DISTRIBUZIONI (ESERCITAZIONE 8/5/24)

Def. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI DICE LOCALMENTE SOMMABILE SE $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$

f È SOMMABILE IN $[a,b]$: $\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$

$\rightsquigarrow$ $L^1_{loc}(\mathbb{R}) := \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni localmente sommabili$\}$

$\{f_n\}_n \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R})$ DIREMO CHE $\boxed{f_n \to f \text{ in } L^1_{loc}(\mathbb{R})}$ SE

$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$ $\int_a^b |f_n - f|\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ES 1. SIA $H(x)$ LA FUNZIONE DI HEAVISIDE E SIA $f_n(x) := H(x-n)$

CALCOLARE $\lim_{n\to\infty} f_n$ in L^1_{loc}

$f_n \to 0$ IN L^1_{loc} INFATTI SIA $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $\int_a^b |f_n(x) - 0|\,dx$

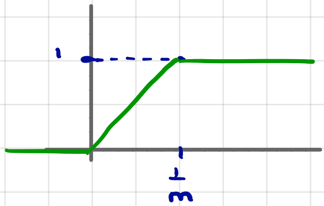
$$= \int_a^b H(x-n)\,dx \underset{\substack{n>b \\ H(x-n)\equiv 0 \text{ in } [a,b]}}{=} 0 \to 0$$

- SIA $f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)$

DIMOSTRIAMO CHE $f_n \to H$ IN L^1_{loc}

SIA $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$: $\int_a^b |f_n(x) - H(x)|\,dx \underset{\substack{n>b \Rightarrow f_n = H \ \forall x \in [a,b]}}{=} \int_a^b 0\,dx = 0 \to 0$

• $f_m(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ mx & 0 \le x \le 1/m \\ 1 & x \ge 1/m \end{cases}$



DIMOSTRARE CHE $f_m \to H(x)$ IN L^1_{loc}

f_m e H COINCIDONO FUORI DA $[0, 1/m]$

$\Rightarrow$ SE $[a,b)$ CONTIENE IN TUTTO IN PARTE $[0, 1/m]$

$$\int_a^b |f_m(x) - H(x)|\, dx \le \int_0^{1/m} \underbrace{|f_m - H|}_{\le 2}\, dx \le \frac{1}{2m} \to 0$$

$\uparrow$

$|f_m - H| = 0$
in $[a,b) \cap [0, 1/m]^c$

ES2 $f_m(x) = \sin mx$ NON TENDE A 0 IN L^1_{loc}

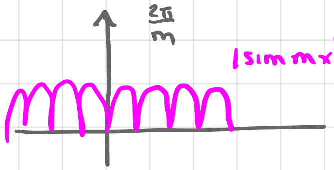
$$\int_0^{\pi} |\sin mx|\, dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k\pi/m}^{(k+1)\pi/m} |\sin kx|\, dx = m \cdot \frac{2}{m} = 2 \not\to 0$$

MA $f_m \to 0$ NEL SENSO DELLE DISTRIBUZIONI

$\sin mx = \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} \to 0$ IN $\mathcal{D}'$

(IN QUANTO $e^{ikx} \to 0$ IN $\mathcal{D}'$ $\forall k \neq 0$)

SI VEDRÀ DOPO



DISTRIBUZIONI

$T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineare e continua

$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$

lineare: $T(\alpha\varphi+\beta\psi) = \alpha T(\varphi)+\beta T(\psi)$

continua: se $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$ $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ in $\mathbb{R}$

$\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}$ se

- $\exists\, [a,b] \supseteq$ tutti i supporti di φ_n
- $\forall p \in \mathbb{N}$ $\{\varphi_n^{(p)}\}$ converge unif alla funzione nulla $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n^{(p)}\|_\infty = 0$

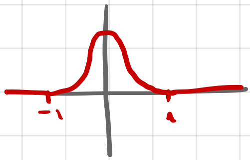
$\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}$ se $\varphi_n - \varphi \to 0$ in $\mathcal{D}$

$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ = spazio delle distribuzioni

OSS: $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è non vuoto

funzioni C^∞ a supporto compatto

- $\varphi \equiv 0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$
- $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x^2-1)^2}} & x \in (-1,1) \\ 0 & x \notin (-1,1) \end{cases}$



controllare che sia C^∞ (i.e. controllare che $\frac{d^k}{dx^k}\varphi(\pm 1) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$)

ESEMPIO DI DISTRIBUZIONI

- $\forall f \in L^1_{loc}$ $T_f(\varphi) = \int f\varphi\, dx$
- δ Dirac: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$

(controllare che siano continue)

LIMITE DI UNA SUCCESSIONE DI DISTRIBUZIONI:

DATA $\{f_n\}$ successione di distribuzioni diremo $f_n \to f$ nel senso delle distribuzioni se

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

- se $f_n \to f$ in L^1_{loc} $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in $\mathcal{D}'$

INFATTI: SE $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ASSUMIAMO $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-k,k]$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_n\varphi - \int_{-\infty}^{\infty} f\varphi\right| \le \int_{-k}^{k} |f_n - f|\,|\varphi|\,dx \le \underset{M}{\underset{\wedge|}{\|\varphi\|_\infty}} \int_{-k}^{k} |f_n - f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$(\not\Leftarrow)$

