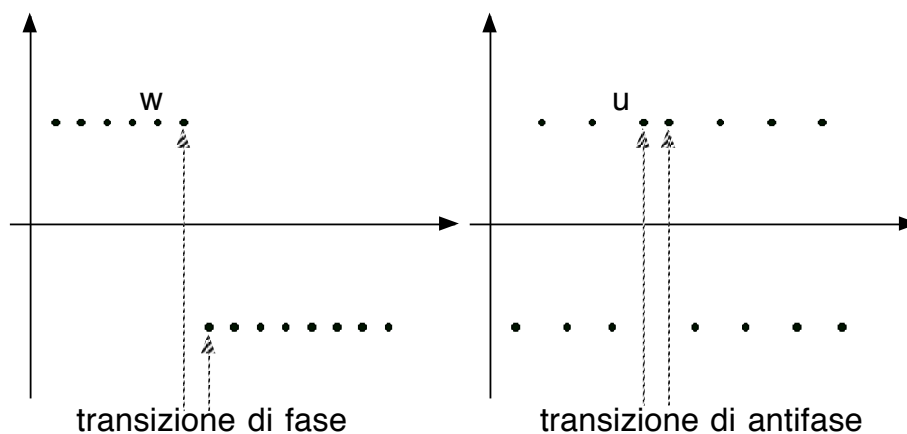


Figure 1.2: interfaccia di fase e corrispondente interfaccia di antifase

## 1.6 Strati limite

Come abbiamo già visto l'interazione tra primi vicini può aggiungere ad un'energia integrale un ulteriore effetto di transizione di fase. Nel capitolo 1.5.1 la transizione è 'brusca', per la natura delle energie; ora esaminiamo un esempio, di natura generale, in cui questa transizione è generata da 'strati limite' a livello del reticolo. Consideriamo a questo scopo un potenziale di punto non convesso perturbato da un termine di interazione tra primi vicini.

**Esempio 1.6.1 (spin con potenziale elastico - analisi alla scala 1)** Consideriamo un sistema ‘di spin’ in cui il vincolo  $u_i \in \{-1, 1\}$  è sostituito da un potenziale a doppio pozzo; prendiamo

$$W(u) = (|u| - 1)^2,$$

e l’energia ( $\varepsilon = 1/N$  e  $K \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u) &= \sum_{i=1}^N \varepsilon(W(u_i) + K u_i u_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \varepsilon \left( \frac{1}{2}(W(u_i) - K u_i^2) + \frac{1}{2}(W(u_{i-1}) - K u_{i-1}^2) + 2K \left( \frac{u_i + u_{i-1}}{2} \right)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon W(u_0) + \frac{1}{2} \varepsilon W(u_N). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Analizziamo per prima cosa il comportamento di  $E_\varepsilon$  alla scala 1.

**1.** Se  $K \geq 1$  al potenziale  $W(u) - K u^2$  non si può applicare l’analisi nel capitolo 1.5.1. In questo caso il  $\Gamma$ -limite è però banale ed è identicamente  $-\infty$ . Per vederlo, basta esibire per ogni  $u$  e per ogni  $M > 0$  una successione  $u_\varepsilon \rightarrow u$  tale che  $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq -M$ . Vediamolo per  $u = z$  costante. In questo caso fissiamo  $t > |z|$  e prendiamo

$$u_\varepsilon(\varepsilon i) = z + (-1)^i t.$$

Si ha allora

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq (t - 1)^2 + z^2 + K(z^2 - t^2) + \varepsilon(t + |z|)^2.$$

Dato che il secondo termine tende a  $-\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$  la stima voluta è dimostrata.

**2.** Viceversa, se  $K \leq -1$  è il termine di interazione tra primi vicini che diventa illimitato, e ancora il  $\Gamma$ -limite è identicamente  $-\infty$ . In questo caso se  $u$  è continua basta prendere  $u_\varepsilon(\varepsilon i) = u(\varepsilon i)$ , ottenendo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{(0,1)} \left( (|u| - 1)^2 + K u^2 \right) dt.$$

Dato che l’involuppo convesso dell’integrando al secondo membro è  $-\infty$  si ha la stima voluta per rilassamento.

**3.** Se  $-1 < K < 1$  si può applicare l’analisi nel capitolo 1.5.1, ottenendo l’integrando ‘effettivo’

$$W_{\text{eff}}(u) = \frac{K}{K - 1} + 2K u^2 + (1 - K) \min \left\{ \left( |u| - \frac{1}{1 - K} \right)^2, u^2 \right\}.$$

Tale funzione ha tre aspetti diversi, riassunti nella figura 1.3.



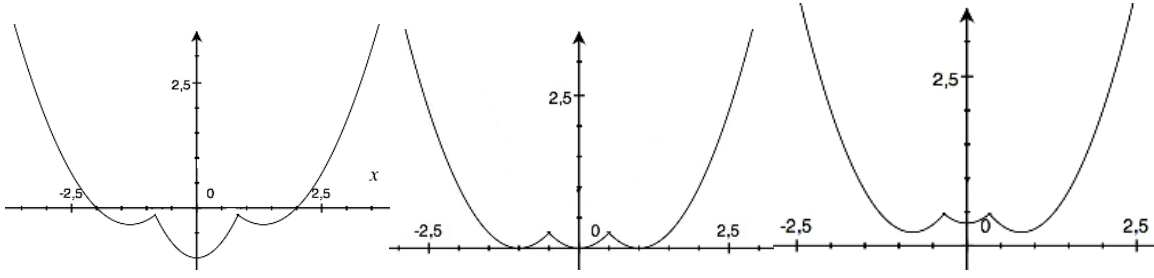


Figure 1.3: integrandi ‘effettivi’ per spin elastici ( $0 < K < 1$ ,  $K = 0$  e  $-1 < K < 0$ )

**Esempio 1.6.2 (analisi alla scala  $\varepsilon$ : strati limite)** Possiamo ora esaminare la scala successiva, che, come nel caso degli spin, è  $\varepsilon$ . Esaminiamo i tre casi non banali dell’esempio precedente.

**1:**  $-1 < K < 0$ . In questo caso i punti di minimo dell’energia limite sono tutte le funzioni  $u$  con  $\|u\|_\infty \leq \frac{1}{1+K}$ , e il loro comune valore dell’energia è  $\frac{K}{K+1}$

Esaminiamo l’energia

$$\begin{aligned}
 E_\varepsilon^{(1)}(u) &= \sum_{i=1}^N \left( W(u_i) + K u_i u_{i-1} - \frac{K}{K+1} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} (W(u_i) - K u_i^2) + \frac{1}{2} (W(u_{i-1}) - K u_{i-1}^2) + 2K \left( \frac{u_i + u_{i-1}}{2} \right)^2 - \frac{K}{K+1} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} W(u_0) + \frac{1}{2} W(u_N). \tag{1.44}
 \end{aligned}$$

Da una stima  $E_\varepsilon^{(1)}(u) \leq M$  deduciamo prima di tutto che possiamo stimare il numero di indici  $i$  in cui  $(W(u_i) - K u_i^2) + \frac{1}{2} (W(u_{i-1}) - K u_{i-1}^2) + 2K \left( \frac{u_i + u_{i-1}}{2} \right)^2$  non è vicino al suo minimo  $\frac{K}{K+1}$ . Dato che tale minimo è ottenuto solo per  $u_i = u_{i-1} \in \{-1/(1+K), 1/(1+K)\}$ , abbiamo più precisamente:

- fissato  $\eta > 0$  il numero di indici  $i$  tale che non si abbia contemporaneamente  $|u_i - \frac{1}{1+K}| \leq \eta$  e  $|u_{i-1} - \frac{1}{1+K}| \leq \eta$ , oppure contemporaneamente  $|u_i + \frac{1}{1+K}| \leq \eta$  e  $|u_{i-1} + \frac{1}{1+K}| \leq \eta$  è limitato da una costante  $C(\eta, M)$  indipendente da  $\varepsilon$ .

Possiamo quindi considerare tali indici e raggrupparli in insiemi di indici consecutivi (omettiamo la dipendenza da  $\varepsilon$ ):  $\{i_k^j : j \in \{0, \dots, J+1\}, k \in \{0, \dots, M_j\}\}$ . Possiamo supporre che  $i_0^0 = 0$  e  $i_{M_{J+1}}^{J+1} = N$  ed inoltre che se per  $i = i_0^j - 1$   $|u_i - 1/(1+K)| \leq \eta$ , allora per  $i = i_{j+1}^j + 1$  si ha  $|u_i + 1/(1+K)| \leq \eta$  (ovvero in ognuno di questi gruppi di indici, tranne i due estremi) la funzione ha una transizione di fase approssimativamente tra  $1/(1+K)$  e  $-1/(1+K)$ ).

Possiamo quindi stimare dal basso la nostra energia, tenendo conto solamente del contributo relativo a questi insiemi di indici, con  $2B_\eta + D_\eta J$ , dove

$$B_\eta = \inf \left\{ \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{2}(W(u_i) - Ku_i^2) + \frac{1}{2}(W(u_{i-1}) - Ku_{i-1}^2) + 2K \left( \frac{u_i + u_{i-1}}{2} \right)^2 - \frac{K}{K+1} \right) - \frac{1}{2}W(u_0) : |u_{M-1} - 1/(K+1)| \leq \eta, |u_M - 1/(K+1)| \leq \eta, M \in \mathbb{N} \right\}$$

e

$$D_\eta = \inf \left\{ \sum_{i=-M}^M \left( \frac{1}{2}(W(u_i) - Ku_i^2) + \frac{1}{2}(W(u_{i-1}) - Ku_{i-1}^2) + 2K \left( \frac{u_i + u_{i-1}}{2} \right)^2 - \frac{K}{K+1} \right) : |u_{\pm M-1} \pm 1/(K+1)| \leq \eta, |u_{\pm M} \pm 1/(K+1)| \leq \eta, M \in \mathbb{N} \right\}.$$

È facile vedere che per  $\eta \rightarrow 0$  queste due quantità tendono rispettivamente a

$$B = \inf \left\{ \sum_{i=-M}^M \left( \frac{1}{2}(W(u_i) - Ku_i^2) + \frac{1}{2}(W(u_{i-1}) - Ku_{i-1}^2) + 2K \left( \frac{u_i + u_{i-1}}{2} \right)^2 - \frac{K}{K+1} \right) - \frac{1}{2}W(u_0) : u_{M-1} = \frac{1}{(K+1)}, u_M = \frac{1}{(K+1)}, M \in \mathbb{N} \right\}$$

e

$$D = \inf \left\{ \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{2}(W(u_i) - Ku_i^2) + \frac{1}{2}(W(u_{i-1}) - Ku_{i-1}^2) + 2K \left( \frac{u_i + u_{i-1}}{2} \right)^2 - \frac{K}{K+1} \right) : u_{\pm M-1} = \pm \frac{1}{(K+1)}, u_{\pm M} = \pm \frac{1}{(K+1)}, M \in \mathbb{N} \right\}.$$

La costante  $B$  rappresenta l'energia di uno *strato limite al bordo*, con condizione all'infinito lo stato minimale costante  $\frac{1}{(K+1)}$ . La costante  $D$  rappresenta l'energia di uno *strato limite interno*, con condizioni a  $\pm\infty$  i due stati minimali costanti  $\pm \frac{1}{(K+1)}$ .

