

Complementi del corso di
Fisica Matematica 2

Giuseppe Benfatto
Università di Roma "Tor Vergata"

a. a. 2012-13

Indice

1	Serie di Fourier	2
1.1	Funzioni periodiche	2
1.2	Convergenza in media quadratica	7
1.3	Funzioni pari o dispari	9
1.4	Funzioni definite in un intervallo	10
1.4.1	Serie di soli seni	10
1.4.2	Serie di soli coseni	13
2	Equazione del calore	15
2.1	Condizioni di Dirichlet	15
2.2	Condizioni di Neumann	22
2.3	Condizioni al bordo miste	23
3	Trasformata di Fourier	28
3.1	Introduzione formale	28
3.2	Funzioni di una variabile	29
3.3	Funzioni di più variabili.	35
3.4	Ulteriori proprietà	37
3.5	Applicazioni alle PDE	38
4	Complementi sull'equazione di Laplace.	43
4.1	Equazione di Laplace nel semispazio	43
4.2	Equazione di Laplace nella sfera.	44
5	Complementi sull'equazione del trasporto.	49
5.1	Equazione del trasporto non lineare.	49
6	Complementi sull'equazione delle onde.	51
6.1	Corda elastica e catene di oscillatori accoppiati.	51
6.2	Equazione di Klein-Gordon.	52
6.3	Velocità di gruppo.	55
A	Spazi L^p	58
A.1	Definizioni e proprietà generali	58
A.2	$L^2(\Omega)$ visto come spazio di Hilbert	59

1 Serie di Fourier

1.1 Serie di Fourier di funzioni periodiche, definite in \mathbb{R} .

Supponiamo che i numeri complessi $\{\tilde{c}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ siano tali che la serie trigonometrica $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$ è convergente in \mathbb{R} ad una funzione $\tilde{f}(x)$ a valori complessi

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (1.1)$$

La funzione $\tilde{f}(x)$ è allora una funzione periodica di periodo L , in quanto ciò è vero per le funzioni $e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$; la serie in questione si chiama la *serie di Fourier* di $\tilde{f}(x)$ con *coefficienti di Fourier* \tilde{c}_n .

Se $|\tilde{f}(x)|$ è anche integrabile nell'intervallo $[0, L]$, sono ben definite le costanti

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L dx \tilde{f}(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (1.2)$$

Si noti che l'intervallo di integrazione nella (1.2) può essere sostituito da qualunque intervallo di lunghezza L , senza cambiare il valore di c_n ; ciò può essere dimostrato facilmente usando la periodicità dell'integrando.

Sostituiamo ora la (1.1) nella (1.2) e supponiamo che sia possibile scambiare l'integrale con la serie; ciò accade, per esempio, se la serie di Fourier è uniformemente convergente (in tal caso $\tilde{f}(x)$ è anche continua). Si ha:

$$c_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_m \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{i\frac{2\pi(m-n)}{L}x} = \tilde{c}_n \quad (1.3)$$

in quanto

$$\frac{1}{L} \int_0^L dx e^{i\frac{2\pi(n-m)}{L}x} = \delta_{n,m} \quad (1.4)$$

Supponiamo ora che, invece della successione, sia data una funzione a valori complessi $f(x)$, continua e periodica di periodo L , e definiamo la successione \tilde{c}_n tramite la (1.2), con $f(x)$ al posto di $\tilde{f}(x)$. Se la successione soddisfa le condizioni precedentemente descritte, possiamo nuovamente definire una funzione $\tilde{f}(x)$ tramite la (1.1) e la (1.3) implica che

$$\int_0^L dx [f(x) - \tilde{f}(x)] e^{-i\frac{2\pi m}{L}x} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (1.5)$$

Viene pertanto naturale domandarsi se, almeno sotto opportune condizioni di regolarità, non sia anche vero che $f(x) = \tilde{f}(x)$.

Per analizzare questo problema, cominciamo con lo studiare alcune proprietà dei coefficienti di Fourier, definiti tramite la (1.2) con $f(x)$ al posto di $\tilde{f}(x)$:

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (1.6)$$

Cominciamo con l'osservare che per dare senso a questa definizione è sufficiente che $|f(x)|$ sia integrabile in $I \equiv [0, L]$ (cioè che $f \in \mathbf{L}^1(I)$, vedi App. A) e che, sotto questa sola ipotesi, la successione c_n è limitata; infatti $|c_n| \leq L^{-1} \int_0^L dx |f(x)|$.

Si può anzi dimostrare che c_n è infinitesima per $|n| \rightarrow \infty$, considerando la funzione $\tilde{f}(x) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, tale che $\tilde{f}(x) = f(x)$, per $x \in [0, L]$, e $\tilde{f}(x) = 0$, altrimenti. Si può allora scrivere $Lc_n = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k_n)$, dove $\hat{f}(k)$ è definita come nella (3.6) e $k_n = 2\pi n/L$, e poiché $\hat{f}(k) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, per la Prop. 3.1, allora $c_n \rightarrow 0$ per $|n| \rightarrow \infty$.

È inoltre facile dimostrare che, se $f(x)$ è abbastanza regolare, c_n tende a 0 per $|n| \rightarrow \infty$, tanto più velocemente quanto più $f(x)$ è regolare. Supponiamo, per esempio, che $f(x)$ sia di classe \mathbf{C}^1 ; allora possiamo operare una integrazione per parti nell'integrale della (1.2) ed otteniamo, se $n \neq 0$,

$$c_n = \frac{i}{2\pi n} \int_0^L dx f(x) \frac{d}{dx} e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} = -\frac{i}{2\pi n} \int_0^L dx f'(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (1.7)$$

$$\Rightarrow |c_n| \leq \frac{L}{2\pi n} \|f'\|_\infty$$

avendo usato il fatto che sia $f(x)$ che $e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}$ assumono lo stesso valore in 0 e in L , in quanto ambedue periodiche di periodo L . La forma della (1.7) assicura che, se $f(x)$ è di classe \mathbf{C}^k (per cui $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(L)$ per ogni $j \leq k$), l'argomento precedente possa ripetersi k volte, guadagnando ogni volta una potenza di n nella stima. Abbiamo pertanto dimostrato che

$$f(x) \in \mathbf{C}^k \Rightarrow |c_n| \leq \left[\frac{L}{2\pi n} \right]^k \|f^{(k)}\|_\infty, n \neq 0 \quad (1.8)$$

Usando questa stima è molto facile dimostrare la proposizione seguente.

Proposizione 1.1 *Se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo L di classe \mathbf{C}^k , con $k \geq 2$, la serie di Fourier con coefficienti c_n definiti dalla (1.6) converge totalmente (quindi uniformemente) ad una funzione $\tilde{f}(x)$ di classe almeno \mathbf{C}^{k-2} . Inoltre, se $j \leq k-2$,*

$$\tilde{f}^{(j)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left[i\frac{2\pi n}{L} \right]^j e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (1.9)$$

cioè la serie di Fourier di $\tilde{f}(x)$ è derivabile termine a termine $k - 2$ volte.

Meno ovvio è il seguente teorema.

Teorema 1.1 *Se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo L di classe \mathbf{C}^k , con $k \geq 2$, e $\tilde{f}(x)$ è definita come nella Prop. 1.1, allora*

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad (1.10)$$

Dim. - Per la Prop. 1.1, la serie di Fourier converge totalmente; pertanto, per dimostrare il teorema, basta dimostrare che

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x), \quad S_N(x) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{i \frac{2\pi n}{L} x} \quad (1.11)$$

Se sostituiamo la (1.6) nella (1.11), otteniamo

$$S_N(x) = \frac{1}{L} \int_0^L dy \delta_N(x-y) f(y) \quad (1.12)$$

dove

$$\delta_N(x-y) = \sum_{n=-N}^{+N} e^{i \frac{2\pi n}{L} (x-y)} \quad (1.13)$$

Si noti che, se $f(x) = 1$, $c_n = \delta_{n,0}$, così che, per la (1.11), $S_N(x) = 1$; dalla (1.12) segue allora che

$$\frac{1}{L} \int_0^L dy \delta_N(x-y) = 1 \quad (1.14)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{L} \int_0^L dy \delta_N(x-y) [f(y) - f(x) + f(x)] \\ &= f(x) + \frac{1}{L} \int_0^L dy \delta_N(x-y) [f(y) - f(x)] \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ne segue che, per dimostrare il teorema, basta dimostrare che, per ogni x fissato,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^L dy \delta_N(x-y) [f(y) - f(x)] = 0 \quad (1.16)$$

Cominciamo col notare che, posto $\alpha = \frac{2\pi}{L}(x-y)$, si ha

$$\delta_N(x-y) = F_N(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^N e^{-i\alpha n} + \sum_{n=1}^N e^{i\alpha n} \quad (1.17)$$

Se $\alpha = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, si vede subito che $F_N(\alpha) = 2N + 1$. In caso contrario, usando la formula per la somma di una successione geometrica, si trova:

$$F_N(\alpha) = \sum_{n=0}^N e^{-ian} + \sum_{n=0}^N e^{ian} - 1 = 2\Re \left[\frac{e^{i\alpha(N+1)} - 1}{e^{i\alpha} - 1} \right] - 1 \quad (1.18)$$

Un semplice calcolo mostra quindi che, se $\alpha \neq 2\pi m$,

$$F_N(\alpha) = \frac{\sin[\alpha(N + 1/2)]}{\sin(\alpha/2)} \quad (1.19)$$

Questa espressione ovviamente converge per $\alpha \rightarrow 2\pi m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$ (come è peraltro facile verificare direttamente), in quanto $F_N(\alpha)$ è, in base alla sua definizione (1.17), una funzione di classe \mathbf{C}^∞ . D'altra parte, $F_N(\alpha)$ è una funzione periodica di periodo 2π , al pari della funzione

$$g(\alpha) = f\left(x - \frac{L}{2\pi}\alpha\right) - f(x) \quad (1.20)$$

la quale risulta anche di classe \mathbf{C}^k , $k \geq 2$, per le ipotesi su $f(x)$, e nulla in $\alpha = 0$.

Si noti ora che, tramite un cambio di variabile, la (1.16) diventa:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\frac{2\pi x}{L}}^{\frac{2\pi x}{L} + 2\pi} d\alpha F_N(\alpha) g(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha F_N(\alpha) g(\alpha) = 0 \quad (1.21)$$

avendo usato, nel secondo passaggio, il fatto che $F_N(\alpha)g(\alpha)$ è periodica di periodo 2π , per cui l'integrale è eguale in ogni intervallo di lunghezza 2π . Inoltre, usando la (1.19), si vede che

$$F_N(\alpha)g(\alpha) = \sin(\alpha N)\psi(\alpha) + \cos(\alpha N)g(\alpha) \quad (1.22)$$

avendo definito

$$\psi(\alpha) = \begin{cases} \cos(\alpha/2) \frac{g(\alpha)}{\sin(\alpha/2)} & \text{if } \alpha \neq 0, \alpha \in [-\pi, \pi] \\ 2g'(0) & \text{if } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Facciamo vedere che la funzione $\psi(\alpha)$ è una funzione di classe \mathbf{C}^{k-1} in $[\pi, \pi]$. Definiamo

$$h(\alpha) = \begin{cases} g(\alpha)/\alpha & \text{if } \alpha \neq 0, \alpha \in [-\pi, \pi] \\ g'(0) & \text{if } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

$$s(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha/2}{\sin(\alpha/2)} & \text{if } \alpha \neq 0, \alpha \in [-\pi, \pi] \\ 1 & \text{if } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Si noti che $s(\alpha)$ è ben definita, in quanto $\sin(\alpha/2)$ non si annulla mai nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, eccetto che in $\alpha = 0$. Si ha

$$\psi(\alpha) = 2 \cos(\alpha/2) s(\alpha) h(\alpha) \quad (1.26)$$

è facile vedere che la funzione $h(\alpha)$ è di classe \mathbf{C}^{k-1} . Infatti, se $\alpha \neq 0$, la funzione è k volte differenziabile per motivi banali. Se $\alpha = 0$, basta usare per $g(x)$ lo sviluppo di Taylor nel punto $\alpha = 0$; poiché $g(0) = 0$, si ha

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= g'(0)\alpha + \sum_{j=2}^k \frac{\alpha^j}{j!} g^{(j)}(0) + o(\alpha^k) \\ h(\alpha) &= g'(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha^j}{(j+1)!} g^{(j+1)}(0) + o(\alpha^{k-1}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Nello stesso modo si vede che $s(\alpha)$ è di classe \mathbf{C}^∞ , al pari di $\cos(\alpha/2)$. Ciò prova l'asserto su $\psi(\alpha)$.

A questo punto, operando $k - 1$ integrazioni per parti successive, come nella dimostrazione della Prop. 1.1, ed usando il fatto che $\psi(\alpha)$ e $g(\alpha)$ sono periodiche di periodo 2π , al pari di $\sin(\alpha N)$ e $\cos(\alpha N)$, si può mostrare che esiste una costante C_k tale che

$$\left| \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha F_N(\alpha) g(\alpha) \right| \leq C_k N^{-(k-1)} \quad (1.28)$$

il che implica la (1.21), poiché $k \geq 2$. ▀

Il teorema appena dimostrato pone delle condizioni molto restrittive, non sempre verificate nelle applicazioni. È tuttavia possibile dimostrare un teorema più generale, la cui dimostrazione può essere trovata, per esempio, in [2]. Premettiamo una definizione.

Definizione 1.1 *Una funzione $f(x)$, definita in \mathbb{R} , si dice \mathbf{C}^1 a tratti se*

- (i) *dato comunque un intervallo limitato, la funzione è continua e differenziabile ovunque, con l'eccezione di un numero finito di punti;*
- (ii) *se \bar{x} è un punto di discontinuità, allora esistono finiti $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^\pm} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^\pm} f'(x)$.*

Si noti che, se $f(x)$ è \mathbf{C}^1 a tratti e periodica di periodo L , i coefficienti di Fourier (1.6) sono ben definiti, ma il loro valore non dipende dal valore della funzione nei punti di discontinuità. Pertanto non è sicuramente possibile dimostrare che $\tilde{f}(x) = f(x)$, per ogni x ; questa eguaglianza deve essere necessariamente falsa in generale. Ci si può tuttavia chiedere se è possibile scegliere i valori di $f(x)$ nei punti di discontinuità in modo che $\tilde{f}(x) = f(x)$, per ogni x . Il teorema seguente dà una risposta positiva a questa domanda.

Teorema 1.2 *Sia data una funzione $f(x)$, definita in \mathbb{R} , periodica di periodo L e \mathbf{C}^1 a tratti, e si definiscano i coefficienti di Fourier tramite la (1.6). Allora, se $S_N(x)$ è definita come nella (1.11), e C_f indica l'insieme dei punti di continuità,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C_f \\ \frac{1}{2}[\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)] & \text{se } x \notin C_f \end{cases} \quad (1.29)$$

Inoltre, la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso che non contiene punti di discontinuità.

