

ESERCITAZIONE 27/3/2024

PUNTI SINGOLARI

INTORNO FORATO: $B_r^*(z_0) := B_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$

DEF Sia A un APERTO $f: A \rightarrow \mathbb{C}$

$z_0 \notin A$ si dice un PUNTO SINGOLARE di f se $\exists B_r^*(z_0) \subseteq A$

• SINGOLARITÀ ELIMINABILE: $\Leftrightarrow \exists \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$

(LA FUNZIONE $\tilde{f}: A \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ $\tilde{f}(z) = \begin{cases} \lambda & z = z_0 \\ f(z) & z \neq z_0 \end{cases}$ È OLOMORFA IN A)

• POLO DI ORDINE m : $\Leftrightarrow \exists m \geq 1 : \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lambda \neq 0$

$$f(z) \sim \frac{\lambda}{(z - z_0)^m} \quad \text{PER } z \rightarrow z_0$$

• ALTRIMENTI SI PARLA DI SINGOLARITÀ ESSENZIALE (es $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ in $z_0 = 0$)

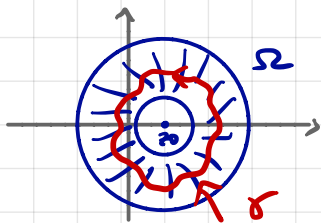
SERIE DI LAURENT

f OLORATA NELL'ANELLO $\Omega = \{R_1 < |z - z_0| < R_2\}$
con $0 < R_1 < R_2$

$$\Rightarrow \forall z \in \Omega \text{ si ha } f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m$$

$$\text{DOVE } a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz$$

$m \in \mathbb{Z}$ γ CURVA CHIUSA
SEMPLICE E REGOLARE
CONTENUTA IN Ω E
PERCORSA IN SENSO
ANTIORARIO
E TC. z_0 E REGIONE
LIMITATA RACCHIUSA DA γ .



$$f(z) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{-1} a_m (z - z_0)^m}_{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} \text{ PARTE PRINCIPALE}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m}_{\text{PARTE OLORATA}}$$

RESIDUO

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$

- z_0 E' UNA SINGOLARITA' :
- ELIMINABILE SE $a_m = 0 \quad \forall m \leq -1$
 - POLO ORDINE N SE $a_m = 0$ PER $-(N-1) \leq m \leq -1$
E $a_{-N} \neq 0$
 - ESSENZIALE $\rightarrow$ INFINITI $m \leq -1$ TC $a_m \neq 0$

ESERCIZIO N° 1

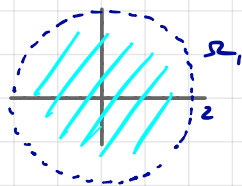
$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$$

SVILUPPO DI LAURENT DI PUNTO INIZIALE $z_0 = 0$

Ⓐ in $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$

Ⓑ in $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$

Ⓐ



OSSERVIAMO CHE $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k$

$\downarrow$
 $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$

$$= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}$$

TEOREMA DI DERIVAZIONE PER SERIE DI POTENZE:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-2} \right) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^k}{2^{k+1}} \right) \quad \text{in } \Omega_1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-1}{(z-2)^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{2^{k+1}} = - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{z^k}{2^{k+1}}$$

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{z^k}{2^{k+1}}}_{\text{PER } |z| < 2}$$

↑
SERIE DI LAURENT (TAYLOR) DI f IN Ω_1
(f È OLOMORFA IN Ω_1)

⑧ SIA $z \in \Omega_2$ (cioè $|z| > 2$)

$\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ in Ω_2

OSSERVANDO CHE

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^{k+1}}$$

DERIVANDO LA SERIE DI POTENZE IN Ω_2 :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{2^k}{z^{k+1}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(k+1) 2^k}{z^{k+2}}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{1}{(z-2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z-2)^2} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{2^k}{z^{k+2}}}_{\text{SERIE DI LAURENT IN } \Omega_2} \quad \forall z \in \Omega_2$$

ESERCIZIO 2

$$f(z) = \frac{1}{2z - z^2} \quad \text{SCRIVERE SVILUPPO DI LAURENT INTORNO AL PUNTO } z_0$$

con: (A) $z_0 = 0$

(B) $z_0 = 2$

(A) SE $0 < |z| < 2$ SI HA:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2z - z^2} &= \frac{1}{z(2-z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{2^{k+1}} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+2}} \quad \forall 0 < |z| < 2 \end{aligned}$$