Applicando questo ragionamento ad una successione di energia equilimitata  $u_\varepsilon$  otteniamo che

- a meno di sottosuccessioni, questa converge ad una funzione costante a tratti  $u$  con  $u \in \{\pm 1/(K+1)\}$ ;
- detto  $S(u)$  l'insieme di discontinuità di  $u$  si ha

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 2B + D\#(S(u)).$$

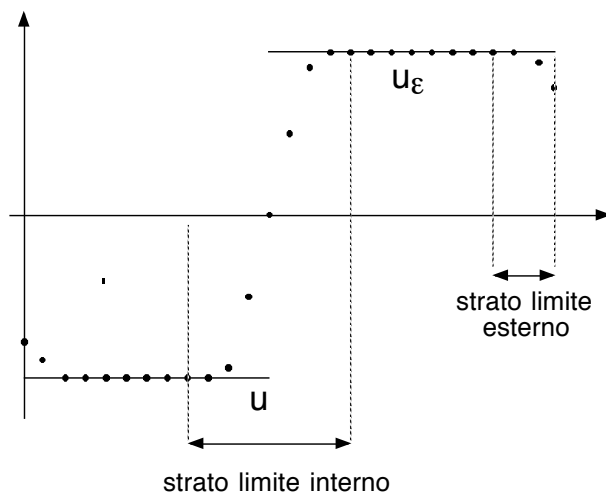


Figure 1.4: strati limite

Dalla definizione di  $B$  e  $D$  è immediato anche costruire una successione ottimale per una funzione costante a tratti  $u$  con  $u \in \{1/(K+1), -1/(K+1)\}$ , raccordando i pezzi costanti con transizioni (quasi) minimali per i problemi che definiscono le due costanti (vedi la figura 1.4).

Includiamo per completezza l'analisi degli altri due casi.

**2:**  $0 < K < 1$ . Consideriamo per semplicità in aggiunta condizioni al bordo periodiche:  $u_0 = u_N$  e  $N$  pari. In questo caso il  $\Gamma$ -limite del funzionale riscaldato è semplicemente

$$F^{(1)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u = 0 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le successioni ottimali per  $u = 0$  sono data da  $u_\varepsilon(\varepsilon i) = \frac{1}{1-K}(-1)^i$  e  $u_\varepsilon(\varepsilon i) = -\frac{1}{1-K}(-1)^i$ .

Notiamo che se invece  $N$  è dispari, il  $\Gamma$ -limite deve tenere conto della creazione di interfaccia di anti-fase, dovute all'incompatibilità delle successioni ottimali con la condizione di periodicità. In questo caso si deve introdurre un nuovo parametro come nel caso degli spin antiferromagnetici (si veda anche in seguito il capitolo sugli spin  $d$ -dimensionali).

**3:**  $K=0$ . In questo caso l'effetto dei primi vicini scompare e l'analisi alla scala  $\varepsilon^\alpha$  per ogni  $\alpha > 0$  è particolarmente semplice. Il  $\Gamma$ -limite di

$$E_\varepsilon^{(\alpha)}(u) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^{1-\alpha} W(u_i)$$

è

$$F^{(\alpha)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|u\|_\infty \leq 1 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dato che il  $\Gamma$ -limite deve essere  $+\infty$  eccetto che sui minimi del  $\Gamma$ -limite alla scala 1 basta verificare che  $F^{(\alpha)}(u) = 0$  se  $\|u\|_\infty \leq 1$ . Questo è una conseguenza immediata del fatto che  $W(1) = W(-1) = 0$ .

## 1.7 Limiti dipendenti da una variabile di *pattern*

Mostriamo adesso come si possano avere limiti in cui il parametro rilevante nell'energia finale debba essere accuratamente scelto in modo da discriminare tra minimi assoluti equivalenti. Un caso molto semplice è quello dei sistemi di spin anti-ferromagnetici, in cui i minimi sono stati oscillanti tra i valori 1 e  $-1$  con periodo due, e sono quindi definiti ancora da un parametro a due valori. In quel caso un cambio di variabili riporta l'analisi a quella dei sistemi ferromagnetici. Ora vediamo come lo stesso esempio possa essere variato di modo da ottenere minimi assoluti più complessi.

Consideriamo energie unidimensionali definite su *spin*  $u : \varepsilon\mathbb{Z} \cap [0, 1] \rightarrow \{-1, +1\}$ . con interazioni tra primi e secondi vicini della forma

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon(\alpha u_i u_{i-1} + u_{i-1} u_{i+1})$$

(adottiamo la notazione  $u_i = u(\varepsilon i)$ ), dove supponiamo che  $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$  sia intero.

Per evitare degli effetti di bordo, consideriamo le *condizioni periodiche*

$$u_{N_\varepsilon} = u_0, \quad u_{N_\varepsilon+1} = u_1, \text{ etc.},$$

di modo che la stessa energia si può riscrivere

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon \left( \frac{1}{2} \alpha (u_i u_{i-1} + u_{i+1} u_i) + u_{i-1} u_{i+1} \right)$$

I minimi assoluti di  $E_\varepsilon$  possono essere cercati quindi tra le funzioni (se esistono) che per ogni  $i$  minimizzano il termine nella sommatoria. Al variare di  $\alpha$  otteniamo tre casi:

(1)  $\alpha < -2$ . In questo caso il termine ferromagnetico dei primi vicini è dominante e i minimi sono le costanti  $\pm 1$ ;

(2)  $\alpha > 2$ . In questo caso le oscillazioni tra primi vicini dominano su quelle tra secondi vicini, e ci sono i due minimi assoluti  $\pm(-1)^i$ , di periodo 2;

(3)  $|\alpha| < 2$ . In questo caso è l'interazione tra secondi vicini ad essere dominante; abbiamo quindi quattro minimi, corrispondenti alle quattro possibili combinazioni tra gli i minimi 'antiferromagnetici' oscillanti dei secondi vicini. I minimi assoluti sono funzioni 4-periodiche, della forma

$$(u^k)_i = v_{i+k}$$

( $k = 0, 1, 2, 3$ ), dove  $v = u^0$  è data da

$$v_j = \begin{cases} -1 & \text{se } j = 1, 2 \\ 1 & \text{se } j = 3, 4 \end{cases}$$

(si veda Fig. 1.5).

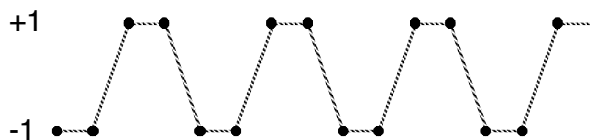


Figure 1.5: un minimo 4-periodico

Nel caso  $\alpha = -2$  abbiamo un totale di sei minimi (sia quelli del caso  $\alpha < -2$  che  $|\alpha| < 2$ ), e analogamente nel caso  $\alpha = 2$ .

### 1.7.1 Analisi all'ordine 1

In caso interessante è il caso (3). Per rendere l'esistenza di minimi compatibile con le condizioni di periodicità supponiamo che

$$N_\varepsilon \text{ sia un multiplo di } 4$$

(questa condizione e le condizioni di periodicità possono essere facilmente rimosse, con però una leggera complicazione della forma del  $\Gamma$ -limite).

Notare che si ha

$$\left( \frac{1}{2}(\alpha(v_i v_{i-1} + v_{i+1} v_i) + v_{i-1} v_{i+1}) \right) = -1,$$

per cui possiamo considerare le energie riscalate

$$E_\varepsilon^{(1)}(u) = \frac{1}{\varepsilon}(E_\varepsilon(u) - \min E_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \alpha(u_i u_{i-1} + u_{i+1} u_i) + u_{i-1} u_{i+1} + 1 \right).$$

**Compattezza.** Notiamo che se  $\sup E_\varepsilon^{(1)}(u_\varepsilon) < +\infty$ , allora, a meno di passare a sottosuccessioni, esiste  $K \in \mathbb{N}$  e un numero finito di indici  $i_1^\varepsilon, \dots, i_K^\varepsilon$  tali che  $\varepsilon i_j^\varepsilon \rightarrow x_j \in [0, 1]$  e, avendo posto  $x_0 = 0$  e  $x_{K+1} = 1$ , se  $x_j \neq x_{j-1}$  allora esiste  $\phi_j \in \{0, 1, 2, 3\}$  tale che

$$u_\varepsilon(\varepsilon i) = v_{i+\phi_j} \text{ definitivamente localmente } (x_{j-1}, x_j). \quad (1.45)$$

**Definizione del parametro d'ordine limite.** Sia  $\phi : [0, 1] \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  una funzione costante a tratti. Diremo che  $u_\varepsilon \rightarrow \phi$  se esiste una partizione finita  $x_0 = 1, \dots, x_{K+1}$  tale che  $\phi = \phi_j$  su  $(x_{j-1}, x_j)$  e vale (1.45).