1.2 Convergenza in media quadratica

Ricordiamo che, nello spazio $\mathbf{L}^2(I)$ delle funzioni $f(x)$ a valori complessi definite nell'intervallo aperto $I \equiv (0, L)$ e misurabili secondo Lebesgue, il cui modulo quadro sia integrabile, è possibile definire una norma $\|f\|_2$ e la metrica associata ($d(f, g) = \|f - g\|$), ponendo (vedi App. A):

$$\|f\|_2^2 = \int_0^L dx |f(x)|^2 \quad (1.30)$$

Questa definizione si può estendere immediatamente allo spazio delle funzioni periodiche di periodo L , nel qual caso però l'intervallo di integrazione può essere scelto arbitrariamente, purché abbia lunghezza L . Per il Teorema A.1 $\mathbf{L}^2(I)$ è uno spazio metrico completo, che coincide con la chiusura di $\mathcal{D}(I)$, lo spazio delle funzioni \mathbf{C}^∞ a supporto contenuto in I .

Ricordiamo inoltre che su questo spazio si può definire un prodotto scalare, ponendo

$$(f, g) = \int_0^L dx f(x)^* g(x) \quad (1.31)$$

e che, in questo modo, si fornisce a $\mathbf{L}^2(I)$ una struttura di spazio di Hilbert.

Osserviamo ora che, se $f \in \mathbf{L}^2(I)$, allora $f \in \mathbf{L}^1(I)$; infatti, per la (A.3), se poniamo $\chi(x) = 1$,

$$\int_0^L dx |f(x)| = \int_0^L dx |f(x)| \chi(x) \leq \|f\|_2 \|\chi\|_2 = \sqrt{L} \|f\|_2$$

Ne segue che, se $f \in \mathbf{L}^2(I)$, allora sono definiti i coefficienti di Fourier (1.6) e quindi la funzione $S_N(x)$ della (1.11). La seguente proposizione mostra come la serie di Fourier abbia un ruolo "speciale" nello spazio $\mathbf{L}^2(I)$. Notiamo preliminarmente che $S_N(x)$ può scriversi nella forma

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N (\chi_n, f) \chi_n(x), \quad \chi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i \frac{2\pi n}{L} x} \quad (1.32)$$

e che, per la (1.4), le funzioni $\chi_n(x)$ sono un sistema ortonormale, cioè

$$(\chi_n, \chi_m) = \delta_{n,m} \quad (1.33)$$

Proposizione 1.2 *Se $f \in \mathbf{L}^2(I)$ e $S_N(x)$ è definito come nella (1.11), allora*

$$\|f - S_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - L \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \quad (1.34)$$

Inoltre, fissato N , posto $\mathbf{a} = (a_{-N}, a_{-N+1}, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$ e

$$F_N(\mathbf{a}, x) = \sqrt{L} \sum_{n=-N}^N a_n \chi_n(x)$$

si ha

$$\|f - S_N\|_2 = \min_{\mathbf{a}} \|f - F_N(\mathbf{a})\|_2 \quad (1.35)$$

che si esprime di solito dicendo che $S_N(x)$ è la migliore approssimazione nella media quadratica con polinomi trigonometrici della forma $\sqrt{L} \sum_{n=-N}^N a_n \chi_n(x)$.

Dim. - Per la (1.33) e la (1.31) ed usando che $c_n = (\chi_n, f)/\sqrt{L}$,

$$\begin{aligned} \|f - F_N(\mathbf{a})\|_2^2 &= (f - \sqrt{L} \sum_{n=-N}^N a_n \chi_n, f - \sqrt{L} \sum_{n=-N}^N a_n \chi_n) = \\ &= (f, f) + \sum_{n=-N}^N [-\sqrt{L} a_n^* (\chi_n, f) - \sqrt{L} a_n (f, \chi_n) + L |a_n|^2] = \\ &= (f, f) + L \sum_{n=-N}^N [-a_n^* c_n - a_n c_n^* + |a_n|^2] = (f, f) - L \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 + L \sum_{n=-N}^N |c_n - a_n|^2 \end{aligned}$$

da cui seguono subito la (1.34) e la (1.35), poiché $\sum_{n=-N}^N |c_n - a_n|^2$ è una quantità sempre positiva, eccetto che se $a_n = c_n$ per ogni n , nel qual caso $F_N(\mathbf{a}) = S_N$. ▀

L'eguaglianza (1.34) ha una importante conseguenza. Essa infatti implica che, senza supporre alcuna proprietà di regolarità per $f(x)$, purché essa sia di quadrato sommabile, non solo la successione dei suoi coefficienti di Fourier è infinitesima per $|n| \rightarrow \infty$ (cosa che abbiamo già osservato), ma per di più la serie dei moduli quadri è convergente. Questa affermazione segue dal fatto che $\|f - S_N\|_2^2 \geq 0$, per cui

$$L \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad (1.36)$$

Ci si può a questo punto chiedere cosa succede se $N \rightarrow \infty$. Se la funzione è continua e \mathbf{C}^1 a tratti, il Teorema 1.2 ci dice che $S_N(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, da cui segue facilmente che $\|f - S_N\|_2^2 \rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$; vale pertanto l'*Identità di Parseval*

$$\|f\|_2^2 = L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (1.37)$$

cioè la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ non solo è convergente, ma converge proprio a $\|f\|_2^2$. Se la funzione non è continua, ma solo \mathbf{C}^1 a tratti, dimostrare questa identità non è banale, ma essa è ancora vera. Si può anzi dimostrare che la (1.37) è vera sotto la sola ipotesi che $f \in \mathbf{L}^2(I)$.

1.3 Serie di Fourier di funzioni pari o dispari.

Se $f(x) = -f(-x)$ e $\tilde{f}(x)$ è ben definita, la serie di Fourier può scriversi in una forma diversa, che risulta utile in alcune applicazioni. Si ha infatti

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} dx f(x) \left[e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} - e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \right] = \\ &= \frac{-2i}{L} \int_0^{L/2} dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Di qui segue che $c_0 = 0$ e che $c_n = -c_{-n}$, per cui, dopo alcuni passaggi, si ottiene:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.39)$$

$$b_n = 2ic_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.40)$$

In modo analogo, se $f(x) = f(-x)$, si trova

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.41)$$

$$a_n = 2c_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.42)$$

Questi risultati si esprimono talora dicendo che la serie di Fourier di una funzione dispari si può scrivere come una *serie di soli seni*, mentre la serie di Fourier di una funzione pari si può scrivere come una *serie di soli coseni*.

Questa terminologia segue dal fatto che, in generale, la serie di Fourier può scriversi nella forma

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.43)$$

con coefficienti

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.44)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.45)$$

Queste formule si ricavano facilmente dalla (1.1), usando la formula

$$e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)$$

1.4 Serie di Fourier di funzioni definite in un intervallo.

Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia definita nell'intervallo $I = [a, a + L]$ e ivi integrabile. Se $f(a) = f(a + L)$, a partire da questa funzione si può costruire una funzione periodica di periodo L , definita in \mathbb{R} e coincidente con $f(x)$ in I , ponendo, nell'intervallo $[a + kL, a + (k + 1)L]$, $f(x) = f(x - kL)$. Se $f(a) \neq f(a + L)$, si può procedere nello stesso modo, partendo dalla restrizione di $f(x)$ all'intervallo $[a, a + L]$. Si noti che, in questo secondo caso, anche se la funzione $f(x)$ è regolare in I , il suo prolungamento è discontinuo nei punti $a + kL$; tuttavia, anche nel caso $f(a) = f(a + L)$ la regolarità del prolungamento è in generale inferiore a quella di $f(x)$. Si vede subito che, se $f \in \mathbf{C}^k(I)$, il prolungamento è di classe $\mathbf{C}^j(\mathbb{R})$, $j \leq k$, se e solo se $f^{(r)}(a) = f^{(r)}(a + L)$, con $r \leq j$. Si noti che questa condizione è sicuramente verificata se il supporto di $f(x)$ non contiene gli estremi di I .

In ogni caso, se si definisce la successione c_n come nella (1.6), ha senso considerare la serie di Fourier associata, i cui coefficienti dipendono esclusivamente dalla funzione $f(x)$. Tale serie, tuttavia, non è l'unica che gode di questa proprietà, in quanto si può pensare di estendere $f(x)$ ad un qualunque intervallo $\bar{I} \supset I$, con una prescrizione che dipende esclusivamente dai valori di $f(x)$ in I , e quindi prolungarla a tutto \mathbb{R} come funzione periodica di periodo $|\bar{I}|$. Vediamo due applicazioni di questa idea, utili nelle applicazioni.

1.4.1 Serie di soli seni

Supponiamo che $I = [0, L]$ (ci si può sempre ridurre a questo caso con un cambio di variabili) e poniamo $\bar{I} = [-L, L]$. Data una funzione $f(x)$ definita

in I , costruiamo una funzione $\bar{f}(x)$ definita in \bar{I} , ponendo

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 \leq x < L \\ -f(-x) & \text{se } -L \leq x < 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

Questa funzione è dispari, per cui la sua serie di Fourier è una serie di soli seni, cioè una serie della forma (1.39), con $2L$ al posto di L , vale a dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.47)$$

con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.48)$$

Si noti che questa serie potrebbe convergere peggio della serie definita precedentemente, in quanto in generale $\bar{f}(x)$ ha una discontinuità in 0 e in $\pm L$. Condizione necessaria perché ciò non succeda è che $f(0) = f(L) = 0$; in tal caso possiamo anzi dimostrare che la regolarità di $f(x)$ pone delle buone proprietà di decrescita per i coefficienti di Fourier.

Proposizione 1.3 *Se la funzione $f(x)$ è di classe \mathbf{C}^k in $I = [0, L]$, con $k \geq 3$, e soddisfa le condizioni $f(0) = f(L) = 0$, allora, se la successione b_n è definita come nella (1.48), si ha*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.49)$$

la convergenza essendo uniforme in I . Inoltre

$$|b_n| \leq \frac{4L^2}{(\pi n)^3} \left[\|f^{(2)}\|_{\infty} + \|f^{(3)}\|_{\infty} \right] \quad (1.50)$$

per cui la serie (1.49) è derivabile una volta termine a termine.

Se si aggiungono le ulteriori condizioni

$$f^{(2j)}(0) = f^{(2j)}(L) = 0, \quad 0 < 2j \leq k-1 \quad (1.51)$$

allora

$$|b_n| \leq \frac{2L^{k-1}}{(\pi n)^k} \|f^{(k)}\|_{\infty} \quad (1.52)$$

per cui la serie (1.49) è derivabile termine a termine $k-2$ volte.

Dim. - Cominciamo con l'osservare che il prolungamento dispari $\bar{f}(x)$ a tutto \mathbb{R} di $f(x)$, definito dalla (1.46), è di classe \mathbf{C}^1 , come è facile verificare. Pertanto, grazie al Teorema 1.2, la serie (1.47) converge uniformemente a

$\bar{f}(x)$ in \mathbb{R} , quindi anche in I , dove $\bar{f}(x) = f(x)$. Notiamo poi che, se si operano tre successive integrazioni per parti nella (1.48), si trova

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{2}{\pi n} \left[f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \right]_0^L + \frac{2}{\pi n} \int_0^L dx f^{(1)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \\
&= \frac{2}{\pi n} \int_0^L dx f^{(1)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \\
&= \frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi n}\right)^2 \left[f^{(1)}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \right]_0^L - \frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi n}\right)^2 \int_0^L dx f^{(2)}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \\
&= -\frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi n}\right)^2 \int_0^L dx f^{(2)}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \tag{1.53} \\
&= \frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi n}\right)^3 \left[f^{(2)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \right]_0^L - \frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi n}\right)^3 \int_0^L dx f^{(3)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)
\end{aligned}$$

Di qui segue subito la stima (1.50).

Si noti ora che il primo termine nell'ultima riga del calcolo precedente è eguale, a meno di una costante, a $[(-1)^n f^{(2)}(L) - f^{(2)}(0)]/|n|^3$, per cui è sicuramente non nullo per n dispari, se $f^{(2)}(L) \neq f^{(2)}(0)$. Ne segue che la stima (1.50) non può essere migliorata in generale, se $k > 3$, operando ulteriori integrazioni per parti. Le cose ovviamente cambiano se valgono le ulteriori condizioni (1.51) ed è allora facile provare la stima (1.52). ■

Le condizioni di regolarità della funzione $f(x)$ in I possono essere attenuate senza perdere molto nella decrescita dei coefficienti b_n . Vale, per esempio, la seguente proposizione.

Proposizione 1.4 *Supponiamo che esista un numero finito di punti a_i , $i = 1, \dots, m$, con $0 \equiv a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m < L \equiv a_{m+1}$, tali che $f(x)$ è continua in $I = [0, L]$ e di classe \mathbf{C}^2 negli intervalli chiusi $I_i = [a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \dots, m$. Supponiamo infine che $f(0) = f(L) = 0$. Allora, se la successione b_n è definita come nella (1.48), si ha*

$$|b_n| \leq \frac{A}{n^2}, \quad A = 2 \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \max_i [\|f^{(1)}\|_\infty^{(i)} + \|f^{(2)}\|_\infty^{(i)}] \tag{1.54}$$

dove si è indicato con $\|f^{(k)}\|_\infty^{(i)}$ il massimo di $|f^{(k)}(x)|$ in I_i .

Dim. - Supponiamo, per semplicità, che $m = 1$; la dimostrazione si estende facilmente al caso generale. Per ipotesi, la funzione $f(x)$, pur potendo non essere differenziabile nel punto a_1 , è di classe \mathbf{C}^2 sia in $[0, a_1]$ che in $[a_1, L]$. Pertanto, se riscriviamo la (1.48) nella forma

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{a_1} dx f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) + \frac{2}{L} \int_{a_1}^L dx f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

possiamo operare una integrazione per parti in ambedue gli integrali. Usando il fatto che $f(x)$ è continua in a_1 e nulla in 0 e L , è facile vedere che i termini di bordo, pur non essendo nulli, si cancellano, per cui

$$b_n = \frac{2}{L} \left[\frac{L}{\pi n} \right] \int_0^{a_1} dx f^{(1)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) + \frac{2}{L} \left[\frac{L}{\pi n} \right] \int_{a_1}^L dx f^{(1)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Operando una seconda integrazione per parti, si ottiene allora la (1.54). ■

1.4.2 Serie di soli coseni

Data una funzione $f(x)$ definita in $I = [0, L]$, costruiamo una funzione $\bar{f}(x)$ definita in $\bar{I} = [-L, L]$, ponendo

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } 0 \leq x < L \\ f(-x) & \text{if } -L \leq x < 0 \end{cases} \quad (1.55)$$

Questa funzione è pari, per cui la sua serie di Fourier è una serie di soli coseni, cioè una serie della forma (1.41), con $2L$ al posto di L , vale a dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.56)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.57)$$

Contrariamente a quanto succedeva nel caso precedente, ora $\bar{f}(x)$ è continua in tutto \mathbb{R} , se $f(x)$ è continua in I , in quanto $\bar{f}(-L) = \bar{f}(L)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \bar{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \bar{f}(x)$. Può tuttavia succedere che ci sia una discontinuità in $x = 0$ della derivata prima, anche se $f(x)$ è di classe \mathbf{C}^1 in I . Condizione necessaria perché ciò non succeda è che $f'(0) = f'(L) = 0$; in tal caso, come prima, possiamo anzi dimostrare che la regolarità di $f(x)$ pone delle buone proprietà di decrescita per i coefficienti di Fourier, migliori di quelle precedenti.