ES: $f_n = \operatorname{sen} nx \not\to 0$ in L^1_{loc} MA $\operatorname{sen} nx \to 0$ IN $\mathcal{D}'$

$\forall v \in C_c^\infty$:

$$\int_a^b (\sin nx)\, v(x)\,dx = \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \;\; n\to\infty}}{-\frac{1}{n}\cos nx\, v(x)\Big|_a^b} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_a^b \cos nx\, v'(x)\,dx}_{\downarrow\, 0}$$

IN QUANTO

$$\frac{1}{n}\left|\int_a^b \cos nx\, v'(x)\,dx\right| \le \frac{1}{n}\|v'\|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ES $f_n(x) = \sin^2 nx \to \frac{1}{2}$ nel senso distrib.

$$\sin^2 nx = 1 - \frac{\cos 2n}{2}$$

(OSSERVARE CHE $\cos 2n \to 0$ IN $\mathcal{D}'$)

DERIVATA DI UNA DISTRIBUZIONE

$$\langle f', v \rangle = - \langle f, v' \rangle$$

$f = H(x)$

$$\langle H'(x), v \rangle = - \langle H(x), v' \rangle = - \int_0^\infty v'(x)\, dx = v(0)$$

$v(x) \to 0 \quad x \to +\infty$

$\Rightarrow \boxed{H' = \delta}$

. se f è continua con derivata continua $\Rightarrow$ f' coincide con derivata classica

. se f è continua TRANNE IN x_0 (SALTO) $\quad s = f(x_0^+) - f(x_0^-)$
e per $x \neq 0$ LA DERIVATA Df esiste continua

$$\Rightarrow \quad f' = Df + s\delta(x - x_0)$$

INFATTI $\tilde{f} = f - s\, H(x - x_0)$ È CONTINUA E LA SUA derivata

nel senso delle distribuzioni coincide con $D\tilde{f}$ per $x \neq x_0$

$$\tilde{f}' = Df$$

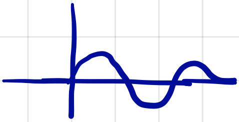
$$\parallel$$

$$f' - s\, \delta(x - x_0)$$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

$$\langle f^{(m)}(x), v(x)\rangle = (-1)^m \langle f, v^{(m)}\rangle$$

__ES__ $f(x) = (\sin x)_+$ $\qquad f' =$



$f' = (\cos x)_+$

$f'' = (-\sin x)_+ + \delta$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) + f(x) = \delta}$$

__OPERAZIONI__

- $\langle f(x-x_0), v(x)\rangle = \langle f(x), v(x+x_0)\rangle$

  $\left(\langle \delta(x-x_0), v(x)\rangle = v(x_0)\right)$

- $\langle f(tx), v(x)\rangle = \frac{1}{t}\langle f(x), v(\frac{x}{t})\rangle \qquad t>0$
- $\langle \psi(x) f(x), v\rangle = \langle f, \psi(x) v(x)\rangle \qquad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$

__VALORE PRINCIPALE__ DI $\frac{1}{x}$ $\qquad v.p.\left(\frac{1}{x}\right)$

$\frac{1}{x}$ NON È LOCALMENTE SOMMABILE SU $\mathbb{R}$ (NEGLI INTERVALLI CONTENENTI 0)

$$\langle v.p.\frac{1}{x}, v(x)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<r} \frac{v(x)-v(0)}{x}\,dx = \int_{|x|<r}\frac{v(x)-v(0)}{x}\,dx$$

SING. ELIMINABILE

$\operatorname{supp} v \subseteq [-r,r]$

ES $\quad x\,\delta(x) = 0 \qquad$ INFATTI:

$$\langle \delta, x\,\varphi(x)\rangle = 0$$

VICEVERSA: SE f è una distribuzione t.c. $\quad x\,f(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad f(x) = c\,\delta$$

ES: $\quad f_m = \left(\dfrac{x^m}{m!}\right)_+ = \begin{cases} \dfrac{x^m}{m!} & x>0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

$f_m \in C^{m-1} \qquad f^{(m-1)}(x) = x_+ = \begin{cases} x & \text{SE } x>0 \\ 0 & \text{ALTRIM} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad f^{(m)} = H \quad$ NEL SENSO DELLE DISTRIB

$\Rightarrow \quad f^{(m+1)} = \delta \quad$ " "

ES CALCOLARE $\displaystyle \lim_{m\to\infty} \overbrace{m\left[\delta\left(x-\tfrac{1}{m}\right) - \delta\left(x+\tfrac{1}{m}\right)\right] + \delta(x+m)}^{T_m}$

$$\forall \varphi\in\mathcal{D} \quad \langle T_m,\varphi\rangle = \underbrace{m\left(\varphi\left(\tfrac{1}{m}\right) - \varphi\left(-\tfrac{1}{m}\right)\right)}_{\text{TAYLOR} \,\to\, =} + \underbrace{\varphi(m)}_{\downarrow\, 0}$$

φ HA SUPP. COMPATTO

$$m\left[\cancel{\varphi(0)} + \varphi'(0)\frac{1}{m} - \cancel{\varphi(0)} + \varphi'(0)\frac{1}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

$$= 2\varphi'(0) + o(1) + \varphi(m) \longrightarrow 2\varphi'(0)$$

$$\| $$

$$-2\,\delta'$$