**Calcolo del  $\Gamma$ -limite.** È facile localizzare il calcolo del  $\Gamma$ -limite e ricondursi ad analizzare la transizione ottimale tra due stati  $v = u^k$  e  $u^{k+l}$  for  $\phi \in \{1, 2, 3\}$ , il cui valore minimo è dato da

$$\psi(l) = \min \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \alpha (u_i u_{i-1} + u_{i+1} u_i) + u_{i-1} u_{i+1} + 1 \right) \right. \\ \left. : u_i = (u^0)_i \text{ for } i \leq -4 \quad u_i = (u^l)_i \text{ for } i \geq 4 \right\}.$$

Dato che questo minimo è fatto su un numero finito di stati il suo calcolo è immediato. Il suo valore è

$$\psi(l) = \begin{cases} \min\{6 - 3\alpha, 2 + \alpha\} & \text{se } l = 1 \\ 2 - 2|\alpha| & \text{se } l = 2 \\ \min\{6 + 3\alpha, 2 - \alpha\} & \text{se } l = 3. \end{cases}$$

Il  $\Gamma$ -limite ha la forma

$$F(\phi) = \sum_{t \in S(\phi) \cap [0, 1]} \psi(|\phi(t^+) - \phi(t^-)|),$$

dove  $\phi$  è estesa 1-periodicamente fuori di  $(0, 1)$ . Nella Fig 1.6 è rappresentata una funzione  $u$  e il corrispondente “parametro di fase”  $\phi$ .

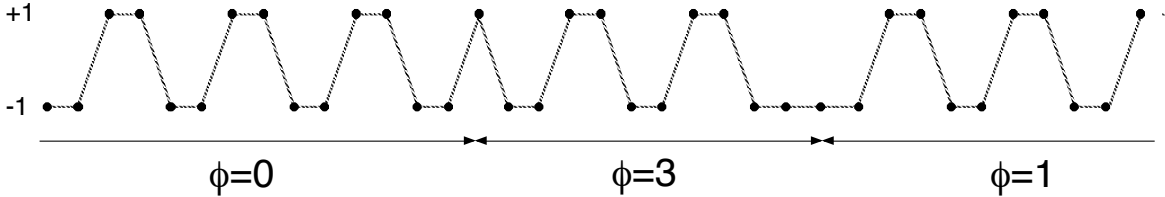


Figure 1.6: spin con transizioni della fase  $\phi$

## Chapter 2

# Sistemi di spin

In questo capitolo consideriamo energie definite su funzioni  $u : \Omega_\varepsilon := \varepsilon\mathbb{Z}^d \cap \Omega \rightarrow \{-1, +1\}$  che possiamo pensare descrivano lo stato di un sistema di spin.

### 2.1 Interazioni tra primi vicini

Consideriamo dapprima energie che tengono conto solo delle interazioni tra primi vicini, ossia della forma

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{\varepsilon i, \varepsilon j \in \Omega_\varepsilon, |i-j|=1} \varepsilon^d f(u_i, u_j)$$

(adottiamo la notazione  $u_i = u(\varepsilon i)$ ).

In virtù dei ragionamenti fatti nel paragrafo 1.5.1, che si generalizzano in qualsiasi dimensione, non è restrittivo limitarsi a due sole scelte per la densità di energia  $f$ :

i)  $f(u, v) = \frac{1}{4}(u-v)^2$  (energie di tipo ferromagnetico). In questo caso la minimizzazione di  $E_\varepsilon$  favorisce stati uniformi  $u \equiv 1$  o  $u \equiv -1$ ;

ii)  $f(u, v) = \frac{1}{4}(u+v)^2$  (energie di tipo antiferromagnetico). In questo caso la minimizzazione di  $E_\varepsilon$  favorisce configurazioni con primi vicini a segno alterno.

Notiamo che, a meno di costanti moltiplicative ed additive, i due casi corrispondono, rispettivamente, a

$$f(u, v) = -uv, \quad f(u, v) = uv.$$

Nel seguito trattiamo solo il primo dei due casi, poiché il secondo si riconduce al primo con il cambio di variabili  $w_i = (-1)^i u_i$ .

Consideriamo quindi la famiglia di energie

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon i, \varepsilon j \in \Omega_\varepsilon, |i-j|=1} \varepsilon^d (u_i - u_j)^2 \quad u_i \in \{-1, 1\}. \quad (2.1)$$

Tramite un cambio di variabile e l'introduzione di un nuovo reticolo (duale a  $\varepsilon\mathbb{Z}^d \cap \Omega$ ), lo studio del  $\Gamma$ -limite di  $E_\varepsilon$  é ricondotto all'analisi del comportamento asintotico di una famiglia di energie del tipo  $\tilde{E}_\varepsilon(v) = \sum_k \varepsilon W(v_k)$ . Definiamo a tale scopo

$$\mathcal{Z} = \left\{ \frac{i+j}{2} : i, j \in \mathbb{Z}^d, |i-j| = 1 \right\},$$

$$\Omega'_\varepsilon = \left\{ \varepsilon \frac{i+j}{2} : \varepsilon i, \varepsilon j \in \Omega_\varepsilon, |i-j| = 1 \right\}$$

e ad ogni  $u : \Omega_\varepsilon \rightarrow \{-1, +1\}$  associamo una nuova variabile  $v : \Omega'_\varepsilon \rightarrow \{-1, 0, +1\}$  definita da

$$v_k = \frac{u_i + u_j}{2}, \text{ dove } k = \frac{i+j}{2}, i, j \in \mathbb{Z}^d, |i-j| = 1. \quad (2.2)$$

Notiamo che  $v$  è tale che

$$v_k = \begin{cases} -1 & \text{se } u_i = u_j = -1 \\ 0 & \text{se } u_i = -u_j \\ 1 & \text{se } u_i = u_j = 1. \end{cases}$$

Otteniamo dunque che

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{\varepsilon k \in \Omega'_\varepsilon} \varepsilon^d W(v_k) =: \tilde{E}_\varepsilon(v),$$

dove

$$W(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v = -1 \text{ o } v = 1 \\ 1 & \text{se } v = 0 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Notiamo che se  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  allora anche  $v_\varepsilon \rightharpoonup u$  (qui  $v_\varepsilon$  è identificata con la sua interpolata costante a tratti sulle celle del reticolo duale), per cui

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \tilde{E}_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq d \int_{\Omega} W^{**}(u) dt,$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo tenuto conto che il volume della cella di riferimento del reticolo duale  $\mathcal{Z}$  è  $\frac{1}{d}$ .

La disuguaglianza del  $\Gamma$ -limsup di  $E_\varepsilon$  non si può direttamente dedurre da quella per  $\tilde{E}_\varepsilon$  in quanto non tutte le successioni ottimali  $v_\varepsilon$  sono riconducibili a delle  $u_\varepsilon$  tramite (2.2). In particolare ciò si verifica se  $v_\varepsilon$  è non costante e assume solo i valori  $-1$  e  $1$ . Per sottolineare l'errore dovuto a questa mancata corrispondenza, notiamo che per approssimare debolmente una funzione costante con funzioni oscillanti si deve introdurre una scala mesoscopica  $\varepsilon \ll \eta_\varepsilon \ll 1$ , e prendere  $u_\varepsilon$  oscillante su questa scala tra  $1$  e  $-1$ . Basta specificare la costruzione quando la funzione limite è una costante  $0 < z < 1$ . In tal caso possiamo



costruire la successione  $u_\varepsilon$  oscillante solo lungo una delle direzioni coordinate. Definiamo la funzione  $u_z : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$  periodica di periodo 1 e tale che

$$u_z(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < s \leq \frac{z+1}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{z+1}{2} < s \leq 1 \end{cases},$$

e poniamo

$$u_\varepsilon(i) = u_z\left(\frac{\varepsilon i_1}{\eta_\varepsilon}\right)$$

( $i_1$  è la prima componente di  $i \in \mathbb{Z}^d$ ). Dato che  $u_z(x_1/\eta_\varepsilon) \rightarrow z$ , anche  $u_\varepsilon \rightarrow z$  ed è facile verificare che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\Omega| \frac{\varepsilon}{\eta_\varepsilon} = 0.$$

Dunque si ha

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } |u| \leq 1 \text{ quasi ovunque} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

## 2.2 Insiemi di perimetro finito e partizioni

L'analisi a scala successiva porterà a considerare energie di superficie. Esaminiamone ora le caratteristiche variazionali.

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un aperto e denotiamo con  $\mathbf{B}(\Omega)$  la famiglia degli insiemi Boreliani di  $\Omega$ . Dal punto di vista del Calcolo delle Variazioni, siamo interessati a trovare una nozione di perimetro per insiemi  $E \in \mathbf{B}(\Omega)$  che soddisfi le seguenti due proprietà:

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial E \cap \Omega) \text{ se } E \text{ è un aperto con frontiera } C^1 \text{ a tratti}; \quad (2.4)$$

$$\mathcal{P}(E) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_n) \quad (2.5)$$

se  $E_n$  converge a  $E$  in misura, ossia

$$|E_n \Delta E| \rightarrow 0.$$

Una delle prime definizioni di perimetro, dovuta a Caccioppoli, è la seguente

$$\mathcal{P}(E) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^{d-1}(\partial E_n \cap \Omega) : E_n \rightarrow E \text{ in misura, } E_n \text{ regolare a tratti} \right\}.$$

In altre parole un insieme  $E \subset \Omega$  ha *perimetro finito* (in  $\Omega$ ) se e solo se esiste una successione di insiemi regolari a tratti  $E_n$  convergenti ad  $E$  in misura e tali che  $\mathcal{H}^{d-1}(E_n \cap \Omega)$  è limitata.

Se  $E$  ha perimetro finito, esiste un insieme  $\partial^* E \subseteq \partial E$ , chiamato la *frontiera ridotta* di  $E$ , tale che

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E).$$

Inoltre  $\partial^*E$  è rettificabile, ossia

$$\partial^*E \subset \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \Gamma_h \cup N$$

per un'opportuna successione  $(\Gamma_h)$  di ipersuperfici  $C^1$  e con  $\mathcal{H}^{d-1}(N) = 0$ . In particolare, per  $\mathcal{H}^{d-1}$ -q.o.  $x \in \partial^*E$  possiamo definire un versore normale denotato con  $\nu_E(x)$ .

Vale il seguente teorema di compattezza e semicontinuità.