IN PARTICOLARE $z_0 = 0$ È UN POLO DI ORDINE 1 (POLO SEMPLICE)

$$\text{E } \text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2} \quad \left(f(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} + \frac{z}{8} + \dots \right)$$

(B) SE $0 < |z-2| < 2$:

$$\frac{1}{2z - z^2} = \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z-2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)+2} \right] =$$

$$= \frac{1}{z} \left[\frac{-1}{z-2} + \frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} \right] = \frac{1}{z} \left[-\frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-2)^k}{2^k} \right]$$

$\uparrow$
 $|\frac{z-2}{2}| < 1$

$$= -\frac{1}{z} \frac{1}{z-2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-2)^k}{z 2^{k+2}}$$

Sviluppo di Laurent intorno $z_0 = 2$

$z_0 = 2$ è un polo di ordine 1

$$\text{Res}(f, 2) = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 3 Sviluppo in serie di Laurent di $f(z) = \sin\left(\frac{z}{z+1}\right)$

intorno al punto $z_0 = -1$.

osserviamo che

$$\sin\left(\frac{z}{z+1}\right) = \sin\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \sin(1) \cos \frac{1}{z+1} - \cos(1) \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$$

Ricordiamo: $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ e $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$

↳

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \operatorname{sim} \frac{z}{z+1} &= \operatorname{sim}(1) \cos \frac{1}{z+1} - \cos 1 \operatorname{sim} \left(\frac{1}{z+1} \right) \\
&= \operatorname{sim}(1) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{(z+1)^{2k}} - \cos(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{(z+1)^{2k+1}} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m
\end{aligned}$$

DOVE

$$\begin{cases}
a_m = 0 & \text{per } m \geq 1 \\
a_m = \frac{(-1)^k \operatorname{sim}(1)}{(2k)!} & \text{per } m = -2k \text{ per } k \geq 0 \\
a_m = \frac{(-1)^{k+1} \cos(1)}{(2k+1)!} & \text{per } m = -(2k+1) \text{ per } k \geq 0
\end{cases}$$

z0 È UNA SINGOLARITÀ ESSENZIALE (k=0)

$$\operatorname{Res}(f, -1) = a_{-1} = -\cos(1)$$

ESERCIZIO 4

DETERMINARE LE SINGOLARITÀ DELLE SEGUENTI FUNZIONI: , LA PARTE PRINCIPALE DEGLI SVILUPPI DI LAURENT E IL RESIDUO DELLA FUNZIONE NELLA SINGOLARITÀ

(A) $f(z) = \frac{(z+1)^2}{z}$ OLOMORFA IN $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

0 È UNA SINGOLARITÀ ISOLATA $\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (z+1)^2 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ POLO DI ORDINE 1

$$\frac{(z+1)^2}{z} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z} = \frac{1}{z} + \underbrace{2 + z}_{\substack{\uparrow \\ \text{PARTE} \\ \text{PRINCIPALE}}} \Rightarrow \text{Res}(f, 0) = 1$$

(B) $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+1)}$ HA SINGOLARITÀ ISOLATE IN $z=0$ e $z_0 = \pm i$

$z_0=0$ È UN POLO DI ORDINE 2: $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1+z^2} = 1 \neq 0$

INOLTRE:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(1+z^2)} &= \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k-2} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad |z| < 1 \\ &= \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{\text{PARTE PRINCIPALE}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k z^{2k-2}}_{\text{PARTE OLOMORFA}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ POLO ORDINE 2 e $\text{Res}(f, 0) = 0$

- CONSIDERIAMO $z_0 = \pm i \rightarrow$ SONO POLI DI ORDINE 1

$$\lim_{z \rightarrow \pm i} (z - (\pm i)) \frac{1}{z^2(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{1}{z^2(z \pm i)} = \frac{-1}{(\pm 2i)} = \frac{\pm i}{2} \neq 0$$

$\frac{1}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{z^2(z-i)(z+i)}$

INOLTRE:

- IN $z_0 = i$

$$\frac{1}{z^2(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{\underbrace{z^2(z+i)}_{(*)}} = \frac{1}{z-i} \left[\underbrace{\frac{-1}{2i} + O(z-i)}_{\substack{\text{SVILUPPO DI} \\ \text{TAYLOR DI } (*)}} \right]$$

$$= \frac{i/2}{z-i} + O(1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{PARTE PRINCIPALE}}$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, i) = i/2$$