Proposizione 1.5 *Se la funzione $f(x)$ è di classe \mathbf{C}^k in $I = [0, L]$, con $k \geq 4$, e soddisfa le condizioni $f'(0) = f'(L) = 0$, allora, se la successione a_n è definita come nella (1.57), si ha*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.58)$$

la convergenza essendo uniforme in I . Inoltre

$$|a_n| \leq 2 \frac{L^3}{(\pi n)^4} [\|f^{(3)}\|_\infty + \|f^{(4)}\|_\infty] \quad (1.59)$$

per cui la serie (1.58) è derivabile due volte termine a termine.

Se si aggiungono le ulteriori condizioni

$$f^{(2j+1)}(0) = f^{(2j+1)}(L) = 0, \quad 0 < 2j + 1 \leq k - 1 \quad (1.60)$$

allora

$$|a_n| \leq 2 \frac{L^{k-1}}{(\pi n)^k} \|f^{(k)}\|_\infty \quad (1.61)$$

per cui la serie (1.58) è derivabile termine a termine $k - 2$ volte.

Dim. - La dimostrazione è simile a quella della Prop. 1.3. Tuttavia, in questo caso, è possibile fare 3 integrazioni per parti, anziché 2, prima che compaia un termine di bordo non necessariamente nullo, sotto le sole condizioni $f'(0) = f'(L) = 0$. ■

Come nel caso della serie di soli seni, anche se si attenuano le condizioni di regolarità della funzione, fino ad ammettere che ci sia un numero finito di discontinuità di prima specie nelle derivate prime e seconde, ma non nella funzione stessa, si possono ancora trovare delle buone proprietà di decrescita dei coefficienti a_n . Procedendo come nella dimostrazione della Prop. 1.4, si trova che $|a_n| \leq A/n^2$, con una costante A che dipende dalla funzione.

2 L'equazione del calore in un intervallo

2.1 Condizioni di Dirichlet

Cominciamo con il considerare il problema omogeneo.

Proposizione 2.1 *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad (2.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x) \quad (2.3)$$

Se la funzione $f(x)$ soddisfa le condizioni della Prop. 1.4 (per cui, in particolare, $f(0) = f(L) = 0$), allora esiste una soluzione della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-dn^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right), \quad d = D \frac{\pi^2}{L^2} \quad (2.4)$$

dove le costanti b_n sono definite come nella (1.48).

Se invece $f(x)$ non soddisfa la condizione al contorno (2.2), ma è \mathbf{C}^1 a tratti (per cui la sua serie di Fourier è convergente), o anche solo una funzione in $\mathbf{L}^2([0, L])$ (per cui la sua serie di Fourier può non convergere in nessun punto, anche se la funzione è continua), allora la (2.3) deve essere sostituita in generale dalla condizione iniziale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L dx |u(x, t) - f(x)|^2 = 0 \quad (2.5)$$

La condizione (2.3) è comunque sempre verificata nei punti di continuità.

Dim. - La dimostrazione è basata sul *metodo di separazione delle variabili*, che consiste nel cercare inizialmente delle soluzioni della (2.1) a *variabili separate*, cioè della forma $u(x, t) = v(t)h(x)$, che soddisfano le condizioni al bordo (2.2). Sostituendo nella (2.1), troviamo che

$$\dot{v}(t)h(x) = Dv(t)h''(x) \Rightarrow \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = D \frac{h''(x)}{h(x)} \quad (2.6)$$

Il fatto che la seconda identità debba essere valida per tutti i valori di t e x per cui ha senso ($v(t) \neq 0$ e $h(x) \neq 0$), implica che deve esistere una costante λ tale che

$$\dot{v}(t) = D\lambda v(t) \quad (2.7)$$

$$h''(x) = \lambda h(x) \quad (2.8)$$

La condizione (2.2) coinvolge solo la funzione $h(x)$ ed impone che

$$h(0) = h(L) = 0 \quad (2.9)$$

Si tratta quindi di un problema simile al problema della ricerca degli autovalori e degli autovettori di una matrice; ci si aspetta quindi che λ non possa assumere un valore arbitrario. I valori di λ per cui la (2.8) ha soluzioni non nulle (a valori complessi) che soddisfano le (2.9) si dicono *autovalori dell'operatore derivata seconda nell'intervallo $(0, L)$ con condizioni di Dirichlet al bordo* e le soluzioni corrispondenti, definite ovviamente a meno di una costante arbitraria, *autofunzioni*.

Vogliamo ora far vedere che l'insieme degli autovalori è un insieme discreto di numeri reali negativi e che la costante arbitraria può essere scelta in modo che le autofunzioni siano reali. Notiamo che la soluzione generale, nel campo complesso, dell'equazione $h''(x) = \lambda h(x)$ è della forma

$$h(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}, \quad \mu = \sqrt{\lambda} \quad (2.10)$$

e le condizioni (2.9) impongono che

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Abbiamo quindi un sistema lineare omogeneo nelle incognite A e B , che ammette soluzioni non nulle solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, cioè se

$$e^{-\mu L} - e^{\mu L} = 0 \Rightarrow e^{2\mu L} = 1 \Rightarrow 2\mu L = i2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

ed in tal caso, $A = -B$ e $h(x) = A \sin(\pi n x / L)$. Ne segue che gli autovalori e le autofunzioni possono essere indicizzati con un intero $n \geq 1$ (cambiare n in $-n$ cambia solo segno ad A e, se $n = 0$, $h(x) = 0$) e che, se si sceglie $A = 1$,

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad h_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (2.13)$$

Se si pone $\lambda = \lambda_n$ nella (2.7), si trova che, a meno di una costante, $v(t) = e^{D\lambda_n t}$; quindi abbiamo trovato una famiglia numerabile di soluzioni a variabili separate, che possono scriversi, posto $d = D(\pi/L)^2$,

$$u_n(x, t) = e^{-dn^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n \geq 1 \quad (2.14)$$

Si noti ora che la funzione $u(x, t)$ della (2.4) è della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x, t)$$

Pertanto, se la successione b_n è limitata, essa è una soluzione della (2.1), visto che ciò è vero per le $u_n(x, t)$, in quanto la serie è uniformemente convergente e differenziabile infinite volte termine a termine nell'aperto $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$. Ciò segue subito dall'osservazione che $b_n e^{-dn^2 t}$ decresce più rapidamente di ogni potenza per $|n| \rightarrow \infty$, per ogni $t > 0$. D'altra parte, come abbiamo notato nel §1, dopo la (1.6), la successione b_n è limitata sotto la sola condizione che $f(x) \in \mathbf{L}^2([0, L])$; quindi il solo problema riguarda il modo in cui viene soddisfatta la condizione iniziale.

Facciamo innanzi tutto vedere che la condizione (2.5), cioè la *convergenza in media quadratica al dato iniziale*, è sempre soddisfatta. Si noti che $u(x, t)$ e $f(x)$ sono, come funzioni di x , serie di soli seni, quindi sono le restrizioni all'intervallo $[0, L]$ di funzioni periodiche dispari di periodo $2L$; inoltre, per ogni $t > 0$, la funzione $u(x, t) - f(x)$ è una funzione di quadrato sommabile. Si può allora usare l'Identità di Parseval (1.37), applicata alla funzione $u(x, t) - f(x)$, vista come funzione periodica di periodo $2L$; usando la (1.40) (con $2L$ al posto di L), si trova facilmente che

$$\frac{2}{L} \int_0^L dx |u(x, t) - f(x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(e^{-dn^2 t} - 1)|^2 \equiv \Delta(t) \quad (2.15)$$

Per dimostrare la (2.5), dobbiamo pertanto dimostrare che, dato $\varepsilon > 0$, esiste δ_ε tale che $\Delta(t) < \varepsilon$, se $0 < t < \delta_\varepsilon$. Sia pertanto dato $\varepsilon > 0$ e notiamo che, per l'Identità di Parseval applicata a $f(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ è convergente; esiste allora N_ε , tale che

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |b_n(e^{-dn^2 t} - 1)|^2 \leq \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} |b_n|^2 < \varepsilon/2$$

D'altra parte, se $x > 0$, $1 - e^{-x} \leq x$, per cui, posto $A = \max_{n \geq 1} |b_n|$,

$$\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} |b_n(e^{-dn^2 t} - 1)|^2 \leq (dAt)^2 \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} n^4 \leq (dAt)^2 N_\varepsilon^5 < \varepsilon/2$$

se $0 < t < \delta_\varepsilon \equiv (\varepsilon/2)^{1/2} N_\varepsilon^{-5/2} (dA)^{-1}$. Ne segue che $\Delta(t) < \varepsilon$, se $0 < t < \delta_\varepsilon$, come richiesto.

Supponiamo ora che $f(x)$ soddisfi le condizioni della Prop. 1.4. Dalla (1.54) segue allora che esiste una costante A tale che $|b_n| \leq A/n^2$; pertanto

$$|u(x, t) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(e^{-dn^2 t} - 1)| \leq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - e^{-dn^2 t}) \equiv \Delta_1(t)$$

ed è facile dimostrare, procedendo come prima, che $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Delta_1(t) = 0$. Di qui segue subito che $u(x, t) - f(x) \rightarrow 0$, per $t \rightarrow 0^+$, e che anzi la convergenza è uniforme in $x \in [0, L]$.

La dimostrazione che la convergenza puntuale (2.3) è in ogni caso soddisfatta in tutti i punti di continuità è un corollario della soluzione dell'equazione del calore in \mathbb{R}^n , discussa nell'esempio 3.1 del §3.5, vedi il commento che segue la Prop. 3.14. ■

Passiamo ora a studiare il problema non omogeneo. Un ruolo essenziale avrà l'uso del cosiddetto *Metodo di Duhamel*, che conviene illustrare nel caso dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine, cioè dei sistemi della forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.16)$$

dove A è una matrice $n \times n$, mentre $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ sono vettori in \mathbb{C}^n . Come è ben noto, dati comunque \mathbf{x}_0 e la funzione $\mathbf{f}(t)$ di classe \mathbf{C}^1 , questo sistema ammette una ed una sola soluzione. Vogliamo fare vedere che la soluzione può scriversi nella forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0 + \int_0^t ds e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) \quad (2.17)$$

se definiamo, come è usuale, $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ per cui, in particolare,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{t^{n-1}}{n!} A^n = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = A e^{tA}$$

Pertanto, se deriviamo rispetto a t ambedue i membri della (2.17), otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A e^{tA} \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(t) + \int_0^t ds \frac{d}{dt} e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) \\ &= A \left[e^{tA} \mathbf{x}_0 + \int_0^t ds e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) \right] + \mathbf{f}(t) = A \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \end{aligned}$$

Il fatto che $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ è evidente, quindi la (2.17) è effettivamente la soluzione della (2.16).

Si noti anche che un teorema ben noto garantisce che la soluzione possa scriversi come la somma di una soluzione dell'equazione omogenea, cioè una funzione della forma $e^{tA} \mathbf{x}_1$, più una soluzione particolare. La (2.17) fa vedere che è possibile trovare una soluzione particolare che si annulla per $t = 0$, così che, in particolare, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0$. Questa soluzione si ottiene integrando rispetto ad s la soluzione del problema omogeneo, dipendente dal parametro $s \in [0, t]$,

$$\dot{\mathbf{w}}(t, s) = A \mathbf{w}(t, s), \quad \mathbf{w}(s, s) = \mathbf{f}(s) \quad (2.18)$$

la cui soluzione è appunto $e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s)$.

La possibilità di applicare il metodo di Duhamel all'equazione del calore segue dall'osservazione che, nella discussione precedente, ciò che contava era solo il fatto che $\frac{d}{dt}e^{tA}\mathbf{x}_0 = Ae^{tA}\mathbf{x}_0$, non la definizione esplicita dell'operatore lineare e^{tA} in funzione di A . Consideriamo allora lo spazio \mathfrak{F}_0 delle funzioni della variabile reale $x \in [0, L]$, di classe C^2 e nulle al bordo ed indichiamo con Δ_0 l'operatore "derivata seconda". Definiamo poi formalmente l'operatore $e^{t\Delta_0}$ come l'operatore lineare definito così che, se $t > 0$ e $f \in \mathfrak{F}_0$,

$$[e^{t\Delta_0}f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-dn^2t} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (2.19)$$

dove b_n sono i coefficienti dello sviluppo di $f(x)$ come serie di seni. La Prop. 2.1 ci dice allora che la funzione $[e^{t\Delta_0}f](x)$ sta in \mathfrak{F}_0 per ogni $t > 0$, è derivabile rispetto a t e

$$\frac{d}{dt}e^{t\Delta_0}f = \Delta_0 e^{t\Delta_0}f \quad (2.20)$$

Si noti che la Prop. 2.1 ci dice che questo risultato è vero anche sotto l'ipotesi più debole che $f(x)$ soddisfi le ipotesi della Prop. 1.4.

Proposizione 2.2 *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \quad (2.21)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.22)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \varphi(x) \quad (2.23)$$

Se le funzioni $\varphi(x)$ e $f(x, s)$, $s \geq 0$, soddisfano le condizioni della Prop. 1.4 e $f(x, s)$ è anche continua come funzione di s per $s \geq 0$, così come le sue derivate prima e seconda rispetto a x in ognuno degli intervalli I_i definiti nella Prop. 1.4, allora esiste una soluzione della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n e^{-dn^2t} + \int_0^t ds e^{-dn^2(t-s)} b_n(s) \right] \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (2.24)$$

dove le costanti a_n e $b_n(s)$ sono definite come nella (1.48), sostituendo $\varphi(x)$ e $f(x, s)$ al posto di $f(x)$, e d è definito come nella (2.4).