**Teorema 2.2.1** *Sia  $(E_n) \subset \mathbf{B}(\Omega)$  una successione di insiemi di perimetro finito tale che*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(E_n) < +\infty.$$

*Allora esiste una sottosuccessione  $(E_{n_k})$  che converge in misura ad un insieme di perimetro finito  $E$ . Inoltre*

$$\mathcal{P}(E) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_n).$$

Osserviamo che possiamo scrivere

$$\mathcal{P}(E) = \int_{\partial^*E} |\nu_E| d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Più in generale, se  $\varphi$  è una norma, si dimostra che il funzionale

$$F(E) = \int_{\partial^*E} \varphi(\nu_E) d\mathcal{H}^{d-1}$$

è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza in misura.

Sia  $K \subset \mathbb{R}^m$  un insieme finito. Definiamo l'insieme delle funzioni a valori in  $K$  costanti a tratti su insiemi di perimetro finito che partizionano  $\Omega$ :

$$PC(\Omega; K) = \left\{ u \in L^1(\Omega; K) : u = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}, a_i \in K, \mathcal{P}(E_i) < +\infty, \bigcup_{i=1}^M E_i = \Omega \right\}.$$

Data  $u = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i} \in PC(\Omega; K)$  denotiamo con  $S(u)$  l'insieme dei punti di discontinuità di  $u$ , ossia

$$S(u) = \bigcup_{i=1}^N \partial^*E_i.$$

Inoltre definiamo la normale  $\nu_u$  ad  $S(u)$  come

$$\nu_u(x) = \nu_{E_i}(x), \quad x \in \partial^*E_i.$$

Vale il seguente teorema di compattezza e semicontinuità.

**Teorema 2.2.2** *Sia  $(u_n) \subset PC(\Omega; K)$  tale che*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{d-1}(S(u_n)) < +\infty.$$

*Allora esiste una sottosuccessione  $(u_{n_k})$  che converge in  $L^1$  ad  $u \in PC(\Omega; K)$ . Inoltre, per ogni norma  $\varphi$ ,*

$$\int_{S(u)} \varphi(\nu_u) d\mathcal{H}^{d-1} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{S(u_n)} \varphi(\nu_{u_n}) d\mathcal{H}^{d-1}.$$

## 2.3 Transizioni di fase e antifase

Analizziamo ora il  $\Gamma$ -limite alla scala  $\varepsilon$ . Questa scala è suggerita dal fatto che nella costruzione della successione ottimizzante  $u_\varepsilon$  l'errore che commettiamo per creare un'interfaccia di fase, ossia per passare da una regione in cui  $u_\varepsilon \equiv 1$  ad un'altra in cui  $u_\varepsilon \equiv -1$  è dell'ordine  $\varepsilon$ . L'energia riscalata si riscrive dunque nel modo seguente

$$E_\varepsilon^{(1)}(u) = \frac{E_\varepsilon(u)}{\varepsilon} = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon i, \varepsilon j \in \Omega_\varepsilon, |i-j|=1} \varepsilon^{d-1} (u_i - u_j)^2 \quad u_i \in \{-1, 1\}. \quad (2.6)$$

Sia  $u_\varepsilon$  tale che  $E_\varepsilon^{(1)}(u_\varepsilon) \leq c < +\infty$ . Notiamo che l'energia di interazione tra due primi vicini è 0 se  $u_\varepsilon(\varepsilon i) = u_\varepsilon(\varepsilon j)$  e  $\varepsilon^{d-1}$  altrimenti, ossia esattamente la misura  $d-1$ -dimensionale della frontiera comune alle due celle  $\varepsilon(i + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d)$  e  $\varepsilon(j + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d)$ . Quindi

$$E_\varepsilon^{(1)}(u_\varepsilon) = \mathcal{H}^{d-1}(S(u_\varepsilon) \cap \Omega) + o(1), \quad (2.7)$$

dove  $S(u_\varepsilon)$  denota l'insieme di salto di  $u_\varepsilon$  (identificata con la sua estensione costante a tratti). Il termine  $o(1)$  è dovuto al fatto che vicino alla frontiera di  $\Omega$  la misura  $d-1$ -dimensionale della parte della frontiera comune a due celle contenuta in  $\Omega$  può essere minore di  $\varepsilon^{d-1}$ . Dunque, per il Teorema 2.2.2, dalla (2.7) deduciamo che, a meno di sottosuccessioni,  $u_\varepsilon$  converge forte in  $L^1$  ad una funzione  $u \in PC(\Omega; \{\pm 1\})$ . Analizziamo, dunque, il  $\Gamma$ -limite di  $E_\varepsilon^{(1)}$  rispetto alla metrica  $L^1$ .

Possiamo migliorare la stima (2.7), osservando che la normale al salto di  $u_\varepsilon$  prende solo i valori  $\pm e_k$ ,  $k = 1, \dots, d$  e dunque

$$E_\varepsilon^{(1)}(u_\varepsilon) = \int_{S(u_\varepsilon)} \varphi(\nu_{u_\varepsilon}) d\mathcal{H}^{d-1} + o(1), \quad (2.8)$$

per ogni norma  $\varphi$  tale che  $\varphi(e_k) \leq 1$  per ogni  $k = 1, \dots, d$ . La stima precedente è ottimizzata scegliendo la più grande norma che soddisfa questa condizione e che risulta essere

$$\|\nu\|_1 := \sum_{k=1}^d |\nu_k|, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_d).$$

Quindi, per la (2.8) e il Teorema 2.2.2, risulta

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon^{(1)}(u_\varepsilon) \geq \int_{S(u)} \|\nu_u\|_1 d\mathcal{H}^{d-1}. \quad (2.9)$$

Per quanto riguarda la disuguaglianza del  $\Gamma$ -lim sup, è sufficiente, per un argomento di densità, specificare la costruzione della recovery sequence per le funzioni  $u$  in  $PC(\Omega; \pm 1)$  tali che  $S(u)$  sia un insieme poliedrale. Poichè la costruzione è locale, ci riduciamo ulteriormente al caso in cui  $S(u)$  sia un iperpiano, ossia, fissato  $\bar{\nu} \in S^{d-1}$ ,

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \langle x, \bar{\nu} \rangle \geq 0 \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso è facile verificare che la successione  $u_\varepsilon(\varepsilon i) := u(\varepsilon i)$  è tale che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon^{(1)}(u_\varepsilon) = \int_{S(u)} \|\nu_u\|_1 d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Dunque si ha

$$E^{(1)}(u) := \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon^{(1)}(u) = \begin{cases} \int_{S(u)} \|\nu_u\|_1 d\mathcal{H}^{d-1} & \text{se } u \in PC(\Omega; \pm 1) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.10)$$

**Osservazione 2.3.1 (problema di minima interfaccia)** Consideriamo il problema di minimo

$$m_\varepsilon := \min\{E_\varepsilon^{(1)}(u) : \#\{i : u_i = 1\} = p_\varepsilon \#\{i : \varepsilon i \in \Omega_\varepsilon\}\},$$

dove  $p_\varepsilon$  è scelto in modo che  $m_\varepsilon \neq +\infty$  (ad esempio possiamo prendere  $p_\varepsilon$  tale che  $p_\varepsilon \#\{i : \varepsilon i \in \Omega_\varepsilon\} \in \mathbb{N}$ ) e  $p_\varepsilon \rightarrow p \in [0, 1]$ . Allora, in virtù del precedente risultato di  $\Gamma$ -convergenza, abbiamo che i punti di minimo di  $m_\varepsilon$  convergono a funzioni minimizzanti

$$m := \min \left\{ \int_{S(u)} \|\nu_u\|_1 d\mathcal{H}^{d-1} : |\{u = 1\}| = p \right\}$$

(basta verificare che se  $u$  è tale che  $|\{u = 1\}| = p$  si può costruire la recovery sequence  $u_\varepsilon$  per  $u$  in modo tale che  $\#\{i : u_\varepsilon(\varepsilon i) = 1\} = p_\varepsilon \#\{i : \varepsilon i \in \Omega_\varepsilon\}$ ).

L'informazione che ne ricaviamo è, dunque, che per minimizzare  $E_\varepsilon^{(1)}$  i valori 1 e  $-1$  si dispongono in modo da minimizzare l' 'interfaccia' tra le due regioni  $\{u_\varepsilon = -1\}$  e  $\{u_\varepsilon = 1\}$ . In altre parole, le due 'fasi' 1 e  $-1$  non si mischiano e danno origine nel limite ad un'interfaccia 'sharp'.

**Osservazione 2.3.2 (caso antiferromagnetico: interfaccia di antifase)** Notiamo che con il cambio di variabili  $w_i = (-1)^i u_i$ , un'energia di tipo antiferromagnetico (in  $u$ ) diventa un'energia di tipo ferromagnetico (in  $w$ ). Inoltre, ad un'interfaccia di fase per  $w$  corrisponde un'interfaccia di antifase per  $u$ , ovvero un passaggio da uno stato  $(-1)^i$  a  $(-1)^{i+1}$ . Dunque l'analisi precedente ci dice che nel caso antiferromagnetico le funzioni minimizzanti si dispongono in due regioni in cui i primi vicini hanno segno alterno e uno sfasamento lungo la frontiera comune alle due regioni (interfaccia di antifase).

### 2.3.1 Reticoli triangolari

Possiamo estendere l'analisi precedente al caso in cui il reticolo abbia una diversa geometria. Ad esempio, consideriamo in dimensione due il reticolo triangolare  $\mathcal{W}$  generato dai vettori  $v_1 = (1, 0)$  e  $v_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , ossia  $\mathcal{W} = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$ . Tale reticolo individua una partizione di  $\mathbb{R}^2$  in triangoli equilateri, per cui ogni nodo del reticolo  $i$  ha sei primi vicini:  $i \pm v_1$ ,  $i \pm v_2$  e  $i \pm (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ . Consideriamo, quindi, energie di interazione tra primi vicini, definite su funzioni  $u : \varepsilon\mathcal{W} \cap \Omega \rightarrow \{\pm 1\}$ . Possiamo identificare tali funzioni con le loro estensioni costanti a tratti che assumono lo stesso valore sui parallelogrammi centrati nei nodi  $\varepsilon i$  e lati paralleli a  $v_1$  e  $v_2$ .

