Compito scritto di Fisica Matematica 2
11 settembre 2013

1 Esercizio n. 1

Si calcolino gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni del Laplaciano nel rettangolo $Q = [0, 2\pi] \times [0, h]$ con condizioni al bordo (indichiamo con (x, y) il generico punto di Q)

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u(2\pi, y) \ , \quad \forall y \in [0, h] \\ u(x, 0) &= u(x, h) = 0 \ , \quad \forall x \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

limitandosi alle autofunzioni che possono scriversi come prodotto di una funzione di x per una funzione di y. Bisogna cioè calcolare i numeri reali λ e le funzioni $u(x, y)$, definite in Q, tali che

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \lambda u(x, y) \ , \quad (x, y) \in \text{int}\, Q \\ &u(0, y) = u(2\pi, y) \ , \quad \forall y \in [0, h] \\ &u(x, 0) = u(x, h) = 0 \ , \quad \forall x \in [0, 2\pi] \\ &u(x, y) = u_1(x) u_2(y) \end{aligned}$$

2 Esercizio n. 2

Sia $\hat{f}(k)$ la trasformata di Fourier della funzione $f(x) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \bigcap \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$, definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & |x| \geq 1 \\ |x| & |x| < 1 \end{cases}$$

Si dimostri che $\hat{f}(k)$ è una funzione reale appartenente a $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \bigcap \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$.
Suggerimento: fare vedere, tramite delle opportune integrazioni per parti, che, per $|k| \to \infty$, $\hat{f}(k) = O(|k|^{-2})$.