Dim. - Se indichiamo con $\mathbf{u}(t)$ la funzione $u(x, t)$, con $\mathbf{f}(t)$ la funzione $f(x, t)$ e con $\boldsymbol{\varphi}$ la funzione $\varphi(x)$, allora ci aspettiamo che la soluzione del problema possa scriversi nella forma, simile alla (2.17),

$$\mathbf{u}(t) = e^{t\Delta_0}\boldsymbol{\varphi} + \int_0^t ds e^{(t-s)\Delta_0}\mathbf{f}(s) \quad (2.25)$$

Per dimostrarlo, dobbiamo solo verificare che effettivamente il membro di destra della (2.25) sta in \mathfrak{F}_0 ed è derivabile in t , per $t > 0$. Poiché già sappiamo che questo è vero per $e^{t\Delta_0}\varphi$, ci rimane da verificare che $\tilde{u}(x, t) \equiv \int_0^t ds e^{(t-s)\Delta_0} \mathbf{f}(s)$ è ben definito e ha le stesse proprietà. Si noti che, per la (2.19),

$$e^{(t-s)\Delta_0} \mathbf{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(s) e^{-dn^2(t-s)} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (2.26)$$

e che questa serie converge uniformemente in $s \in [0, t]$, in quanto, per la (1.54) e le ipotesi di regolarità su $f(x, s)$,

$$|b_n(s)| \leq \frac{4L}{(\pi n)^2} \max_{0 \leq s \leq t} \max_{0 \leq x \leq L} [|f^{(1)}(x, s)| + |f^{(2)}(x, s)|] \equiv \frac{A(t)}{n^2} \quad (2.27)$$

e, se $s \in [0, t]$, $|e^{-dn^2(t-s)} \sin(\pi n x/L)| \leq 1$. Pertanto si può scambiare l'integrale con la serie nella (2.25). e

$$\tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad c_n(t) = \int_0^t ds e^{-dn^2(t-s)} b_n(s) \quad (2.28)$$

Inoltre, per la (2.27),

$$|c_n(t)| \leq \frac{A(t)}{n^2} \int_0^t ds e^{-dn^2(t-s)} \leq \frac{A(t)}{dn^4}$$

Ne segue facilmente che $\tilde{u}(x, t)$ è derivabile due volte rispetto a x in $(0, \pi)$ e una volta rispetto a t in $(0, \infty)$. La (2.24) è, a questo punto, una semplice riscrittura della (2.17) e della (2.19). ■

Osservazione 1 - Si noti che, se $\varphi(x)$ è di classe \mathbf{C}^2 , ma non soddisfa le condizioni al bordo, o addirittura di classe \mathbf{C}^1 a tratti, allora, come nella Prop. 2.1, la condizione iniziale è soddisfatta solo in media quadratica. Le condizioni di regolarità in x del termine di sorgente $f(x, t)$ possono invece essere attenuate senza modificare il risultato, pur di rinforzare le ipotesi di regolarità in t . Per esempio, se $f(x, t)$ è di classe \mathbf{C}^1 come funzione di x e t , ma non soddisfa le condizioni al bordo, possiamo procedere nel modo seguente.

Notiamo innanzi tutto che, procedendo come nella dimostrazione della (1.54), si può vedere che esiste una funzione continua $A(t)$, tale che, se $s, s_1, s_2 \in [0, t]$,

$$|b_n(s)| \leq \frac{A(t)}{n}, \quad |b_n(s_1) - b_n(s_2)| \leq \frac{A(t)}{n} |s_1 - s_2| \quad (2.29)$$

Siamo pertanto in grado di dimostrare che la serie nella (2.26) converge uniformemente in s solo se $s \in [0, t - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, anche se la convergenza è

assicurata anche per $s = t$, in quanto allora la serie in questione è la serie di Fourier di $f(x, s)$. Queste proprietà non sono sufficienti a ripetere gli argomenti usati nella dimostrazione precedente. Tuttavia, per dimostrare la (2.24), è sufficiente dimostrare che la serie nel membro di destra è ben definita ed è derivabile termine a termine una volta rispetto a t e due volte rispetto ad x , se $t > 0$ e $x \in (0, L)$. Poiché questo è banale per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-dn^2 t} \sin(\frac{\pi n}{L} x)$, basta dimostrarlo per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$, con i coefficienti $c_n(t)$ definiti come nella (2.28). Notiamo innanzi tutto che questa serie è uniformemente convergente per $(x, t) \in [0, L] \times [t_1, t_2]$, se $0 < t_1 < t_2$, in quanto, per la (2.29),

$$|c_n(t)| \leq \frac{A(t)}{n} \int_0^t ds e^{-dn^2(t-s)} \leq \frac{A(t)}{dn^3}$$

e questa stima implica anche che la serie è derivabile termine a termine una volta rispetto a x , sempre per $(x, t) \in [0, L] \times [t_1, t_2]$.

Notiamo ora che

$$\begin{aligned} c'_n(t) &= b_n(t) - dn^2 \int_0^t ds e^{-dn^2(t-s)} b_n(s) = \\ &= b_n(t) - dn^2 \int_0^t ds e^{-dn^2(t-s)} [b_n(t) + b_n(s) - b_n(t)] = \\ &= b_n(t) - dn^2 b_n(t) \frac{1 - e^{-dn^2 t}}{dn^2} + \delta_n(t) = b_n(t) e^{-dn^2 t} + \delta_n(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

e che, per la (2.29),

$$|\delta_n(t)| \leq dn^2 \int_0^t ds e^{-dn^2(t-s)} |b_n(s) - b_n(t)| \leq \frac{A(t)}{dn^3} \int_0^{\infty} ds s e^{-s}$$

Di qui segue subito che la serie che definisce $\tilde{u}(x, t)$ è derivabile termine a termine una volta rispetto a t , per $t > 0$. Ci rimane da studiare le serie delle derivate seconde rispetto a x , per $0 < x < L$, cioè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\pi n/L)^2 c_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$. Notiamo che dalla (2.30) segue che $dn^2 c_n(t) = b_n(t) - c'_n(t)$ e che, se $x \in (0, L)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$ converge uniformemente in un intorno chiuso di x abbastanza piccolo da non contenere 0 o L , se $t > 0$, per il teorema 1.2. Ne segue che $\tilde{u}(x, t)$ è derivabile termine a termine due volte rispetto a x , se $x \in (0, L)$ e $t > 0$, visto che abbiamo già dimostrato che ciò è vero per la derivata prima. ■

Osservazione 2 - Se, nella Prop. 2.2, sostituiamo le condizioni al bordo nulle con le condizioni

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t) \quad (2.31)$$

con $h_1(t)$ e $h_2(t)$ funzioni date di classe \mathbf{C}^1 per $t \geq 0$, la soluzione del problema può ridursi facilmente al problema con condizioni al bordo nulle. Basta definire la funzione $v(x, t)$, così che

$$u(x, t) = h_1(t) + \frac{x}{L}[h_2(t) - h_1(t)] + v(x, t) \quad (2.32)$$

Si vede subito che $v(0, t) = v(L, t) = 0$ e che

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + \tilde{f}(x, t) \quad (2.33)$$

con

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - \dot{h}_1(t) - \frac{x}{L}[\dot{h}_2(t) - \dot{h}_1(t)] \quad (2.34)$$

Infine

$$v(x, 0) = u(x, 0) - h_1(0) - \frac{x}{L}[h_2(0) - h_1(0)]$$

2.2 Condizioni di Neumann

Proposizione 2.3 *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.36)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \varphi(x) \quad (2.37)$$

Se le funzioni $\varphi(x)$ e $f(x, s)$, $s \geq 0$, soddisfano le condizioni della Prop. 1.5, allora esiste una soluzione della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n e^{-dn^2 t} + \int_0^t ds e^{-dn^2(t-s)} b_n(s) \right] \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad (2.38)$$

dove le costanti a_n e $b_n(s)$ sono definite come nella (1.57), sostituendo $\varphi(x)$ e $f(x, s)$ al posto di $f(x)$.

Dim. - Si procede come nel caso delle condizioni di Dirichlet. Il punto di partenza è la ricerca delle autofunzioni, cioè delle soluzioni non nulle dell'equazione (2.8), questa volta però con condizioni al bordo

$$h'(0) = h'(L) = 0 \quad (2.39)$$

e dei corrispondenti autovalori. Procedendo come nella Prop. 2.1, si trova che

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad h_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n \geq 0 \quad (2.40)$$

Si ritrovano quindi gli autovalori precedenti, per $n \geq 1$, ma ora c'è un autovalore in più, $\lambda_0 = 0$, cui corrisponde un'autofunzione costante. Ne segue che la soluzione può scriversi come una serie di soli coseni e, procedendo come nella Prop. 2.1 e nella Prop. 2.2, si arriva alla (2.38), usando i risultati del §1.4.2. Omettiamo i dettagli. ■

2.3 Condizioni al bordo miste

I problemi considerati nei paragrafi precedenti sono dei casi particolari di una classe di problemi più generale, in cui, in ognuno degli estremi dell'intervallo $[0, L]$, è soddisfatta una fra tre condizioni, cioè la condizione di Dirichlet $u = 0$, la condizione di Neumann $u_x = 0$ o la *condizione di Robin*:

$$u_x(\bar{x}, t) = \begin{cases} -\alpha u(\bar{x}, t) & \text{if } \bar{x} = L \\ \alpha u(\bar{x}, t) & \text{if } \bar{x} = 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (2.41)$$

Si tratta di 9 problemi differenti, che possiamo distinguere con una coppia di indici $\gamma = (\gamma_0, \gamma_L)$, con $\gamma_{\bar{x}} \in \{D, N, R\}$, dove D , N e R indicano condizioni di Dirichlet, Neumann o Robin nulle. La soluzione di questi problemi, se esiste, è unica, se si richiede anche la condizione iniziale nella forma (2.5); l'unicità è anzi vera anche per il problema non omogeneo $u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + f(x, t)$, con condizioni al bordo non nulle. La dimostrazione può trovarsi in [4], par. 2.2 del cap. 2.

Consideriamo ora il problema dell'esistenza nel caso omogeneo con condizioni al bordo nulle; il caso generale si riduce a questo, usando il metodo di Duhamel e una facile generalizzazione dell'Osservazione 2 del par. 2.1. Basta porre $u(x, t) = \bar{u}(x, t) + v(x, t)$, con $\bar{u}(x, t)$ che soddisfa le condizioni al bordo non nulle; in tal modo $v(x, t)$ soddisfa condizioni al bordo nulle e l'equazione $v_t(x, t) = Dv_{xx}(x, t) + f(x, t) - \bar{u}_t - D\bar{u}_{xx}$. È facile verificare che la funzione $\bar{u}(x, t)$ può essere scelta della forma $a(t) + b(t)x$ per tutte le condizioni al contorno, eccetto che per $\gamma = (N, N)$, dove tuttavia la si può scegliere della forma $a(t)x + b(t)x^2$.

Il problema omogeneo può essere affrontato con il metodo di separazione delle variabili, il quale permette di individuare una larga classe di soluzioni scritte come serie di funzioni della forma $u(x, t) = e^{\lambda t}h(x)$, dove $h(x)$ è una autofunzione del Laplaciano con autovalore λ . Ciò segue dall'argomento usato nella dimostrazione della Prop. 2.1 e dalla proposizione seguente:

Proposizione 2.4 *Per ogni scelta γ delle condizioni al bordo, esiste una successione di funzioni reali $\chi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, non identicamente nulle, di classe*

$\mathbf{C}^2([0, L])$, soddisfacenti le condizioni al bordo γ e definite a meno del segno, ed una successione di numeri reali λ_n , tali che

$$\begin{aligned} \Delta\chi_n &:= \chi_n'' = \lambda_n\chi_n(x), & (\chi_n, \chi_m) &= \delta_{n,m} \\ \lambda_n &\leq 0, & \lambda_n &< \lambda_m, \text{ se } n > m, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2\lambda_n}{\pi^2 n^2} &= -1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

dove (\cdot, \cdot) indica il prodotto scalare in $\mathbf{L}^2([0, L])$. Inoltre $\lambda_1 < 0$, eccetto che nel caso di condizioni di Neumann sia in 0 che in L .

Dim. - Cominciamo con l'osservare che gli elementi di $\mathbf{C}^2([0, L])$ che soddisfano le condizioni al bordo γ sono un sottospazio lineare denso M^γ di $\mathbf{L}^2((0, L))$; ciò segue dal Teorema A.1 e dal fatto che $\mathcal{D}((0, L)) \in M^\gamma$. M^γ è quindi uno spazio a prodotto interno (non completo) e, se $u, v \in M^\gamma$,

$$\begin{aligned} (v, \Delta u) &= \int_0^L dx v^*(x) u''(x) = - \int_0^L dx v'^*(x) u'(x) + v^*(x) u'(x) \Big|_0^L \\ &= (\Delta v, u) + [v^*(x) u'(x) - v'^*(x) u(x)] \Big|_0^L = (\Delta v, u) \end{aligned} \quad (2.43)$$

avendo usato, nell'ultimo passaggio, il fatto che, se $\gamma_{\bar{x}}$ è uguale a D o N , allora ambedue i termini all'interno della parentesi quadra sono nulli, mentre, se $\gamma_{\bar{x}} = R$, $v^*(\bar{x})u'(\bar{x}) - v'^*(\bar{x})u(\bar{x}) = \pm\alpha[v^*(\bar{x})u(\bar{x}) - v^*(\bar{x})u(\bar{x})] = 0$. Di qui segue, usando la Prop. A.2, che M^γ contiene un sistema ortonormale di autofunzioni con autovalori reali, se dimostriamo che gli autovalori hanno tutti molteplicità finita. Inoltre possiamo sempre scegliere (come faremo da ora in poi) le autofunzioni come funzioni reali, in quanto, se $\Delta\chi = \lambda\chi$, anche $\Re\chi$ e $\Im\chi$ sono autofunzioni con autovalore λ ; a questo punto, se richiediamo che le autofunzioni abbiano norma 1, esse saranno univocamente definite, a meno del segno.

Nei casi $\gamma = (D, D)$ e $\gamma = (N, N)$ abbiamo già visto che gli autovalori sono tutti semplici e non positivi ed anzi, se $\gamma = (D, D)$, sono negativi. Gli autovalori in realtà sono tutti negativi anche negli altri casi, in quanto, se $\Delta\chi = \lambda\chi$ e $\|\chi\| = 1$, allora

$$\lambda = (\chi, \Delta\chi) = \int_0^L dx \chi(x) \chi''(x) = - \int_0^L dx |\chi'(x)|^2 + \chi(L)\chi'(L) - \chi(0)\chi'(0)$$

Pertanto, se γ_0 e γ_L sono uguali a D o N , gli ultimi due termini dell'equazione precedente sono nulli, per cui $\lambda < 0$ eccetto che nel caso in cui $\chi'(x) = 0$, cioè $\chi(x)$ è uguale ad una costante non nulla (altrimenti $\chi(x) = 0$, che non è permesso). Ne segue subito che $\lambda = 0$ non può essere un autovalore, se $\gamma_{\bar{x}} = D$ in $\bar{x} = 0$ o $\bar{x} = L$. Lo stesso è vero anche se $\gamma_{\bar{x}} = R$. Infatti, se $\gamma_L = R$, per la (2.41), $\chi(L)\chi'(L) = -\alpha\chi(L)^2$, mentre, se $\gamma_0 = R$, $-\chi(0)\chi'(0) = -\alpha\chi(0)^2$; pertanto $\lambda = 0$ non può essere un autovalore, perché altrimenti

$\chi(x)$ dovrebbe essere costante e nulla in almeno uno degli estremi di $[0, L]$, il che è incompatibile con la condizione $\chi(x) \neq 0$.

Ci rimane da far vedere che gli autovalori sono semplici e che formano una successione monotona decrescente λ_n , che è asintoticamente equivalente a $-(\pi n/L)^2$. Nei casi $\gamma = (D, D)$ e $\gamma = (N, N)$ abbiamo già visto che questo è vero e che anzi $\lambda_n = -(\pi n/L)^2$. Consideriamo ora altri due casi, lasciando al lettore gli altri.