Per energie ferromagnetiche l'analisi è simile a quella fatta nel caso di reticoli quadrati. In particolare si può dimostrare che il  $\Gamma$ -limite all'ordine 1 è ancora della forma (2.10) con una norma  $\varphi$  a simmetria esagonale al posto di  $\|\cdot\|_1$ . Consideriamo in dettaglio, invece, il caso antiferromagnetico, ossia analizziamo il comportamento di energie della forma

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon i, \varepsilon j \in \Omega_\varepsilon, |i-j|=1} \varepsilon^2 (u_i + u_j)^2.$$

È ancora una volta conveniente riscrivere l'energia in termini di una nuova variabile. Più precisamente ad ogni funzione discreta  $u$  associamo una variabile ausiliaria  $v$  così definita: per ogni terna  $(i, j, k) \in \mathcal{W}^3$  di nodi che sono vertici di uno stesso triangolo di area minima del reticolo, definiamo

$$v(\varepsilon i, \varepsilon j, \varepsilon k) = \frac{1}{3} (u_i + u_j + u_k).$$

Osserviamo che se  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ , allora anche  $v_\varepsilon \rightharpoonup u$  (qui  $v_\varepsilon$  è identificata con la sua interpolata costante a tratti che assume il valore  $v_\varepsilon(\varepsilon i, \varepsilon j, \varepsilon k)$  sul triangolo di vertici  $\varepsilon i, \varepsilon j, \varepsilon k$ ). Abbiamo inoltre che

$$v(\varepsilon i, \varepsilon j, \varepsilon k) = \begin{cases} \pm 1 & \text{se } u_i = u_j = u_k = \pm 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } u_i = u_j = 1 \text{ e } u_k = -1 \\ -\frac{1}{3} & \text{se } u_i = u_j = -1 \text{ e } u_k = 1. \end{cases}$$

Poniamo, quindi,

$$W(v) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{se } v = \pm 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } v = \pm \frac{1}{3} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

in modo che

$$W(v(\varepsilon i, \varepsilon j, \varepsilon k)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \varepsilon^2 \frac{1}{4} ((u_i + u_j)^2 + (u_j + u_k)^2 + (u_k + u_i)^2)$$

(il fattore  $\frac{1}{2}$  è dovuto al fatto che ogni coppia di tali punti appartiene a due differenti triangoli). Possiamo quindi scrivere

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{(i,j,k)} \varepsilon^2 W(v(\varepsilon i, \varepsilon j, \varepsilon k)) + o(1) =: \tilde{E}_\varepsilon(v) + o(1), \quad (2.11)$$

dove la somma è calcolata al variare di tutte le terne che sono vertici di triangoli contenuti in  $\Omega$ . Il termine  $o(1)$  è un errore dovuto al contributo delle interazioni tra vertici di triangoli che intersecano la frontiera di  $\Omega$ .

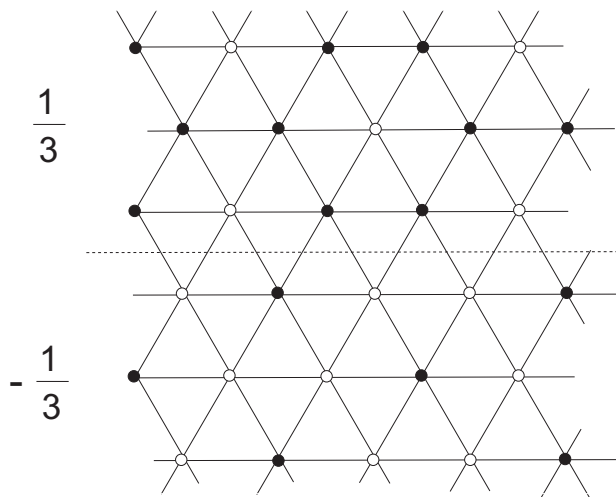


Figure 2.1: struttura microscopica di una transizione senza energia d'interfaccia

Possiamo allora ripetere i ragionamenti fatti nel calcolo del  $\Gamma$ -limite di energie ferromagnetiche su reticoli quadrati e dimostrare che il  $\Gamma$ -limite di  $E_\varepsilon$  coincide con quello di  $\tilde{E}_\varepsilon$  ed è dato da

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{\Omega} W^{**}(u) dx & \text{se } |u| \leq 1 \text{ quasi ovunque} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo esplicitare la densità di energia limite  $W^{**}$ , che è data da

$$W^{**}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } |u| \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}|u| & \text{se } \frac{1}{3} \leq |u| \leq 1. \end{cases}$$

Osserviamo che tale densità assume il minimo in  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ , che riflette il fatto che possiamo costruire successioni minimizzanti mischiando in proporzione qualsiasi configurazioni minimali corrispondenti a  $v = -\frac{1}{3}$  e  $v = \frac{1}{3}$ . È interessante notare però che questa volta la geometria del reticolo dà la possibilità di avere transizioni di fase senza penalizzazioni energetiche. Possiamo, infatti, costruire successioni convergenti a funzioni a valori  $\frac{1}{3}$  e  $-\frac{1}{3}$  creando interfacce nelle direzioni del reticolo in modo che la transizione di fase sia ottenuta utilizzando sempre configurazioni di energia minima, come è illustrato in figura (pallini pieni corrispondono al valore 1 e pallini vuoti al valore  $-1$ ). Per densità, la costruzione può essere ripetuta per approssimare tutte le funzioni  $u$  con  $|u| \leq \frac{1}{3}$ .

L'assenza di un'energia d'interfaccia può essere descritta studiando il  $\Gamma$ -limite dell'energia riscalata

$$E_\varepsilon^{(1)}(v) = \sum_{(i,j,k)} \varepsilon \left( f(v(\varepsilon i, \varepsilon j, \varepsilon k)) - \frac{1}{2} \right).$$

Utilizzando la costruzione precedente si può dimostrare che il  $\Gamma$ -limite di  $E_\varepsilon^{(1)}$  è 0 su tutte le funzioni  $u$  con  $|u| \leq \frac{1}{3}$ .

## 2.4 Moto di interfaccia discrete

In questo capitolo vedremo come sia possibile descrivere un moto di un sistema discreto guidato da un energia di tipo spin ferromagnetico. Come abbiamo già osservato il  $\Gamma$ -limite continuo di tali energie è un funzionale di tipo 'perimetro'. A tale energia può venire associato un moto per curvatura; nei paragrafi seguenti descriveremo brevemente un approccio variazionale a tale moto.

### 2.4.1 Moto per curvatura

Consideriamo per semplicità il caso 2-dimensionale. Il moto per curvatura di un insieme  $E_0 \subset \mathbb{R}^2$  è una funzione continua  $E$  definita su un intervallo  $[0, T]$  a valori sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  tale che

- $E(0) = E_0$ ;
- per  $t \in [0, T)$  la frontiera  $\partial E(t)$  in un punto  $x$  si contrae con velocità proporzionale alla curvatura  $\kappa$  nel punto  $x$ .

La definizione precisa di tale moto, e il suo studio, è un problema complesso che non cade negli scopi di queste note. Per avere un'idea di come evolve un insieme secondo il moto

per curvatura a noi basterà esaminare il caso in cui  $E_0 = B_{R_0}$  sia un cerchio di (centro 0 e) raggio  $R_0$ . In tal caso la curvatura è costante in ogni punto di  $\partial E_0$  e quindi  $E(t)$  è un cerchio  $B_{R(t)}$  per ogni  $t$ . Dunque il raggio  $R(t)$  soddisfa l'ODE

$$\begin{cases} \dot{R} = -C \frac{1}{R} \\ R(0) = R_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

la cui soluzione dà

$$R(t) = \sqrt{R_0 - 2Ct}, \quad T = \frac{R_0}{2C}. \quad (2.13)$$

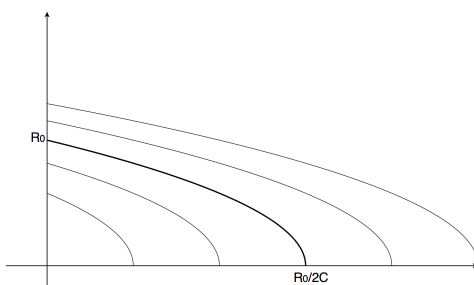


Figure 2.2: Evoluzioni per curvatura di cerchi in termini del raggio

Dato che per il moto per curvatura è possibile dimostrare un *principio di inclusione* (ovvero, detti  $E(t)$  e  $E'(t)$  due moti con se  $E_0 \subset E'_0$  allora l'evoluzione per curvatura mantiene l'inclusione a tutti i tempi:  $E(t) \subset E'(t)$ ) si deduce che il moto per curvatura di ogni insieme limitato sarà definito fino ad un tempo massimale  $T$ , in cui si avrà l'*estinzione* del moto (come per il caso del cerchio) oppure non si avrà sufficiente regolarità per il bordo di  $E(T)$  tale da garantire che il suo moto sia rigorosamente definito.

### 2.4.2 Un approccio variazionale al moto per curvatura

Illustriamo ora brevemente un approccio dovuto ad Almgren, Taylor e Wang per definire il moto per curvatura tramite moti a tempi discreti ottenuti per minimizzazioni successive. Lo schema è il seguente

- si fissa una *scala temporale*  $\tau$  e si definisce una famiglia  $(E_i^\tau)$  in modo ricorsivo, ponendo:

$$E_0^\tau = E_0,$$

$E_i^\tau$  è un insieme che minimizza

$$\min \left\{ \text{Per}(E) + \frac{1}{\tau} D(E, E_{i-1}^\tau) \right\}, \quad (2.14)$$



dove  $\text{Per}$  denota il perimetro (euclideo) di  $E$ , e  $D$  è una opportuna distanza tra gli insiemi (si veda più avanti);

- si definisce il moto

$$E\tau(t) = E_{[t/\tau]}^\tau; \quad (2.15)$$

- si prova che (a meno di sottosuccessioni in  $\tau$ ) esiste il limite  $E(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} E^\tau(t)$  non vuoto per  $t \in [0, T)$  e che questo è un moto per curvatura di  $E_0$ .

**Osservazione 2.4.1** In questo procedimento gli insiemi  $E_i^\tau$  a priori sono solamente insiemi di perimetro finito.

Possiamo tentare una piegazione euristica di questo approccio: le equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale  $\text{Per}(E)$  (opportunamente interpretate) danno un integrale della curvatura sul bordo di  $E$ . Se

$$D(E, E') = |E \Delta E'|, \quad (2.16)$$

questa può venire interpretata come una distanza  $L^2$

$$D(E, E') = \int |\chi_E - \chi_{E'}|^2 dx, \quad (2.17)$$

da cui si ottiene, nelle equazioni di Eulero-Lagrange di (2.14), l'integrale del rapporto incrementale

$$\frac{\chi_{E_i^\tau} - \chi_{E_{i-1}^\tau}}{\tau},$$

che corrisponde a una discretizzazione della derivata temporale per  $E(t)$ .