- IN $z_0 = -i$, PROCEDENDO COME SOPRA

$$\frac{1}{z^2(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{(z+i)} \left[\frac{-i}{2} + O(1) \right]$$

$$= \frac{-i/2}{z+i} + O(1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{PARTE PRINCIPALE}}$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, -i) = -i/2$$

③ $f(z) = \frac{zm^2}{z}$ in $z_0=0$ c'è una SINGOLARITÀ ELIMINABILE

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{zm^2}{z} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{zm^2}{z} &= \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

ADUN C'È PARTE PRINCIPALE

$$\text{Res}(f, 0) = 0$$

$$\textcircled{D} \quad e^{\frac{z}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{m!} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{z^3}{3! \cdot 2^3} + \dots$$

PARTE PRINCIPALE

SINGOLARITÀ ESSENZIALE IN $z=0$

$$\text{Res}(e^{\frac{z}{2}}, 0) = 2$$

Ⓔ $\frac{e^{-3z}}{z^3(1-z^2)}$ è olomorfa in $\Omega \setminus \{0, \pm 1\}$

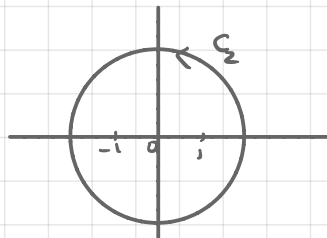
• $z_0 = 0$ singolarità di ordine 3:

PARTI PRINCIPALE $\frac{1}{z^3} \left(\frac{e^{-3z}}{1-z^2} \right) = \frac{1}{z^3} \left((1-3z + \frac{9z^2}{2} + O(z^3)) \cdot (1+z^2 + O(z^4)) \right)$

$$= \frac{1}{z^3} \left(1 + z^2 - 3z + \frac{9z^2}{2} + O(z^3) \right)$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{3}{z^2} + \frac{11}{2} \frac{1}{z} + O(1)$$

PARTI PRINCIPALE



$$\text{Res} \left(\frac{e^{-3z}}{z^3(1-z^2)}, 0 \right) = \frac{11}{2}$$

ALTRO MODO
PER CALCOLARE
IL COEFF. DELLA
PARTI PRINCIPALE

$$a_{-3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^{-3z} \cancel{(1-z^2)} z^3}{z^{-2}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^{-3z} \cancel{(1-z^2)}}{z} dz$$

$\uparrow z^{m+1}$

→ $\text{TEOREMA CAUCHY} = \left(\frac{e^{-3z}}{1-z^2} \right) \Big|_{z=0} = 1$

$$\begin{aligned}
 a_{-2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-3z}}{(1-z^2)z^3} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-3z}}{z^2(1-z^2)} dz \\
 &= \left(\frac{e^{-3z}}{1-z^2} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{-3e^{-3z}(1-z^2) + e^{-3z}(-2z)}{(1-z^2)^2} \Big|_{z=0} = -3
 \end{aligned}$$

Termine
 Cauchy per derivata

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-3z}}{z^2(1-z^2)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-3z}}{z^2} dz$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-3z}}{1-z^2} \right)' \Big|_{z=0} = \dots = \frac{11}{2}$$

in $z_0 = \pm 1$ Polo di ORDINE 1

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow \pm 1} (z \mp 1) \frac{e^{-3z}}{z^3(1-z)(1+z)} &= \lim_{z \rightarrow \pm 1} \frac{-e^{-3z}}{z^3(z \pm 1)} = \frac{-e^{-3}}{\underbrace{(\mp 1)(\pm 2)}} \\
 &= \pm \frac{e^{-3}}{2} \neq 0
 \end{aligned}$$

PARTE PRINCIPALE

RESIDUO

$$\left(\pm \frac{e^{-3}}{2} \right) \frac{1}{(z \mp 1)} + \text{PARTE OLOMORFA}$$

$$\textcircled{F} f = \frac{1}{z^2+5z+6} = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}$$

SINGOLARITÀ IN $z_0 = -2$ E $z_0 = -3$ POL. ORDINE 1

IN $z_0 = -2$

$$\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{(z+2)+1} = \boxed{\frac{1}{z+2}} - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (z+2)^m$$

simile in $z_0 = -3$

$$\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \boxed{\frac{-1}{z+3}} - \sum_{m=0}^{\infty} (z+3)^m$$

PARTE PRINCIPALE PARTE PRINCIPALE

$$\left(\frac{1}{(z+3)-1} = - \frac{1}{1-(z+3)} \right)$$

$$\text{Res}(f, -2) = 1$$

$$\text{Res}(f, -3) = -1$$

⑥ $\frac{1}{\sin z}$ HA POLI IN OGNI MULTIPLO INTERO DI π

SONO POLI SEMPLICI (DI ORDINE 1) $z_0 = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