Supponiamo che $\gamma = (D, N)$ e, in accordo con la discussione precedente, poniamo $\lambda = -\mu^2$, con $\mu > 0$. Dobbiamo trovare le funzioni a valori reali $\chi(x)$, tali che $\chi''(x) + \mu^2\chi(x) = 0$, con $\chi(0) = 0$ e $\chi'(L) = 0$. Queste funzioni devono essere della forma $\chi(x) = A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x)$, con $\chi(0) = B = 0$ e $\chi'(L) = A\mu \cos(\mu L) = 0$. Poiché $A\mu$ non può annullarsi, troviamo la condizione $\cos(\mu L) = 0$, equivalente, poiché $\mu > 0$, a $\mu = \frac{\pi}{2L}(2n - 1)$, $n \geq 1$; quindi

$$\chi_n(x) = A_n \sin \left[\frac{\pi}{2L}(2n - 1)x \right], \quad \lambda_n = - \left[\frac{\pi}{L}(n - \frac{1}{2}) \right]^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} - \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2$$

La costante A_n è determinata, a meno del segno, dalla condizione $\|\chi_n\| = 1$; si vede facilmente che $A_n^2 = 2/L$.

Consideriamo ora il caso $\gamma = (R, R)$; come prima possiamo porre $\lambda = -\mu^2$, con $\mu > 0$ e $\chi(x) = A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x)$. Le condizioni al bordo sono ora ($\alpha > 0$):

$$\chi'(L) + \alpha\chi(L) = 0, \quad -\chi'(0) + \alpha\chi(0) = 0$$

Si vede facilmente che queste condizioni sono equivalenti al seguente sistema lineare omogeneo nelle incognite A e B :

$$\begin{pmatrix} \mu \cos(\mu L) + \alpha \sin(\mu L) & -\mu \sin(\mu L) + \alpha \cos(\mu L) \\ -\mu & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Questo sistema ammette soluzioni non nulle se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, cioè se

$$(\alpha^2 - \mu^2) \sin(\mu L) + 2\alpha\mu \cos(\mu L) = 0 \quad (2.45)$$

Si tratta di un'equazione trascendente, che non può risolversi esattamente; tuttavia, non è difficile dimostrare che essa ammette un'infinità numerabile di soluzioni, rappresentata da una successione crescente μ_n , che è asintotica a $\pi n/L$. Cominciamo con l'osservare che $\mu = \alpha$ è una soluzione se e solo se $\cos(\alpha L) = 0$, cioè $\alpha = \alpha_k := \frac{\pi}{2L}(2k + 1)$ per qualche intero $k \geq 0$. Pertanto, se $\alpha \neq \alpha_k$, per ogni k , la (2.45) può scriversi nella forma

$$\tan(\mu L) = \frac{2\alpha\mu}{\mu^2 - \alpha^2} \quad (2.46)$$

Se $\alpha = \alpha_k$ per qualche k , alle soluzioni della (2.46) bisogna aggiungere $\mu = \alpha_k$.

Le soluzioni della (2.46) si possono caratterizzare geometricamente come le intersezioni dei grafici delle due funzioni $\tan(\mu L)$ e $\frac{2\alpha\mu}{\mu^2 - \alpha^2}$, vedi Fig. 1, dove si è posto $L = 1$ e $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$. È evidente dal grafico che le soluzioni

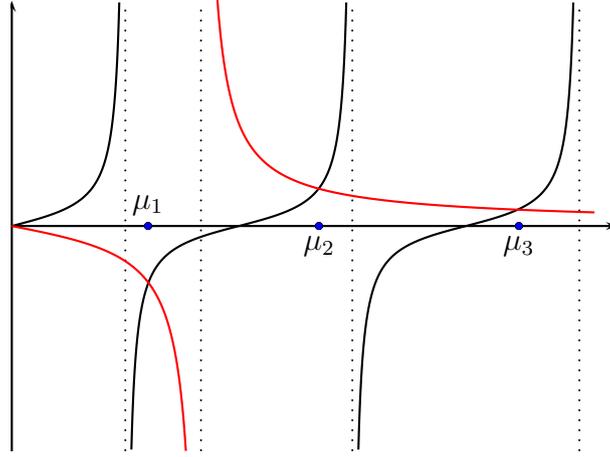


Figura 1: Prime 3 soluzioni della (2.46).

sono infinite e che, se le indichiamo con una successione crescente μ_n , $n \geq 1$, l'intersezione corrispondente a μ_n coincide asintoticamente con l'intersezione con l'asse μ della funzione $\tan(\mu L)$; pertanto $\mu_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \pi n/L$, in accordo con la (2.42), poiché $\lambda_n = -\mu_n^2$.

L'autofunzione corrispondente all'autovalore λ_n , per la (2.44), deve essere della forma

$$\chi_n(x) = A_n \sin(\mu_n x) + B_n \cos(\mu_n x), \quad -\mu_n A_n + \alpha B_n = 0 \quad (2.47)$$

La funzione è pertanto determinata a meno del segno (gli autovalori sono pertanto tutti semplici), se si impone la condizione di normalizzazione $\|\chi_n\| = 1$, cioè

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^L dx [A_n \sin(\mu_n x) + B_n \cos(\mu_n x)]^2 = \\ &= \int_0^L dx \left[A_n^2 \frac{1 - \cos(2\mu_n x)}{2} + B_n^2 \frac{1 + \cos(2\mu_n x)}{2} + A_n B_n \sin(2\mu_n x) \right] \quad (2.48) \\ &= \frac{L}{2} (A_n^2 + B_n^2) + \frac{B_n^2 - A_n^2}{4\mu_n} \sin(2\mu_n L) + \frac{A_n B_n}{2\mu_n} [1 - \cos(2\mu_n L)] \\ &= \frac{L}{2} (A_n^2 + B_n^2) + \frac{B_n^2 - A_n^2}{2\mu_n} \sin(\mu_n L) \cos(\mu_n L) + \frac{A_n B_n}{\mu_n} \sin^2(\mu_n L) \end{aligned}$$

Se ora inseriamo nell'ultima riga la condizione $A_n = B_n(\alpha/\mu_n)$, vedi (2.47), e scriviamo $\cos(\mu_n L)$ in funzione di $\sin(\mu_n L)$ usando la (2.45), troviamo con un pò di facili calcoli:

$$B_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \left[1 + \frac{\alpha^2}{\mu_n^2} + \frac{\sin^2(\mu_n L)}{L\mu_n} \frac{(\mu_n^2 + \alpha^2)^2}{2\alpha\mu_n^3} \right]^{-1/2} \quad (2.49)$$

Si noti che, per $n \rightarrow \infty$, $B_n \rightarrow \sqrt{2/L}$, in quanto $\sin(\mu_n L) \rightarrow \sin(\pi n) = 0$, come abbiamo visto prima, e $A_n \rightarrow 0$. ■

Si noti che i calcoli precedenti implicano che la soluzione dell'equazione del calore omogenea con condizioni di Robin nulle e dato iniziale $u(x, 0) = \varphi(x)$, può scriversi nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-D\lambda_n^2 t} [A_n \sin(\mu_n x) + B_n \cos(\mu_n x)], \quad c_n = (\varphi, \chi_n) \quad (2.50)$$

se $\varphi(x)$ può svilupparsi in serie delle funzioni $\chi_n(x)$, almeno nel senso della convergenza in $\mathbf{L}^2([0, L])$. Si può dimostare che ciò è vero per ogni funzione di $\mathbf{L}^2([0, L])$, cioè che le funzioni $\chi_n(x)$ sono una base ortonormale in $\mathbf{L}^2([0, L])$, ma non lo faremo. Si noti che la proprietà analoga per i casi in cui γ_0 e γ_L sono eguali a D o N segue dai teoremi di convergenza della serie di Fourier, se si nota (come abbiamo fatto nei casi $\gamma = (D, D)$ e $\gamma = (N, N)$) che in tali casi le autofunzioni possono essere viste come le restrizioni all'intervallo $[0, L]$ di funzioni periodiche di periodo $2L$, se $\gamma = (D, D)$ e $\gamma = (N, N)$, o $4L$, se $\gamma = (D, N)$ e $\gamma = (N, D)$, con particolari proprietà di simmetria.

3 Trasformata di Fourier

3.1 Funzioni di una variabile: introduzione formale a partire dalla serie di Fourier

Come abbiamo visto nel §1, se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo T abbastanza regolare (almeno \mathbf{C}^1 a tratti), $f(x)$ può svilupparsi in *serie di Fourier*:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{ik_n x}, \quad \hat{f}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-ik_n x} f(x), \quad k_n = \frac{2\pi}{T} n \quad (3.1)$$

la serie essendo convergente nei punti di continuità (uniformemente negli intervalli chiusi in cui è continua).

Supponiamo ora che sia data una funzione $f(x)$ di classe \mathbf{C}^1 , definita sull'asse reale, e indichiamo con $f_T(x)$ la funzione periodica di periodo T (sicuramente \mathbf{C}^1 a tratti) tale che

$$f_T(x) = f(x), \quad x \in [-T/2, T/2] \quad (3.2)$$

Usando la (3.1), possiamo allora scrivere, $\forall x \in [-T/2, T/2]$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{T,n} e^{ik_n x}, \quad \hat{f}_{T,n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-ik_n x} f(x) \quad (3.3)$$

Supponiamo ora che la funzione $f(x)$ sia assolutamente integrabile su tutto l'asse reale; allora è ben definito il limite per $T \rightarrow \infty$ dell'integrale nella seconda delle (3.3), se si sostituisce k_n con un numero reale k fissato. D'altra parte $\Delta k = k_{n+1} - k_n = (2\pi)/T \rightarrow 0$, per $T \rightarrow \infty$; pertanto la serie nella (3.3) può essere pensata formalmente come una somma di Riemann

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta k \hat{f}_T(k_n) e^{ik_n x}, \quad \hat{f}_T(k_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T \hat{f}_{T,n} \quad (3.4)$$

e ci si aspetta che

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (3.5)$$

essendo

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx} \quad (3.6)$$

la *trasformata di Fourier* di f .

La dimostrazione rigorosa della congettura precedente, eventualmente sotto ulteriori ipotesi su f , è abbastanza complicata, ma esiste una trattazione più semplice, che non fa uso dell'analogia con la serie di Fourier.

3.2 Funzioni di una variabile: trattazione rigorosa.

Consideriamo l'insieme delle funzioni a valori complessi, definite su tutto l'asse reale e misurabili secondo Lebesgue, e indichiamo con $\mathbf{C}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle funzioni continue, con $\mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle funzioni continue che vanno a 0 all'infinito, con $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle funzioni limitate e con $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle funzioni sommabili, cioè le funzioni il cui modulo ha integrale di Lebesgue finito su \mathbb{R} .

Poichè $|e^{-ikx}| = 1$, se $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, è definita, $\forall k \in \mathbb{R}$, la trasformata di Fourier (3.6). Vale inoltre la proposizione seguente.

Proposizione 3.1 *Se $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{f} \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$.*

Dim. - Dalla (3.6) segue che

$$\hat{f}(k_1) - \hat{f}(k_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x)(e^{-ik_1x} - e^{-ik_2x}) \quad (3.7)$$

Si noti che l'integrando a secondo membro tende a 0 puntualmente, se $k_1 - k_2 \rightarrow 0$ e che $|f(x)(e^{-ik_1x} - e^{-ik_2x})| \leq 2|f(x)|$; quindi, per il Teorema (della convergenza dominata) di Lebesgue, $\hat{f}(k_1) - \hat{f}(k_2) \rightarrow 0$ se $k_1 - k_2 \rightarrow 0$, cioè $\hat{f}(k)$ è continua in \mathbb{R} (è facile vedere che è anzi uniformemente continua).

Rimane da dimostrare che $|\hat{f}(k)| \rightarrow 0$, se $|k| \rightarrow \infty$. Poiché $e^{-i\pi} = -1$, $\hat{f}(k)$ si può anche scrivere nella forma

$$\hat{f}(k) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{-ik(x+\pi/k)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x - \pi/k)e^{-ikx} \quad (3.8)$$

per cui, sommando membro a membro questa equazione alla (3.6), si trova

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} [f(x) - f(x - \pi/k)]e^{-ikx} \quad (3.9)$$

Se $f(x)$ fosse continua e a supporto compatto (quindi uniformemente continua), potremmo di qui dedurre subito, usando il Teorema di Lebesgue, il risultato. Nel caso generale possiamo procedere nel modo seguente. Dato $\varepsilon > 0$, per il Teorema (A.1), esiste $s(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tale che $\|f - s\|_1 \leq 2\sqrt{2\pi}\varepsilon/3$; pertanto

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k)| &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} [|f(x) - s(x)| + |s(x) - s(x - \pi/k)| + \\ &\quad + |s(x - \pi/k) - f(x - \pi/k)|] \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[2\|f - s\|_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} dx |s(x) - s(x - \pi/k)| \right] \end{aligned}$$

D'altra parte, se $|k| \geq 1$, poiché $s(x)$ ha supporto compatto, esiste R (indipendente da k) tale che $s(x) - s(x - \pi/k) = 0$, se $|x| \geq R$. Pertanto

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k)| &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{|x| \leq R} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} |s(x) - s(x - \pi/k)| \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2R}{2\sqrt{2\pi}} \max_{x \in \mathbb{R}} |s(x) - s(x - \pi/k)| \end{aligned}$$

Poiché $s(x)$ è continua (e quindi uniformemente continua sul suo supporto), esiste M tale che $\max_{x \in \mathbb{R}} |s(x) - s(x - \pi/k)| \leq (2\varepsilon\sqrt{2\pi})/(6R)$, se $|k| \geq M$. Ne segue che $|\hat{f}(k)| \leq \varepsilon$, se $|k| \geq M$. ■

La Prop. 3.1 implica, in particolare, che $\hat{f}(k)$ è limitata, ma non garantisce che sia anche integrabile. Non ci possiamo quindi aspettare che la *formula di inversione* (3.5) sia valida in generale. Supponiamo pertanto che $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ e definiamo la funzione

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (3.10)$$

Ci proponiamo di dimostrare che, in effetti, $g(x) = f(x)$. Tuttavia, poiché $g(x)$ coincide con la trasformata di Fourier di $\hat{f}(k)$ calcolata nel punto $-x$, la Prop. 3.1 implica che $g(x) \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$, per cui bisogna necessariamente aggiungere la condizione che $f(x) \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$.

Cominciamo col notare che, se $\lambda > 0$, la funzione $\hat{f}(k)e^{-\lambda|k|}$, in quanto prodotto di una funzione limitata per una funzione integrabile, è integrabile e che

$$g(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) e^{-\lambda|k|} e^{ikx} \quad (3.11)$$

per il Teorema di Lebesgue. Ben definita e limitata, se $\lambda > 0$, è anche la funzione

$$h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} e^{-\lambda|k|} \quad (3.12)$$

Pertanto, se $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, è ben definita la convoluzione $f * h_\lambda(x) = \int dy f(x-y) h_\lambda(y)$, la quale gode di una importante proprietà, descritta dalla proposizione seguente.