Purtroppo, la scelta di  $D$  come in (2.17) non è possibile. Per convincercene consideriamo il dato iniziale  $E_0 = B_{R_0}$ . In questo caso ci aspettiamo che i moti  $E_i^\tau$  siano composti di cerchi con centro 0. Fissato  $\tau$ , se  $B_{R_1} \subset E_0$  è un cerchio minimizzante il primo problema di minimo, ogni altro cerchio  $B_{R_1}(x)$  dello stesso raggio che sia ancora contenuto in  $E_0$  è chiaramente ancora un punto di minimo. Dunque possiamo facilmente scegliere tali cerchi in modo che il moto risultante si estingua in un qualsiasi punto della chiusura del cerchio di partenza.

La scelta operata da Almgren, Taylor e Wang per la distanza  $D$  è

$$D(E, E') = \int_{E \Delta E'} \text{dist}(x, \partial E') dx. \quad (2.18)$$

Vedremo come questa scelta in (2.14) favorisca insiemi  $E$  'uniformemente distanti' dal bordo di  $E_i^\tau$ .

Nell'esempio seguente vediamo ora brevemente il caso modello di  $E_0$  un cerchio, con una dimostrazione che potremo facilmente adattare in molti punti al caso discreto.

**Esempio 2.4.2** Sia  $E_0 = B_R$ . Sarà sufficiente esaminare il primo problema di minimo (2.14), con  $i = 1$ . Cominciamo con alcune osservazioni preliminari:

1) gli insiemi  $E$  in (2.14) possono essere scelti con ogni loro componente connessa contenuta in  $B_R$ . Infatti  $E \cap B_R$  ha sia perimetro che differenza simmetrica con  $B_R$  minori;

2) gli insiemi  $E$  in (2.14) possono essere scelti con ogni loro componente connessa convessa, per la stessa ragione;

3) se  $E'$  è una componente connessa di  $E$  che non contiene il centro, possiamo considerare l'insieme a cui sostituiamo  $E'$  con

$$E'(s) = E' - sx_{E'}, \quad \text{dove } x_{E'} := \int_{E'} x \, dx$$

è il baricentro di  $E'$  e  $s > 0$  è sufficientemente piccolo. Notiamo che la derivata della nostra energia lungo questo percorso in  $s = 0$  è

$$- \int_{E'} \frac{1}{|x|} \langle x, x_{E'} \rangle \, dx < 0.$$

Dunque possiamo concludere che il minimo  $E_1^\dagger$  ha un'unica componente connessa (convessa) che contiene 0.

La figura 2.3 riassume pittoricamente i punti 1)–3) qui sopra.

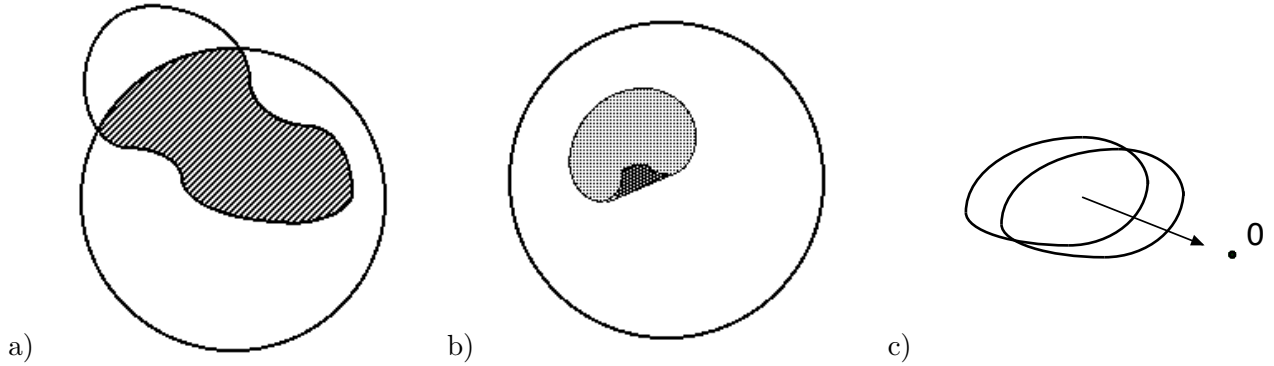
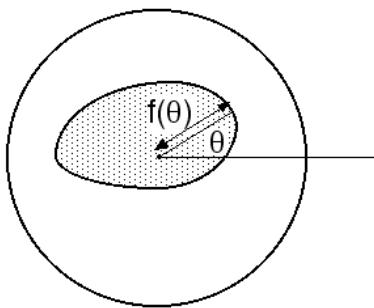


Figure 2.3: semplificazioni degli insiemi  $E$  in (2.14): a) intersezione; b) convessificazione; c) traslazione verso 0

4) Vediamo ora che l'insieme minimale è un cerchio di centro 0. Sia  $A = |E_1^\dagger|$ , e consideriamo il nostro problema di minimo con tale vincolo di area. Per la disuguglianza isoperimetrica il termine di perimetro assume minimo sui cerchi; basta quindi mostrare che il termine  $D(E, E_0)$  ha come minimo un cerchio di centro 0. A tale scopo usiamo le coordinate polari e denotiamo  $f(\theta) = \sup\{\rho : \rho e^{i\theta} \in E\}$ , di modo che

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{f(\theta)} \rho \, d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta$$

Figure 2.4: introduzione della variabile  $f$ 

(figura 2.4). Introducendo la funzione  $u(\theta) = \pi|f(\theta)|^2$  il nostro vincolo di volume diventa semplicemente una condizione di media

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) d\theta.$$

Tenendo conto di questa condizione, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} D(E, E_0) &= \int_0^{2\pi} \int_{f(\theta)}^R (R - \rho) d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 - RA + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^3 d\theta \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 - RA + \frac{1}{3\pi^{3/2}} \int_0^{2\pi} |u(\theta)|^{3/2} d\theta. \end{aligned}$$

Per la convessità di  $s \mapsto s^{3/2}$ , applicando la disuguaglianza di Jensen si ottiene che il minimo è ottenuto sulla funzione costante  $u = A$ , ovvero l'insieme minimale è un cerchio centrato in 0.

5) Possiamo ora passare al calcolo del raggio  $r$  del cerchio minimale, che è il punto di minimo di

$$\min \left\{ 2\pi r + \frac{2\pi}{\tau} \int_r^R (R - \rho) \rho d\rho \right\},$$

e che quindi soddisfa  $2\pi - \frac{2\pi}{\tau}(R - r)r = 0$ .

Questi calcoli possono essere ripetuti iterativamente per ogni raggio  $r_{i-1}^\tau$  al posto di  $R$  e  $r_i^\tau$  al posto di  $r$ , ottenendo l'equazione

$$\frac{r_i^\tau - r_{i-1}^\tau}{\tau} = -\frac{1}{r_i^\tau},$$

che è esattamente la discretizzazione dell'equazione  $\dot{R} = -1/R$  che caratterizza il moto per curvatura dei cerchi.

### 2.4.3 Moto cristallino

Il funzionale dato dal  $\Gamma$ -limite di energie ferromagnetiche non corrisponde al perimetro euclideo, ma a un perimetro anisotropo. Lo schema proposto da Almgren, Taylor e Wang è stato applicato da Almgren e Taylor in due dimensioni con

$$\text{Per}(E) = \int_{\partial^* E} \|\nu\|_1 d\mathcal{H}^1, \quad D(E, E') = \int_{E \Delta E'} \text{dist}_\infty(x, \partial E') dx.$$

Per questa scelta il moto risultante (detto *moto cristallino*) è più complesso da descrivere in generale per la mancanza di una definizione locale di ‘curvatura cristallina’. Possiamo però esaminare il caso in cui l’insieme iniziale  $E_0$  sia un rettangolo (che è l’analogo del cerchio per il caso euclideo). In questo caso si può seguire la linea dimostrativa del capitolo precedente.

**Esempio 2.4.3 (moto cristallino di un rettangolo)** Sia  $E_0$  un rettangolo centrato in 0 di lati  $L_0^1$  e  $L_0^2$ , ovvero  $E_0 = [-L_0^1/2, L_0^1/2] \times [-L_0^2/2, L_0^2/2]$ . Fissato  $\tau > 0$  caratterizziamo ora l’insieme  $E_1$  che minimizza

$$\int_{\partial^* E} \|\nu\|_1 d\mathcal{H}^1 + \frac{1}{\tau} \int_{E \Delta E_0} \text{dist}_\infty(x, \partial E_0) dx. \quad (2.19)$$

1) Notiamo che  $E_1 \subset E_0$ . In caso contrario  $E_1 \cap E_0$  ha sia perimetro minore che minore differenza simmetrica con  $E_0$ ;

2) Notiamo che ogni componente connessa di  $E_1$  è un rettangolo. In caso contrario sostituiamo a tale componente connessa il minimo rettangolo che la contiene, eventualmente ripetendo questa operazione se due tali rettangoli si intersecano. L’insieme così ottenuto ha perimetro non maggiore del precedente, ma differenza simmetrica con  $E_0$  strettamente minore;

3) Traslando ogni componente connessa di  $E_1$  che non contiene lo 0 verso l’origine il secondo integrale in (2.19) decresce strettamente (il calcolo è analogo al punto 3 dell’esempio 2.4.2). Questo dimostra che vi è un’unica componente connessa, e che questa contiene l’origine.