LA FUNZIONE È PERIODICA DI PERIODO 2π , QUINDI SARÀ SUFFICIENTE STUDIARE $z_0 = 0$ E $z_0 = \pi$

$$\frac{1}{\sin z} = \underbrace{\frac{z}{\sin z}}_{1 + O(z)} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + O(1)$$

PARTE PRINCIPALE

← STESSA COSA
PER $z_0 = 2k\pi$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\sin(z - \pi + \pi)} = \frac{-1}{\sin(z - \pi)} = \underbrace{-\frac{1}{z - \pi}}_{\text{PARTE PRINCIPALE}} + O(1)$$

← STESSA
COSA PER
 $z_0 = (2k+1)\pi$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, 2k\pi\right) = 1$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, (2k+1)\pi\right) = -1$$

(H)

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2 z} \quad \text{HA POL DI ORDINE 2 IN OGNI } z_0 = k\pi$$

È π -PERIODICA, QUINDI BASTA CALCOLARE IN $z=0$

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{\left(z - \frac{z^3}{3!} + O(z^5)\right)^2} = \frac{1}{z^2 \left(1 - \frac{z^2}{3!} + O(z^4)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + O(z^4)} = \frac{1}{z^2} \left[1 + \frac{z^2}{3} + O(z^4) \right]$$

$$= \frac{1}{z^2} + O(1)$$

$\downarrow$
PARTE PRINCIPALE

$$\Rightarrow \text{Res} \left(\frac{1}{\sin^2 z}, 0 \right) = 0$$

$\uparrow$ STESSA COSA IN OGNI $z_0 = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

RESIDUI E LORO CALCOLO

f olomorfa in $\{z: 0 < |z - z_0| < R\}$

Sviluppo di LAURENT:
$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \quad 0 < |z - z_0| < R$$

$$\boxed{\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}}$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz$$

C_r = CIRCONF. CENTRATA IN z_0 E RAGGIO $0 < r < R$

SIA z_0 UNA SINGOLARITÀ ISOLATA DI ORDINE m PER f OLOMORFA IN

$\{0 < |z - z_0| < R\}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \Big|_{z=z_0}}$$

$$\uparrow f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + \dots$$

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \dots + \frac{a_{-1}}{1} (z - z_0)^{m-1} \quad \leftarrow \text{TAYLOR}$$
$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z - z_0)^m]$$

TEOREMA DEI RESIDUI

Ω APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO $z_1, \dots, z_m \in \Omega$

f OLORRFA IN $\Omega - \{z_1, \dots, z_m\}$

SE γ È UNA CURVA CHIUSA REGOLARE IN $\Omega - \{z_1, \dots, z_m\}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \underbrace{n(\gamma, z_k)}_{\uparrow} \text{Res}(f, z_k)$$

$\in \mathbb{Z}$ numero di volte
che γ si avvolge intorno
 z_k

(contorno + i giri in senso
antiorario e - quelli in
verso senso)

ES CALCULER $\text{Res}\left(\frac{\cos \pi z}{z(z^2+1)^2}, 1\right)$

1 È UNA SING. ISOLATA: POLO DI ORDINE 2

$$\text{Res}\left(\frac{\cos \pi z}{z(z^2+1)^2}, 1\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formule} \\ \text{per c. con } m=1}}}{\frac{d}{dz}} \left(\frac{\cos \pi z}{z(z^2+1)^2} \right) \Big|_{z=1}$$

$$z^3-1 = (z-1)(z^2+z+1)$$

$$= \frac{\pi \sin(\pi z) [\dots] - \cos \pi z \left[(z^2+z+1)^2 + z \cdot 2(z^2+z+1)(2z+1) \right]}{z^2(z^2+z+1)^4} \Big|_{z=1}$$

$$= \frac{3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3}{3^4} = \frac{1}{3}$$

ES $\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z^4(z^2+1)}, 0\right)$ 0 è una ang. di ordine 3

$$\frac{1}{z^4} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + o(z^5) \right) \cdot \left(1 - z^2 + o(z^4) \right) = \frac{1}{z^4} \left[z - z^3 - \frac{z^3}{6} + o(z^4) \right]$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{7}{6} \frac{1}{z} + o(1) \Rightarrow \text{Res} = -\frac{7}{6}$$