Proposizione 3.2 *Se $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, allora*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \hat{f}(k) e^{-\lambda|k|} \quad (3.13)$$

Dim. - Si osservi che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * h_\lambda(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x-y) h_\lambda(y) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x-y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{iky} e^{-\lambda|k|} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Il fatto che f sia integrabile, al pari di $e^{-\lambda|k|}$, permette (per il Teorema di Fubini) di invertire l'ordine di integrazione nelle variabili y e k , per cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * h_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} e^{-\lambda|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} f(x-y) e^{-iky} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} e^{-\lambda|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} f(y) e^{-iky} \end{aligned} \quad (3.15)$$

da cui segue la (3.13), usando la (3.6). ■

La funzione $h_\lambda(x)$ può essere calcolata esplicitamente. Infatti, poiché $e^{-\lambda|k|}$ è una funzione pari, si può scrivere

$$h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \cos(kx) e^{-\lambda|k|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk e^{-\lambda k} \cos(kx) \quad (3.16)$$

D'altra parte $x^2 \cos(kx) = -d^2/dk^2 \cos(kx)$; pertanto

$$x^2 h_\lambda(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk e^{-\lambda k} \frac{d^2}{dk^2} \cos(kx) \quad (3.17)$$

Le due derivate possono essere trasferite dal coseno sull'esponenziale con due integrazioni per parti. Poiché $d \cos(kx)/dk = 0$ e $\cos(kx) = 1$ in $k = 0$, si trova che

$$x^2 h_\lambda(x) = -\lambda^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk e^{-\lambda k} \cos(kx) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} = -\lambda^2 h_\lambda(x) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (3.18)$$

e quindi che

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{x^2 + \lambda^2} \quad (3.19)$$

Da questa espressione segue in particolare, con un facile calcolo, che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1 \quad (3.20)$$

La (3.20) permette di dimostrare che $(2\pi)^{-1/2} h_\lambda(x)$ è una “delta approssimata” per $\lambda \rightarrow 0^+$, come indicato più precisamente nella proposizione seguente.

Proposizione 3.3 *Se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$, allora*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * h_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} f(x) \quad (3.21)$$

Dim. - Si noti che, grazie alla (3.20),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * h_\lambda(x) - f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy h_\lambda(y) [f(x-y) - f(x)] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} [f(x-\lambda y) - f(x)] \end{aligned} \quad (3.22)$$

D'altra parte, poiché f è continua, $f(x-\lambda y) - f(x) \rightarrow 0$ se $\lambda \rightarrow 0$, per ogni y . Usando anche il fatto che f è limitata, si vede subito, tramite il Teorema di Lebesgue, che il secondo membro della (3.22) tende a 0 per $\lambda \rightarrow 0$. ■

Le considerazioni precedenti permettono di dimostrare facilmente che la trasformata di Fourier può essere vista come una applicazione di $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ in $\mathbf{C}_0(\mathbb{R})$, che indicheremo con \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathbf{C}_0(\mathbb{R}), \quad \mathbf{F}(f) = \hat{f} \quad (3.23)$$

tale che, se si definisce

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) : \hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})\} \quad (3.24)$$

allora \mathbf{F} soddisfa il teorema seguente.

Teorema 3.1 *(Teorema di inversione della trasformata di Fourier)*

\mathbf{F} è un'applicazione iniettiva e suriettiva di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ in sé stesso; inoltre, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, allora

$$f(x) = \mathbf{F}(\hat{f})(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (3.25)$$

Dim. - Notiamo innanzi tutto che, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, allora $\hat{f} \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ (per la Prop. 3.1) e $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ (per definizione); quindi $\mathbf{F}(\hat{f}) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ed è definita la funzione

$$g(x) = \mathbf{F}(\hat{f})(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (3.26)$$

anch'essa in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, sempre per la Prop. 3.1. Inoltre, la Prop. 3.2 e la (3.11) mostrano che

$$g(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * h_\lambda(x) \quad (3.27)$$

e, per la Prop. 3.3, $g(x) = f(x)$, cioè la (3.25), visto che $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$. Di qui segue anche che \mathbf{F} è iniettiva; infatti, se $\mathbf{F}(f_1) = \mathbf{F}(f_2)$, $\mathbf{F}(f_1 - f_2) = 0$ e quindi, per la (3.25), $f_1(x) - f_2(x) = 0$ per ogni x . Il fatto che \mathbf{F} sia suriettiva segue dall'osservazione che, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e si pone $\tilde{f}(x) = \mathbf{F}(f)(-x)$, allora $\tilde{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $f = \mathbf{F}(\tilde{f})$. ■

Notiamo ora che $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma di funzioni e moltiplicazione di una funzione per un numero complesso. Su questo spazio vettoriale possiamo introdurre, in analogia a quanto abbiamo fatto nel §1.2, un prodotto scalare, mediante la definizione

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x) g(x) \quad (3.28)$$

Questa definizione ha certamente senso se f e g sono elementi di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, in quanto, per definizione, $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \subset \mathbf{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ e quindi $fg \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ (fg è il prodotto di una funzione limitata per una funzione assolutamente integrabile, quindi è assolutamente integrabile). Tutto ciò significa che $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ può essere visto come un sottospazio di $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, le cui proprietà sono riportate nell'App. A. Si noti che $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ non solo non coincide con $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ (il che è ovvio), ma non coincide nemmeno con $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$; si consideri per esempio la funzione $f(x) = (1 + |x|)^{-1} \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$, che è di quadrato sommabile, ma non è sommabile. In particolare, $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ non è uno spazio metrico completo. Tuttavia:

Proposizione 3.4 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ è denso in $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

Dim. - Segue dal fatto che lo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ delle funzioni continue a supporto compatto è contenuto in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ e, per il Teorema A.1, è denso in $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. ■

La proposizione seguente mostra che la trasformata di Fourier lascia invariante la struttura di spazio con prodotto scalare di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, per cui, in particolare, \mathbf{F} è una *isometria* di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, cioè $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Proposizione 3.5 Se $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, allora

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) \quad (3.29)$$

Dim. - Basta osservare che, per la (3.25),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x) g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}^*(k) e^{-ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}^*(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} g(x) e^{-ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \hat{f}^*(k) \hat{g}(k) \end{aligned} \quad (3.30)$$

avendo usato il fatto che è possibile invertire l'ordine delle due integrazioni, essendo integrabili assolutamente sia g che \hat{f} che $g\hat{f}$. ■

Questa proprietà e la Prop. 3.4 permettono di estendere la definizione di trasformata di Fourier a tutto $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Data $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, esiste una successione $s_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\|_2 = 0$. Poiché $s_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, esiste $\hat{s}_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e, per la Prop. 3.5, $\|\hat{s}_n - \hat{s}_m\|_2 = \|s_n - s_m\|_2$. Ora, la successione s_n , essendo convergente, è anche una successione di Cauchy; quindi ciò è vero pure per la successione \hat{s}_n , che è quindi convergente in norma, poiché $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ è completo. La funzione $\hat{f} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, tale che $\|\hat{s}_n - \hat{f}\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, è pertanto univocamente definita e si può assumere come definizione di $\mathbf{F}(f)$:

$$\text{Se } f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{F}(\mathbb{R}), \quad \hat{f} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}_n$$

Teorema 3.2 (*Teorema di Plancherel*) Se $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, allora

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) \quad (3.31)$$

Dim. - Per la Prop. 3.4, dati $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, esistono due successioni $u_n, v_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, tali che $f = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ e $g = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ (ovviamente $u_n = f$ e $v_n = g$, se f o g sono in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$). Quindi, per la (A.3),

$$\begin{aligned} |(f, g) - (u_n, v_n)| &= |(f - u_n, g) - (u_n - f, v_n - g) - (f, v_n - g)| \\ &\leq |(f - u_n, g)| + |(u_n - f, v_n - g)| + |(f, v_n - g)| \\ &\leq \|f - u_n\|_2 \|g\|_2 + \|u_n - f\|_2 \|v_n - g\|_2 + \|f\| \|v_n - g\| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Quindi, per la Prop. 3.5 e la definizione di $\mathbf{F}(f)$, $(\hat{f}, \hat{g}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{u}_n, \hat{v}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = (f, g)$. ■

La trasformata di Fourier ha un'altra importante proprietà descritte dalla proposizione seguente.

Proposizione 3.6 Se $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, allora, posto $p = f \cdot g$ e $h = (2\pi)^{-1/2}(f * g)$, $p, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e

$$\hat{p}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\hat{f} * \hat{g})(k), \quad \hat{h}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k) \quad (3.32)$$

Dim. - Come è facile dimostrare, $p, h \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$, per cui \hat{p} e \hat{h} sono ben definite; inoltre

$$\begin{aligned} \hat{p}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x)g(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} e^{isx} \hat{g}(s) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \hat{g}(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(k-s)x} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k-s)\hat{g}(s) \end{aligned} \quad (3.33)$$

da cui segue facilmente che $\hat{p} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. Analogamente

$$\begin{aligned}\hat{h}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} f(x-y)g(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} g(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik(x-y)} f(x-y) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)\end{aligned}\quad (3.34)$$

ed anche $\hat{h} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. Ne segue che $p, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. ▀

Osservazione Questa proposizione non si può estendere a $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, in quanto il prodotto e la convoluzione di due funzioni \mathbf{L}^2 non sono necessariamente \mathbf{L}^2 . Tuttavia, se $f, g \in \mathbf{L}^2$, $p \in \mathbf{L}^1$, per cui \hat{p} è ben definita ed esistono due successioni $f_n \in \mathcal{F}$ e $g_n \in \mathcal{F}$, tali che $\|f_n - f\|_2$ e $\|g_n - g\|_2$ vanno a 0 per $n \rightarrow \infty$. Ne segue che

$$\begin{aligned}\hat{p}(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f_n(x)g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}_n(k-s)\hat{g}_n(s) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k-s)\hat{g}(s)\end{aligned}$$

poiché la norma $\|\cdot\|_2$ è invariante per traslazione e per il fatto che la trasformata di Fourier è un'isometria.

3.3 Funzioni di più variabili.

Il caso di funzioni di più variabili si tratta essenzialmente nello stesso modo. Se $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, è ben definita la trasformata di Fourier

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}} f(x)e^{-ikx} \quad (3.35)$$

dove $x, k \in \mathbb{R}^n$ e $kx = \sum_{i=1}^n k_i x_i$. La Prop. 3.1, se $n > 1$, è ancora valida e si dimostra essenzialmente nello stesso modo.

Proposizione 3.7 *Se $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\hat{f} \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$.*

Dim. - La dimostrazione della continuità si fa esattamente come prima. Per dimostrare che $\hat{f}(k) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ ci si riduce al caso precedente nel modo seguente. Prima si osserva che l'espedito utilizzato nella dimostrazione della Prop. 3.1 può essere usato per dimostrare che $\hat{f}(k) \rightarrow 0$ per $k_i \rightarrow \infty$, per ogni $i = 1, \dots, n$; quindi, dato $\varepsilon > 0$, esiste M_ε tale che, se $\sup_i |k_i| \geq M_\varepsilon$, allora $|\hat{f}(k)| \leq \varepsilon$. Si nota poi che, se $|k| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2} \geq \sqrt{n}M_\varepsilon$, allora $\sup_i |k_i| \geq M_\varepsilon$. ▀

Definiamo ora, se $n > 1$ e h_λ è la funzione definita nella (3.12),

$$h_\lambda^{(n)}(x) = \prod_{i=1}^n h_\lambda(x_i), \quad \lambda > 0 \quad (3.36)$$

è facile verificare che

$$h_\lambda^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} H^{(n)}(\lambda k), \quad H^{(n)}(k) = \prod_{i=1}^n e^{-|k_i|} \quad (3.37)$$

è a questo punto un facile esercizio estendere le Prop. 3.2 e 3.3 al caso attuale.

Proposizione 3.8 *Se $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e $f * h_\lambda^{(n)}$ indica la convoluzione di f e $h_\lambda^{(n)}$,*

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} f * h_\lambda^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} H^{(n)}(\lambda k) \hat{f}(k) \quad (3.38)$$

Proposizione 3.9 *Se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} f * h_\lambda^{(n)}(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} f(x) \quad (3.39)$$

Anche tutte le altre considerazioni del par. 3.2 si estendono facilmente, dopo avere definito

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)\} \quad (3.40)$$

In particolare si estendono in modo ovvio le definizioni di $\mathbf{F}(f)$, la sua estensione a $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, le definizioni di prodotto scalare e di norma, i Teoremi 3.1 e 3.2, le Prop. 3.4 e 3.6.

Teorema 3.3 *(Teorema di inversione della trasformata di Fourier)*

\mathbf{F} è un'applicazione iniettiva e suriettiva di $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ in sé stesso; inoltre, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$f(x) = \mathbf{F}(\hat{f})(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (3.41)$$

Teorema 3.4 *(Teorema di Plancherel) Se $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) \quad (3.42)$$

Proposizione 3.10 $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$

Proposizione 3.11 *Se $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, allora, posto $p = f \cdot g$ e $h = (2\pi)^{-n/2}(f * g)$, $p, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\hat{p}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\hat{f} * \hat{g})(k), \quad \hat{h}(k) = \hat{f}(k) \hat{g}(k) \quad (3.43)$$

3.4 Ulteriori proprietà della Trasformata di Fourier.

Se $f \in \mathbf{C}^N(\mathbb{R}^n)$, lo spazio delle funzioni derivabili con continuità fino all'ordine N , e $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, con $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, e $|\underline{\alpha}| \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq N$, definiamo

$$D^{\underline{\alpha}}f(x) = \frac{\partial^{|\underline{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \quad (3.44)$$

L'utilità della trasformata di Fourier nello studio delle equazioni alle derivate parziali in \mathbb{R}^n è basata sulla proposizione seguente.

Proposizione 3.12 *Se $f \in \mathbf{C}^N(\mathbb{R}^n)$ ed esiste una costante C tale che*

$$|D^{\underline{\alpha}}f(x)| \leq C(1 + |x|^{n+1})^{-1} \quad (3.45)$$

$\forall \underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, con $|\underline{\alpha}| \leq N$, allora, per ogni fissato $\underline{\alpha}$ tale che $|\underline{\alpha}| \leq N$, posto $g_{\underline{\alpha}}(x) = D^{\underline{\alpha}}f(x)$, si ha

$$\hat{g}_{\underline{\alpha}}(k) = (ik_1)^{\alpha_1} \dots (ik_n)^{\alpha_n} \hat{f}(k) \quad (3.46)$$

Dim. - Segue facilmente dalla (3.35), tramite delle integrazioni per parti, grazie alla proprietà (3.45). Consideriamo in dettaglio il caso $|\underline{\alpha}| = 1$; il caso generale si tratta iterando lo stesso argomento.