Possiamo quindi limitarci a prendere gli insiemi  $E$  in (2.19) della forma  $(-x_1, x_2) \times (-y_1, y_2) \subset E_0$ . A meno di un errore uniformemente piccolo per  $\tau \rightarrow 0$  il problema di minimo diventa quindi la minimizzazione di

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, y_1, y_2) = & 2(x_2 + x_1) + 2(y_2 + y_1) + \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L_0^1}{2} - x_1 \right)^2 L_0^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_0^1}{2} - x_2 \right)^2 L_0^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{L_0^2}{2} - y_1 \right)^2 L_0^1 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_0^2}{2} - y_2 \right)^2 L_0^1 \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dalla condizione di stazionarietà per  $f$  otteniamo quindi le condizioni

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{\tau} \left( \frac{L_0^1}{2} - x_1 \right) L_0^2 &= 2 - \frac{1}{\tau} \left( \frac{L_0^1}{2} - x_2 \right) L_0^2 = 0 \\ 2 - \frac{1}{\tau} \left( \frac{L_0^2}{2} - y_1 \right) L_0^1 &= 2 - \frac{1}{\tau} \left( \frac{L_0^2}{2} - y_2 \right) L_0^1 = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ne deduciamo che  $E_1$  è un rettangolo della forma  $E_0 = [-L_1^1/2, L_1^1/2] \times [-L_1^2/2, L_1^2/2]$ , dove  $L_1^1 = x_1 + x_2$  e  $L_1^2 = y_1 + y_2$  soddisfano

$$\frac{L_1^1 - L_0^1}{\tau} = -\frac{4}{L_0^2} \quad \frac{L_1^2 - L_0^2}{\tau} = -\frac{4}{L_0^1}. \quad (2.22)$$

Questo calcolo può essere ripetuto iterativamente, ottenendo due successioni  $(L_i^{\tau,1})$ ,  $(L_i^{\tau,2})$  che soddisfano

$$\frac{L_i^{\tau,1} - L_{i-1}^{\tau,1}}{\tau} = -\frac{4}{L_i^{\tau,2}} \quad \frac{L_i^{\tau,2} - L_{i-1}^{\tau,2}}{\tau} = -\frac{4}{L_i^{\tau,1}}, \quad (2.23)$$

a meno di un errore uniformemente piccolo per  $\tau \rightarrow 0$ , e  $L_0^{\tau,1} = L_0^1$ ,  $L_0^{\tau,2} = L_0^2$ . Facendo tendere  $\tau \rightarrow 0$  ne deduciamo quindi la seguente caratterizzazione dell'evoluzione cristallina di  $E_0$ .

**Proposizione 2.4.4 (evoluzione cristallina di rettangoli)** *L'evoluzione per curvatura media cristallina di un rettangolo  $E_0$  di lati  $L_0^1, L_0^2$  secondo lo schema di minimizzazioni successive a tempi discreti, è data da una famiglia  $E(t)$  di rettangoli con lo stesso centro e di lati  $L_1(t), L_2(t)$  che soddisfano al sistema di ODE*

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = -\frac{4}{L_2}, & \dot{L}_2 = -\frac{4}{L_1} \\ L_1(0) = L_0^1, & L_2(0) = L_0^2. \end{cases} \quad (2.24)$$

**Osservazione 2.4.5** Notiamo in aggiunta che

1) i rettangoli sono tutti simili tra loro. Infatti si ha

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{L_2}{L_1} \right) = \frac{L_1 \dot{L}_2 - L_2 \dot{L}_1}{(L_1)^2} = 0;$$

2) l'area  $A(t) = L_1 L_2$  dei rettangoli decresce linearmente:

$$\frac{d}{dt} A(t) = L_1 \dot{L}_2 + L_2 \dot{L}_1 = -8,$$

da cui deduciamo che  $A(t) = L_0^1 L_0^2 - 8t$ , e che il tempo di estinzione del moto è

$$T = \sqrt{\frac{L_0^1 L_0^2}{8}}.$$

### 2.4.4 Moto (e ‘pinning’) di interfaccia discreta

Possiamo ora esaminare il moto di insiemi discreti, avendo in mente il moto cristallino del capitolo precedente. In questo caso dovremo comprendere il ruolo della ‘scala discreta spaziale’  $\varepsilon$  e la sua interazione con la ‘scala discreta temporale’  $\tau$  che compare nel metodo di minimizzazioni successive.

Nel caso di sistemi di spin con interazioni tra primi vicini al posto del perimetro cristallino abbiamo la sua versione discreta. Se  $E \subset \varepsilon\mathbb{Z}^2$  viene identificato con l’insieme in cui  $u_i = 1$  l’energia ferromagnetica considerata in precedenza può venire scritta come

$$P_\varepsilon(E) := \varepsilon \#\{(i, j) : \varepsilon i \in E, \varepsilon j \in \varepsilon\mathbb{Z}^2 \setminus E\}.$$

La distanza tra sottoinsiemi di  $\varepsilon\mathbb{Z}^2$  analoga a  $D$  può venire scritta come

$$D_\varepsilon(E, E') = \varepsilon^2 \sum_{i \in E \setminus E'} \text{dist}_\infty(i, E') + \varepsilon^2 \sum_{i \in E' \setminus E} \text{dist}_\infty(i, \varepsilon\mathbb{Z}^2 \setminus E').$$

Possiamo allora fissare  $\tau$  ed  $\varepsilon$  e procedere per minimizzazione successiva a partire da un insieme di indici iniziale  $E_0 = E_0^{\varepsilon, \tau}$ . Descriveremo il moto solamente quando l’insieme iniziale  $E_0$  è un rettangolo, di modo da confrontarlo con il moto cristallino continuo ottenuto nel capitolo precedente.

**Esempio 2.4.6 (moto discreto di un rettangolo)** Come negli esempi precedenti possiamo descrivere l’insieme  $E$  che minimizza

$$P_\varepsilon(E) + \frac{1}{\tau} D_\varepsilon(E, E_0) \tag{2.25}$$

tra i sottoinsiemi di  $\varepsilon\mathbb{Z}^2$ . Come nell’esempio 2.4.3 notiamo che possiamo limitarci a considerare  $E$  nella classe dei rettangoli contenuti in  $E_0$ :

1) se  $E$  non è contenuto in  $E_0$  si può considerare  $E_0 \cap E$  per il quale si ha sia  $P_\varepsilon(E_0 \cap E) < P_\varepsilon(E)$  che  $D_\varepsilon(E_0 \cap E, E_0) < D_\varepsilon(E, E_0)$ ;

2) se (una componente connessa di)  $E$  non è un rettangolo allora lo si sostituisce con il più piccolo rettangolo  $E'$  che lo contiene. Abbiamo  $P_\varepsilon(E') \leq P_\varepsilon(E)$  che  $D_\varepsilon(E', E_0) < D_\varepsilon(E, E_0)$ ;

3) se una componente connessa non contiene il centro di  $E_0$  la possiamo traslare verso il centro. Questa operazione mantiene costante il perimetro e diminuisce il secondo termine in (2.25). Ripetendo questa operazione si trasla tale componente fino a incontrarne un’altra o a contenere lo 0.

Dai punti 1)–3), riassunti in figura 2.5 deduciamo che ogni minimo di (2.25) è un rettangolo contenuto in  $E_0$ . Passiamo ora a caratterizzarne le lunghezze dei lati. Supponiamo che

$$E_0 = ([-\varepsilon M_1, \varepsilon M_2] \times [-\varepsilon M_2, \varepsilon M_2]) \cap \varepsilon\mathbb{Z}^2,$$

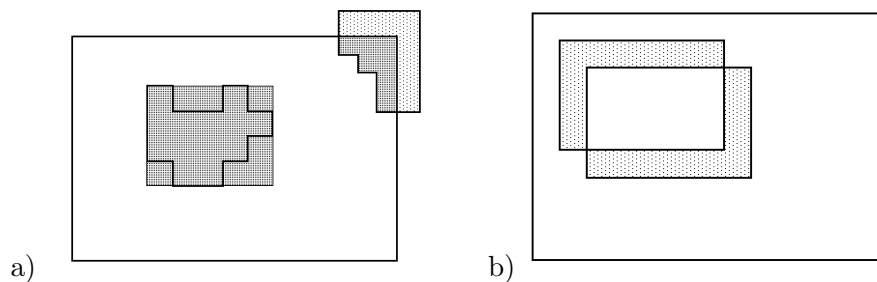


Figure 2.5: semplificazioni degli insiemi  $E$  in (2.25): a) intersezione e “inviluppo rettangolare”; b) traslazione verso il centro

dove lasciamo sottointesa la dipendenza da  $\varepsilon$  di  $M_1 = M_1^\varepsilon$  e  $M_2 = M_2^\varepsilon$ . Allora un minimo di (2.25), a meno di errori trascurabili per  $\tau \rightarrow 0$ , è un rettangolo

$$E_1 = ([-\varepsilon(M_1 - n_1), \varepsilon(M_1 - n_2)] \times [-\varepsilon(M_2 - m_1), \varepsilon(M_2 - m_2)]) \cap \varepsilon\mathbb{Z}^2.$$

dove  $n_1, n_2, m_1, m_2$  minimizzano

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2, m_1, m_2) &= -2\varepsilon(n_1 + n_2) - 2\varepsilon(m_1 + m_2) \\ &+ \frac{1}{\tau}\varepsilon^2 \left( (2M_2 + 1) \left( \sum_{k=1}^{n_1} \varepsilon k + \sum_{k=1}^{n_2} \varepsilon k \right) + (2M_1 + 1) \left( \sum_{j=1}^{m_1} \varepsilon k + \sum_{j=1}^{m_2} \varepsilon k \right) \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Per comprendere questo calcolo, ci possiamo riferire alla figura 2.6. Il rettangolo  $E_1$  viene ottenuto rimuovendo  $n_1$  colonne di  $2M_2 + 1$  punti nella parte ‘sinistra’ di  $E_0$ ,  $n_2$  colonne di  $2M_2 + 1$  punti nella parte ‘destra’ di  $E_0$ ,  $m_1$  righe di  $2M_1 + 1$  punti nella parte ‘inferiore’ di  $E_0$ ,  $m_2$  righe di  $2M_1 + 1$  punti nella parte ‘superiore’ di  $E_0$ . La  $k$ -esima colonna rimossa a sinistra è composta da punti a distanza  $\varepsilon k$  da  $\varepsilon\mathbb{Z}^2 \setminus E_0$  (tranne che per alcuni punti compresi nei piccoli rettangoli di dimensione  $\varepsilon^2 n_i m_j$ , che sono trascurabili quando  $\tau$  è piccolo), e dà luogo alla prima sommatoria. In modo analogo si spiegano i termini delle altre tre sommatorie.