Se $|\underline{\alpha}| = 1$, non è restrittivo supporre che $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ e $\alpha_n = 1$. La condizione (3.45) garantisce (in modo semplice) che l'integrale che definisce $\hat{g}(k)$ si possa calcolare eseguendo prima l'integrale nella variabile x_n , quindi quello nelle altre variabili. Inoltre, posto $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $\tilde{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) e^{-ikx} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n f(x) \frac{\partial}{\partial x_n} e^{-ikx} + \\ &+ e^{-i\tilde{k}\tilde{x}} \lim_{R \rightarrow \infty} [f(\tilde{x}, R) e^{-ik_n R} - f(\tilde{x}, -R) e^{+ik_n R}] \end{aligned}$$

ed il secondo termine a secondo membro è nullo, grazie sempre alla (3.45) (con $\underline{\alpha} = 0$). Ne segue subito che $\hat{g}_{\underline{\alpha}}(k) = ik_n \hat{f}(k)$. ■

Si noti che la Prop. 3.12 implica anche che esiste una costante C tale che

$$|\hat{f}(k)| \leq C(1 + |k|^N)^{-1} \quad (3.47)$$

Ciò segue facilmente dalla (3.46), dall'osservazione che $g_{\underline{\alpha}}(k)$ è limitata per ogni $\underline{\alpha}$ e dalla disuguaglianza $|k|^N \leq (|k_1| + \dots + |k_n|)^N$.

Un'altra proprietà della Trasformata di Fourier, "simmetrica" della precedente, è descritta dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.13 *Se la funzione $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n)$ e soddisfa la disegualianza*

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|^{n+N+1})^{-1} \quad (3.48)$$

allora $\hat{f} \in \mathbf{C}^N(\mathbb{R}^n)$.

Dim. - Basta dimostrare che, grazie alla condizione (3.48), le derivate rispetto alle variabili k_i di ordine $\leq N$ possono essere scambiate con l'integrale nella definizione (3.35) di $\hat{f}(k)$; omettiamo i dettagli. ■

Osservazione Un corollario delle Prop. 3.12 e 3.13 è che \mathbf{F} è un'applicazione iniettiva e suriettiva dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (definito in App. A) in sé.

3.5 Esempi di soluzione di equazioni alle derivate parziali basate sull'uso della Trasformata di Fourier.

L'uso della trasformata di Fourier permette in molti casi di ridurre la ricerca delle soluzioni di una equazione alle derivate parziali alla soluzione di un problema di equazioni differenziali ordinarie. Facciamo alcuni esempi.

Esempio 3.1 (Equazione del calore in \mathbb{R}^n) *Data una funzione $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si cerca una funzione $u(x, t) \in \mathbf{C}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, tale che*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Il problema può essere affrontato supponendo che esistano soluzioni per cui $u(x, t)$, pensata come funzione solo di x , appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $t > 0$, così che è ben definita la sua trasformata di Fourier e vale la formula di inversione (3.41); la validità di questa ipotesi verrà verificata a posteriori. Possiamo pertanto scrivere

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} \hat{u}(k, t) e^{ikx} \quad (3.50)$$

Per l'osservazione fatta alla fine del §3.4, l'ipotesi su $u(x, t)$ implica che anche $\hat{u}(k, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. È allora facile verificare che $\partial u / \partial t$ possa calcolarsi scambiando la derivata con l'integrale nella (3.50); ne segue che $\mathbf{F}(\partial u / \partial t) = \partial \hat{u} / \partial t$. Inoltre, per la Prop 3.12, $\mathbf{F}(\Delta u) = -k^2 \hat{u}$, per cui, eguagliando le trasformate di Fourier dei due membri dell'equazione (3.49), si trova che la funzione $\hat{u}(k, t)$ deve soddisfare, per ogni k , l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t) \quad (3.51)$$

con condizione iniziale $\hat{u}(k, 0) = \hat{\varphi}(k)$. Ne segue che

$$\hat{u}(k, t) = \hat{\varphi}(k)e^{-k^2 t} \quad (3.52)$$

e questa espressione giustifica le ipotesi fatte per ottenere questo risultato.

Inoltre, per la Prop. 3.11,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} dy G(x - y, t) \varphi(y) \quad (3.53)$$

con

$$G(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^n} e^{-k^2 t} e^{ikx} = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_i}{2\pi} e^{-k_i^2 t} e^{ik_i x_i} \quad (3.54)$$

D'altra parte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_i}{2\pi} e^{-k_i^2 t} e^{ik_i x_i} = e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_i}{2\pi} e^{-t(k_i - \frac{ix_i}{2t})^2} = e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_i}{2\pi} e^{-tk_i^2} \quad (3.55)$$

avendo effettuato nell'ultimo passaggio una traslazione del cammino di integrazione nella direzione dell'asse immaginario (nel piano complesso della variabile k_i), giustificata dall'analiticità della funzione e^{-tz^2} come funzione di z e dalla sua decrescita più che esponenziale nella direzione dell'asse reale.

Infine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_i}{2\pi} e^{-tk_i^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\lambda^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \quad (3.56)$$

e pertanto

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (3.57)$$

Si noti che la (3.50) definisce una funzione $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, anche se si suppone che $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Questa funzione ovviamente è una soluzione dell'equazione (3.49), ma la condizione iniziale è soddisfatta solo in media quadratica: $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} dx |u(x, t) - \varphi(x)|^2 = 0$. Omettiamo la prova di queste affermazioni, che si può svolgere usando argomenti simili a quelli utilizzati più avanti nella Prop. 3.14.

Più interessante è l'osservazione che la (3.53) definisce una soluzione della (3.49), sotto la sola condizione che $\varphi(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (quindi $\varphi(x)$ potrebbe non essere di quadrato sommabile). Per quel che riguarda la condizione iniziale, vale anzi il seguente teorema.

Proposizione 3.14 *Se $\varphi(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, la (3.53) definisce una funzione in $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, soluzione della (3.49). Inoltre, se x_0 è un punto di continuità di $\varphi(x)$, allora*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x_0, t) = \varphi(x_0) \quad (3.58)$$

Dim. - È facile verificare che la funzione $G(x, t)$ è, per $t > 0$, una soluzione della (3.49), di classe \mathbf{C}^∞ in x e t . Pertanto, per dimostrare che ciò è vero anche per $u(x, t)$, è sufficiente dimostrare che $u(x, t) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ e che le sue derivate si possono calcolare portando la derivata sotto il segno di integrale nella (3.53).

Cominciamo con una derivata del primo ordine, per esempio la derivata rispetto a x_1 . Vogliamo dimostrare che, se $e^{(1)}$ è il versore dell'asse x_1 ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + he^{(1)}, t) - u(x, t)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} dy \frac{\partial G(x - y, t)}{\partial x_1} \varphi(y)$$

cioè $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} dy H(x - y, t, h) \varphi(y) = 0$ (3.59)

con $H(x, t, h) \equiv \frac{G(x + he^{(1)}, t) - G(x, t)}{h} - \frac{\partial G(x, t)}{\partial x_1}$

Poiché vogliamo studiare il limite $h \rightarrow 0$, possiamo supporre $|h| \leq 1$. Pertanto, per il Teorema della media, esiste $\xi \in [-1, +1]$, tale che

$$H(x, t, h) = \frac{\partial G(x + \xi e^{(1)}, t)}{\partial x_1} - \frac{\partial G(x, t)}{\partial x_1}$$

$$\Rightarrow |H(x, t, h)| \leq F(x, t) \equiv 2 \sup_{|\xi| \leq 1} \left| \frac{\partial G(x + \xi e^{(1)}, t)}{\partial x_1} \right|$$

È facile verificare che, per ogni $t > 0$, $F(x, t)$ è sommabile in x . Poiché $\varphi(x)$ è limitata e $\lim_{h \rightarrow 0} H(x, t, h) = 0$ per ogni x , il Teorema della convergenza dominata implica la (3.59). La dimostrazione precedente si estende facilmente ad una derivata qualunque, per cui la prima parte della proposizione è dimostrata.

Supponiamo ora che $\varphi(x)$ sia continua nel punto x_0 . Per dimostrare la (3.58), un ruolo cruciale è giocato dal fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx G(x, t) = 1, \quad \forall t > 0$$

da cui segue che

$$F(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} dy G(x_0 - y, t) \varphi(y) - \varphi(x_0) = \int_{\mathbb{R}^N} dy G(x_0 - y, t) [\varphi(y) - \varphi(x_0)]$$

Se facciamo il cambiamento di variabile $y = x_0 + \sqrt{4t}z$, troviamo che

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dz}{\pi^{n/2}} e^{-z^2} [\varphi(x_0 + \sqrt{4t}z) - \varphi(x_0)]$$

Dobbiamo dimostrare che $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = 0$, ma ciò segue ancora facilmente dal Teorema della convergenza dominata, poiché $\varphi(x)$ è limitata e continua in x_0 . ■

Consideriamo ora il caso in cui $n = 1$ e $\varphi(x)$, oltre ad essere limitata, è anche una funzione periodica di periodo $2L$, dispari rispetto a $x = 0$. In tal caso è facile verificare che anche $u(x, t)$ è una soluzione della (3.49) periodica di periodo $2L$ e dispari rispetto a $x = 0$. Infatti, poiché $G(-x, t) = G(x, t)$ e $\varphi(-y) = -\varphi(y)$,

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= \int dy G(-x - y) \varphi(y) = \int dy G(x + y) \varphi(y) = \\ &= \int dy G(x - y) \varphi(-y) = - \int dy G(x - y) \varphi(y) = -u(x, t) \end{aligned}$$

inoltre, poiché $\varphi(x + 2L) = \varphi(x)$,

$$\begin{aligned} u(x + 2L, t) &= \int dy G(x + 2L - y) \varphi(y) = \\ &= \int dy G(x - y) \varphi(y + 2L) = \int dy G(x - y) \varphi(y) = u(x, t) \end{aligned}$$

Di qui segue che la soluzione $u_L(x)$ dell'equazione del calore in un intervallo $I = (0, L)$ con condizioni di Dirichlet al bordo e dato iniziale $\varphi_L(x)$, essendo unica, può scriversi anche nella forma (3.49), con $\varphi(x)$ l'estensione periodica e dispari di $\varphi_L(x)$ a tutto l'asse reale. Infatti, come abbiamo visto nel §2.1, $u_L(x, t)$ è la restrizione ad I di una funzione dispari in $x = 0$ e periodica di periodo $2L$; inoltre la soluzione del problema con condizioni di Dirichlet è unica. Pertanto, per la Prop. 3.14, in tutti i punti di continuità, la condizione iniziale di questo problema è realizzata nel senso della convergenza puntuale e questa osservazione completa la dimostrazione della Prop. 2.1.

Esempio 3.2 (Equazione di Laplace nel semispazio) *Si cerca una funzione limitata $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, tale che, se poniamo $y = (x_1, \dots, x_n)$ (così che $x = (y, x_{n+1})$,*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}_+^{n+1} \equiv \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\} \\ u(y, 0) = \varphi(y), \end{cases} \quad (3.60)$$

sotto l'ipotesi che $\hat{\varphi}(k)$ sia ben definita.

Si procede come nell'esempio precedente, con x_{n+1} che prende il posto di t , ponendo

$$u(y, x_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} \hat{u}(k, x_{n+1}) e^{iky} \quad (3.61)$$

Se, nell'espressione precedente, la derivata seconda rispetto a x_{n+1} può essere scambiata con l'integrale, si trova che la funzione $\hat{u}(k, t)$ deve soddisfare l'equazione

$$-k^2 \hat{u}(k, t) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(k, t) = 0, \quad \forall k \quad (3.62)$$

e la condizione $\hat{u}(k, 0) = \hat{\varphi}(k)$. Inoltre, poiché cerchiamo soluzioni limitate, dobbiamo anche imporre che $\hat{u}(k, t)$ sia limitata.

È facile verificare che la soluzione di questo problema è

$$\hat{u}(k, t) = \hat{\varphi}(k) e^{-|k|t} \quad (3.63)$$

Pertanto, per la Prop. 3.11,

$$u(x) = u(y, x_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}^n} dy' H_n(y - y', x_{n+1}) \varphi(y') \quad (3.64)$$

con

$$H_n(y, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^n} e^{-|k|t} e^{iky} \quad (3.65)$$

$$e^{-|k|t} = \int_{\mathbb{R}^n} dy H_n(y, t) e^{-iky} \quad (3.66)$$

L'integrale nella definizione di $H_n(y, t)$ è calcolabile esplicitamente per ogni $n \geq 1$. Nel caso $n = 1$, il risultato si ottiene immediatamente usando la (3.12) e la (3.19); si trova

$$H_1(y, t) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{y^2 + t^2} \quad (3.67)$$

per cui la (3.64) è ben definita sotto la sola ipotesi che $\varphi(x)$ sia limitata. Se $n > 1$, l'espressione esplicita di $H_n(y, t)$ si ottiene più semplicemente con il *metodo della carica immagine*, che verrà spiegato più avanti, nel §4.1; anche in questo caso, la (3.64) risulta ben definita, se $\varphi(x)$ è limitata.

Per quel che riguarda la condizione iniziale, come vedremo, è sufficiente supporre che $\varphi(x)$ sia anche continua. Per ottenere questo risultato sarà essenziale usare un'altra importante proprietà della funzione $H_n(y, t)$: se si pone nella (3.66) $k = 0$, si trova

$$\int_{\mathbb{R}^n} dy H_n(y, t) = 1, \quad \forall t > 0 \quad (3.68)$$

4 Complementi sull'equazione di Laplace.

4.1 Equazione di Laplace nel semispazio

Cerchiamo di risolvere il problema (3.60), estendendo al caso del semispazio la formula che esprime la soluzione in termini della funzione di Green nel caso di un dominio limitato, supponiamo cioè che esista una soluzione limitata, che possa scriversi nella forma

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dy K(x, y)\varphi(y), \quad K(x, y) = -\nabla_z G(x, z)|_{z=(y,0)} \cdot n(y) \quad (4.1)$$

dove $G(x, z)$ è la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta_z G(x, z) = -\delta(x - z), & x, z \in \mathbb{R}_+^{n+1} \\ G(x, z_y) = 0, & z_y = (y, 0), y \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.2)$$

Nel linguaggio dell'elettrostatica, la soluzione di questo problema si ottiene con il *metodo della carica immagine*. Fissato $x \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, sia $G(x, z)$, $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, il potenziale generato da una carica $+1$ posta nel punto x e da una carica -1 posta nel punto speculare rispetto al piano $x_{n+1} = 0$, cioè il punto $\tilde{x} = (y, -x_{n+1})$. Si ha

$$G(x, z) = \Gamma_{n+1}(x - z) - \Gamma_{n+1}(\tilde{x} - z) \quad (4.3)$$

$$\Gamma_m(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } m = 2 \\ \frac{1}{\alpha_m(m-2)|x|^{m-2}} & \text{se } m > 2 \end{cases} \quad (4.4)$$

dove α_m è l'area della superficie della sfera di raggio 1 in \mathbb{R}^m .