Usando la formula  $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$  otteniamo

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2, m_1, m_2) &= -2\varepsilon(n_1 + n_2) - 2\varepsilon(m_1 + m_2) \\ &+ \frac{\varepsilon^3}{2\tau} \left( (2M_2 + 1)(n_1(n_1 + 1) + n_2(n_2 + 1)) \right. \\ &\quad \left. + (2M_1 + 1)(m_1(m_1 + 1) + m_2(m_2 + 1)) \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Possiamo considerare separatamente la dipendenza di  $f$  da ogni singola variabile ed esaminare la parabola  $g(x) = -2x + \frac{\varepsilon^2}{2\tau}(x^2 + x)M$  il cui minimo è ottenuto per  $x = \frac{2\tau}{M\varepsilon^2} - \frac{1}{2}$ . Dunque, si ha che  $n_1$  è caratterizzato dalle disequaglianze

$$n_1 - \frac{1}{2} \leq \frac{2\tau}{(2M_2 + 1)\varepsilon^2} - \frac{1}{2} \leq n_1 + \frac{1}{2},$$

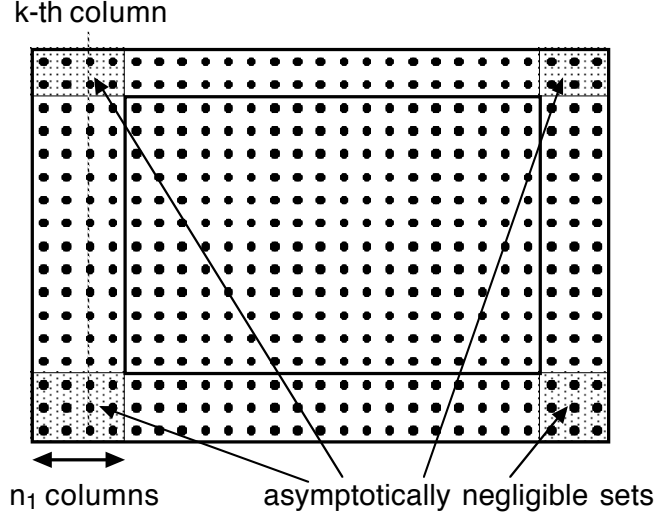


Figure 2.6: calcolo dell'insieme minimale in (2.25)

ovvero

$$n_1 = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2\tau}{(2M_2 + 1)\varepsilon^2} \right\rfloor & \text{se } \left\lfloor \frac{2\tau}{(2M_2 + 1)\varepsilon^2} \right\rfloor \notin \mathbb{N} \\ \left\lfloor \frac{2\tau}{(2M_2 + 1)\varepsilon^2} \right\rfloor \text{ oppure } \left\lfloor \frac{2\tau}{(2M_2 + 1)\varepsilon^2} \right\rfloor - 1 & \text{se } \left\lfloor \frac{2\tau}{(2M_2 + 1)\varepsilon^2} \right\rfloor \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Le analoghe condizioni valgono per gli altri indici.

**Tre differenti regimi.** Descriviamo ora il moto limite scegliendo  $\tau$  in funzione di  $\varepsilon$ . Assumendo che i dati iniziali convergano ad un rettangolo 'continuo'  $E_0 = [-L_1/2, L_1/2] \times [-L_2/2, L_2/2]$ , ovvero che

$$\varepsilon(2M_1 + 1) = \varepsilon(2M_1 + 1)^\varepsilon \rightarrow L_1, \quad \varepsilon(2M_2 + 1) = \varepsilon(2M_2 + 1)^\varepsilon \rightarrow L_2 \quad (2.29)$$

si possono definire i moti discreti per minimizzazione successiva dati da  $E^\varepsilon(t) = E_{\lfloor t/\tau \rfloor}^{\varepsilon, \tau}$  e considerarne il moto limite  $E(t)$ .

**1: "Pinning".** Se  $\tau \ll \varepsilon$  allora il moto limite è banale:  $E(t) = E_0$  per ogni tempo. Infatti, da (2.28) abbiamo definitivamente  $n_1 = n_2 = m_1 = m_2 = 0$ ;

**2: Moto cristallino.** Se  $\tau \gg \varepsilon$  allora da (2.28) otteniamo un'equazione del moto per  $L_1(t)$  come limite dei corrispondenti moti discreti ( $L_i^{1, \varepsilon}$ ). Infatti abbiamo

$$\frac{L_i^{1, \varepsilon} - L_{i-1}^{1, \varepsilon}}{\tau} = -\frac{\varepsilon(n_1 + n_2)}{\tau} \approx -2\frac{\varepsilon}{\tau} \left\lfloor \frac{2\tau}{L_i^{2, \varepsilon} \varepsilon} \right\rfloor \approx -\frac{4}{L_i^{2, \varepsilon}} \quad (2.30)$$



e quindi

$$\dot{L}_1 = -\frac{4}{L_2},$$

che, insieme all'analoga equazione per  $\dot{L}_2$ , caratterizza il moto cristallino di  $E_0$ ;

**2: Interazione tra scale.** Nel regime in cui  $\tau \approx \varepsilon$ , possiamo assumere che esista il limite

$$\alpha := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tau}{\varepsilon}.$$

Allora, i limiti discreti sono caratterizzati dall'equazione

$$\frac{L_i^{1,\varepsilon} - L_{i-1}^{1,\varepsilon}}{\tau} = -\frac{\varepsilon(n_1 + n_2)}{\tau} = \begin{cases} -\frac{2}{\alpha} \left[ \frac{2\alpha}{L_i^{2,\varepsilon}} \right] & \text{se } \left[ \frac{2\alpha}{L_i^{2,\varepsilon}} \right] \notin \mathbb{N} \\ -\frac{2}{\alpha} \left[ \frac{2\alpha}{L_i^{2,\varepsilon}} \right] \text{ oppure } -\frac{2}{\alpha} \left[ \frac{2\alpha}{L_i^{2,\varepsilon}} - 1 \right] & \text{se } \left[ \frac{2\alpha}{L_i^{2,\varepsilon}} \right] \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.31)$$

**Proposizione 2.4.7** *Il moto limite è caratterizzato dall'inclusione differenziale*

$$\dot{L}_1 \in \begin{cases} \left\{ -\frac{2}{\alpha} \left[ \frac{2\alpha}{L_2} \right] \right\} & \text{se } \frac{2\alpha}{L_2} \notin \mathbb{N} \\ \left[ -\frac{2}{\alpha} \left[ \frac{2\alpha}{L_2} \right], -\frac{2}{\alpha} \left[ \frac{2\alpha}{L_2} - 1 \right] \right] & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2.32)$$

e dall'analogha inclusione differenziale per  $\dot{L}_2$

**Dimostrazione.** La dimostrazione si ottiene subito passando al limite in (2.31), e notando che se  $\left[ \frac{2\alpha}{L_2} \right] \in \mathbb{N}$  entrambe le scelte per  $n_1$  e  $n_2$  mantengono il rapporto incrementale nell'intervallo voluto.  $\square$

**Osservazione 2.4.8 (differenze con il caso continuo)** 1) ‘‘Pinning’’: in questo caso notiamo la presenza di una *soglia di pinning*: se i lati dell'insieme iniziale soddisfano

$$\min\{L_1, L_2\} > 2\alpha$$

allora da (2.32) si ha  $\dot{L}_1 = \dot{L}_2 = 0$ , e il moto è banale;

2) ‘Quantizzazione’ delle velocità: la velocità dei lati è sempre un multiplo intero di  $\frac{2}{\alpha}$ , ed è quindi localmente costante, tranne che per un insieme discreto di punti;

3) Moto non autosimile: da (2.32) si ottiene  $\frac{d}{dt}(L_1/L_2) \neq 0$  e quindi  $E(t)$  non è in generale simile a  $E_0$ .

**Osservazione 2.4.9 (unicità e non-unicità)** 1) Unicità: dalla caratterizzazione del moto in (2.32) si ottiene che il moto limite è unico se  $\min\{L_1, L_2\} > 2\alpha$  (ovvero nel caso di ‘pinning’) oppure se  $\max\{L_1, L_2\} < 2\alpha$ . Nel secondo caso i tempi per cui  $\frac{2\alpha}{L_1} \in \mathbb{N}$  oppure  $\frac{2\alpha}{L_2} \in \mathbb{N}$  sono discreti e quindi trascurabili;

2) Non-unicità: si possono costruire facilmente dati iniziali per cui non si ha unicità del moto limite. Per esempio:

(a) Se  $L_1 > 2\alpha$  e  $\frac{2\alpha}{L_2} \in \mathbb{N}$ , allora si possono costruire moti  $E(t)$  con  $\dot{L}_2 = 0$  e  $\dot{L}_1$  una qualsiasi funzione  $v$  con

$$v(t) \in \left[ -\frac{2}{\alpha} \left\lceil \frac{2\alpha}{L_2} \right\rceil, -\frac{2}{\alpha} \left\lceil \frac{2\alpha}{L_2} - 1 \right\rceil \right]$$

fino al valore  $T$  per cui  $L_1(T) = 4/\alpha$ ;

(b) Se  $L_1 = L_2 = 2\alpha$ , allora si possono costruire  $E(t)$  tali che  $E(t) = E_0$  per  $t \in [0, T_1]$  e  $E(t)$  un quadrato di lato  $L$  che soddisfa

$$\dot{L} = -\frac{2}{\alpha} \left\lceil \frac{2\alpha}{L} \right\rceil$$

e  $L < 2\alpha$  per q.o.  $t > T_1$  fino al tempo di estinzione. In figura 2.7 sono riportate tutte le evoluzioni per curvatura cristallina di quadrati in termini del loro lato.

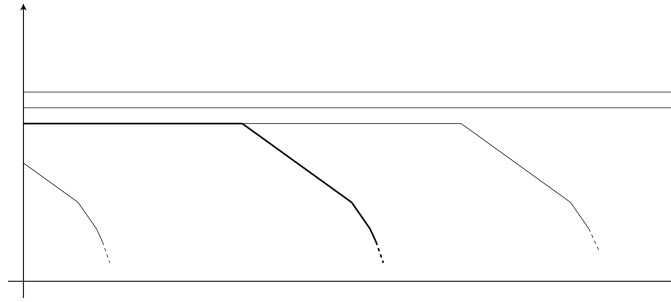


Figure 2.7: Evoluzioni per curvatura di quadrati in termini del lato