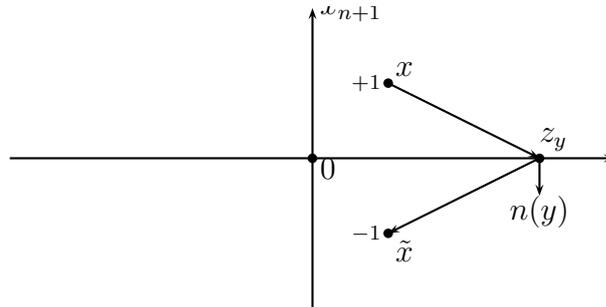


Figura 2: Metodo della carica immagine.

Se ora si restringe z a \mathbb{R}_+^{n+1} , $\Delta_z \Gamma_{n+1}(\tilde{x} - z) = 0$. Inoltre, se $z = (y, 0)$, $|x - z| = |\tilde{x} - z|$, per cui $G(x, z) = 0$. Quindi $G(x, z)$ soddisfa la (4.2).

Usando la definizione del *nucleo di Poisson* $K(x, y)$ nella (4.1), si trova, se $n > 1$ e si pone $z_y = (y, 0)$,

$$K(x, y) = \frac{(z_y - x) \cdot n(y)}{\alpha_{n+1}|x - z_y|^{n+1}} - \frac{(z_y - \tilde{x}) \cdot n(y)}{\alpha_{n+1}|\tilde{x} - z_y|^{n+1}} = \frac{2x_{n+1}}{\alpha_{n+1}|x - z_y|^{n+1}} \quad (4.5)$$

in quanto (vedi Fig. 2) $(z_y - x) \cdot n(y) = -(z_y - \tilde{x}) \cdot n(y) = x_{n+1}$ e $|x - z_y| = |\tilde{x} - z_y|$. È facile vedere che lo stesso risultato si ottiene se $n = 1$.

Se ora poniamo $x = (y', x_{n+1})$, $y' \in \mathbb{R}^n$, allora $|x - z_y|^2 = x_{n+1}^2 + |y' - y|^2$. Pertanto la soluzione del problema (3.60) si può scrivere nella forma (3.64), con

$$H_n(y, t) = \frac{2t}{\alpha_{n+1}(t^2 + y^2)^{(n+1)/2}} \quad (4.6)$$

(che coincide, se $n = 1$, con la (3.67), visto che $\alpha_2 = 2\pi$). Infatti la funzione $H_n(y - y')\varphi(y')$ è integrabile in y' per ogni $t > 0$, se $\varphi(y)$ è limitata, e la condizione $\Delta u(x) = 0$ è garantita dal procedimento utilizzato. Rimane pertanto solo da dimostrare che, sotto opportune ipotesi su $\varphi(y)$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} dy' H_n(y - y', t) \varphi(y') = \varphi(x) \quad (4.7)$$

Procedendo come nella dimostrazione della proposizione analoga nel §4.2, è facile dimostrare, usando la (3.68), la proposizione seguente.

Proposizione 4.1 *Se la funzione $\varphi(y)$ è continua e limitata, allora la condizione (4.7) è soddisfatta, per cui la (3.64) è effettivamente una soluzione del problema (3.60).*

4.2 Equazione di Laplace nella sfera.

Sia \mathbf{B}_1 la sfera aperta di raggio 1 in \mathbb{R}^n , con centro nell'origine. Vogliamo risolvere l'equazione

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & |x| < 1 \\ u(y) &= g(y), & |y| = 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Come sappiamo, se questo problema ammette una soluzione di classe \mathbb{C}^2 nella chiusura di \mathbf{B}_1 , allora essa può scriversi nella forma

$$u(x) = \int_{\partial \mathbf{B}_1} d\sigma(y) K(x, y)g(y) \quad (4.9)$$

$$K(x, y) = -\nabla_z G(x, z)|_{z=y} \cdot n(y) \quad (4.10)$$

dove $G(x, z)$ è la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta_z G(x, z) = -\delta(x - z), & x, z \in \mathbf{B}_1 \\ G(x, y) = 0, & y \in \partial \mathbf{B}_1 \end{cases} \quad (4.11)$$

Cominciamo con il caso $n \geq 3$. Cercheremo di risolvere questo problema, adattando alla nuova geometria il metodo della carica immagine nel modo seguente. Definiamo, se $x \neq 0$, $G(x, z)$ come il potenziale generato da una carica $+1$ posta nel punto x e da una carica $-q(x)$ posta nel punto

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2} \quad (4.12)$$

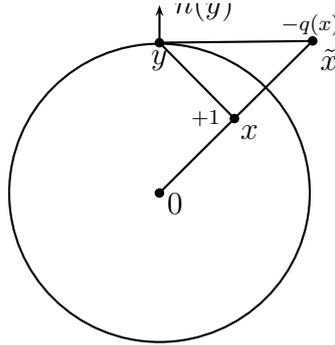


Figura 3: Il metodo della carica immagine per la sfera.

Si ha pertanto

$$G(x, z) = \Gamma_n(x - z) - q(x)\Gamma_n(\tilde{x} - z) \quad (4.13)$$

Poiché $\Delta_z \Gamma_n(\tilde{x} - z) = 0$, se $x, z \in \mathbf{B}_1$, dobbiamo vedere se è possibile determinare $q(x)$, in modo che $G(x, y) = 0$, se $y \in \partial \mathbf{B}_1$. Usando la (4.12) ed il fatto che $|y| = 1$, si ha:

$$(\tilde{x} - y)^2 = \frac{1}{|x|^2} + 1 - 2\frac{x \cdot y}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^2}(1 + x^2 - 2x \cdot y) = \frac{(x - y)^2}{|x|^2}$$

per cui $|x - y| = |x||\tilde{x} - y|$. Usando la (4.4) e ricordando che $n \geq 3$, si ha allora

$$G(x, y) = \frac{1}{\alpha_n(n-2)|x-y|^{n-2}}[1 - q(x)|x|^{n-2}] = 0 \Rightarrow q(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

Ne segue che

$$-\nabla_z G(x, z) = \frac{z - x}{\alpha_n|x - z|^n} - \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{z - \tilde{x}}{\alpha_n|\tilde{x} - z|^n}$$

Usando la (4.10) e ancora la $|x - y| = |x||\tilde{x} - y|$, si ha:

$$K(x, y) = \frac{[(y - x) - (|x|^2 y - x)] \cdot n(y)}{\alpha_n|x - y|^n} = \frac{(1 - |x|^2)y \cdot n(y)}{\alpha_n|x - y|^n}$$

Poiché $y \cdot n(y) = |y| = 1$, si ha infine

$$K(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{\alpha_n |x - y|^n} \quad (4.14)$$

Si noti che, contrariamente a quel che abbiamo visto nel caso del semispazio, il metodo della carica immagine non si può estendere al caso $n = 2$. In tal caso, tuttavia, è facile vedere che la funzione di Green è data dalla formula:

$$\begin{aligned} G(x, z) &= \Gamma_2(x - z) - \Gamma_2(|x|(\tilde{x} - z)) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log |x - z| + \frac{1}{2\pi} \log(|x||\tilde{x} - z|) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Infatti, l'identità $|x - y| = |x||\tilde{x} - y|$ è valida, se $|y| = 1$, anche per $n = 2$. Di qui segue inoltre, con un calcolo simile al precedente, che la (4.14) è valida anche per $n = 2$, in accordo con la formula ottenuta con il metodo di separazione delle variabili.

Vogliamo ora fare vedere che la (4.9) è effettivamente una soluzione del problema (4.8), per $n \geq 2$. Poiché la condizione $\Delta u(x) = 0$ è garantita dal procedimento utilizzato, ci rimane da verificare le condizioni al bordo, sotto opportune ipotesi di regolarità. La seguente proposizione mostra che è sufficiente supporre i dati al bordo continui, condizione che peraltro, come sappiamo, è anche sufficiente ad assicurare l'unicità.

Proposizione 4.2 *Se la funzione $g(y)$ è continua, allora, $\forall y_0 \in \partial \mathbf{B}_1$,*

$$\lim_{x \rightarrow y_0} \int_{\partial \mathbf{B}_1} d\sigma(y) K(x, y) g(y) = g(y_0) \quad (4.16)$$

Quindi la (4.8) è solubile e la (4.9) ne è la soluzione (unica), $\forall n \geq 2$.

Dim. - Cominciamo con l'osservare che la funzione $u(x) = 1$ è una soluzione del problema (4.8) con $g(y) = 1$. Dalla (4.9) si deduce allora che

$$\int_{\partial \mathbf{B}_1} d\sigma(y) K(x, y) = 1 \quad (4.17)$$

Quindi, dimostrare la (4.16) è equivalente a dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow y_0} \int_{\partial \mathbf{B}_1} d\sigma(y) K(x, y) [g(y) - g(y_0)] = 0 \quad (4.18)$$

Dobbiamo cioè dimostrare che, dato comunque $\varepsilon > 0$, si può determinare η in modo che, se $x \in \mathbf{V}_\eta = \{x \in \mathbf{B}_1 : |x - y_0| \leq \eta\}$, allora l'integrale della (4.18) è minore in modulo di ε .

Poiché $K(x, y_0)$ diverge se $x \rightarrow y_0$, conviene dividere il dominio di integrazione $\partial \mathbf{B}_1$ in due parti. La prima parte è un intorno I_δ di y_0 , tale che, se

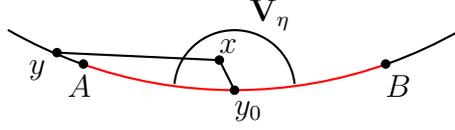


Figura 4: Intorni di y_0 nel caso $n = 2$.

$y \in I_\delta$, allora $|y - y_0| \leq \delta$ e $|g(y) - g(y_0)| \leq \varepsilon/2$; ciò è possibile in quanto abbiamo supposto $g(y)$ continua. La seconda parte, che indicheremo con J_δ è il complementare di I_δ . Nella Fig. 4, che fa riferimento al caso $n = 2$, l'insieme I_δ è rappresentato dall'arco AB .

Il fatto, essenziale nella dimostrazione, che

$$K(x, y) > 0$$

e la (4.17) implicano che, per ogni $x \in \mathbf{B}_1$,

$$\left| \int_{I_\delta} d\sigma(y) K(x, y)[g(y) - g(y_0)] \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{I_\delta} d\sigma(y) K(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ci rimane pertanto da dimostrare che, se $x \in \mathbf{V}_\eta$ e η è abbastanza piccolo, allora anche il contributo all'integrale dell'insieme J_δ si può stimare con $\varepsilon/2$. Cominciamo con lo scegliere η in modo che, se $x \in \mathbf{V}_\eta$ e $y \in J_\delta$ (all'esterno dell'arco AB in Fig. 4), allora $|y - x| \geq \delta/2$; $\eta \leq \delta/4$ va certamente bene, se δ è abbastanza piccolo. La (4.14) implica allora che

$$K(x, y) \leq \frac{2^n(1 + |x|)}{\alpha_n \delta^n} (1 - |x|)$$

D'altra parte $1 + |x| \leq 2$ e $1 - |x| = |y_0| - |x| \leq |y_0 - x| \leq \eta$. Inoltre la funzione $g(y)$ è limitata, in quanto continua su un compatto, per cui $|g(y) - g(y_0)| \leq 2\|g\|_\infty$. Pertanto

$$\left| \int_{J_\delta} d\sigma(y) K(x, y)[g(y) - g(y_0)] \right| \leq \eta \frac{2^{n+2}\|g\|_\infty}{\alpha_n \delta^n} \int_{J_\delta} d\sigma(y) \leq \eta \frac{2^{n+2}\|g\|_\infty}{\delta^n}$$

Basta quindi scegliere

$$\eta \leq \frac{\delta^n}{2^{n+2}\|g\|_\infty} \frac{\varepsilon}{2}$$

per ottenere il risultato cercato. ▮

Consideriamo ora il problema (4.8) nella sfera \mathbf{B}_R di raggio R in \mathbb{R}^n , con centro nell'origine.

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & |x| < R \\ u(y) &= g(y), & |y| = R \end{aligned} \tag{4.19}$$

La soluzione di questo problema, che sappiamo essere unica (se esiste), si riduce molto facilmente alla soluzione della (4.8). Infatti, se la funzione $g(y)$ è continua su $\partial\mathbf{B}_R$, ciò è vero anche per la funzione $\tilde{g}(y) = g(Ry)$, definita su $\partial\mathbf{B}_1$. Esiste quindi una soluzione $\tilde{u}(x)$ della (4.8) con dato al bordo $\tilde{g}(y)$ ed è facile verificare che la funzione $u(x) = \tilde{u}(x/R)$ risolve la (4.19). Inoltre, usando la (4.9) e la (4.14), si trova:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\mathbf{B}_1} d\sigma(y) K\left(\frac{x}{R}, y\right) g(Ry) = \int_{\partial\mathbf{B}_R} \frac{d\sigma(y)}{R^{n-1}} \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}\right) g(y) \\ &= \int_{\partial\mathbf{B}_R} K_R(x, y) g(y) \end{aligned}$$

con

$$K_R(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\alpha_n R |x - y|^n} \quad (4.20)$$

5 Complementi sull'equazione del trasporto.

5.1 Equazione del trasporto non lineare.

Sia I un intervallo dell'asse reale e $q(u)$ una funzione di classe \mathbb{C}^1 su I . Ci chiediamo se esistono soluzioni a valori in I , di classe \mathbb{C}^1 nell'aperto $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$, dell'equazione del trasporto con corrente $j(x, t) = q(u(x, t))$, cioè dell'equazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + q'(u) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Applichiamo il *metodo delle caratteristiche*, cerchiamo cioè di individuare una famiglia di curve nel semipiano $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0\}$, parametrizzata da $x_0 \in \mathbb{R}$, della forma

$$x = f(t, x_0), \quad f(0, x_0) = x_0 \quad (5.2)$$

e tali che su di esse la soluzione è costante, cioè tali che

$$u(f(t, x_0), t) = u(x_0, 0) = g(x_0), \quad \forall t \geq 0 \quad (5.3)$$

Questa condizione implica che:

$$0 = \frac{d}{dt}u(f(t, x_0), t) = \frac{\partial u}{\partial t}(f(t, x_0), t) + \frac{\partial u}{\partial x}(f(t, x_0), t) \frac{d}{dt}f(t, x_0) \quad (5.4)$$

Se si confronta la seconda eguaglianza con la (5.1) e si usa la (5.3), si trova:

$$\frac{d}{dt}f(t, x_0) = q'(u(f(t, x_0))) = q'(g(x_0)) \quad (5.5)$$

Quindi le caratteristiche esistono e sono definite dall'equazione

$$x = x_0 + r(x_0)t, \quad r(x_0) = q'(g(x_0)) \quad (5.6)$$

Supponiamo ora che le equazioni (5.6) siano invertibili per ogni $t \in [0, T)$, $T > 0$, e che il loro codominio sia tutto l'asse reale; supponiamo cioè che per ogni punto $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T)$ passi una ed una sola caratteristica. Allora, usando la (5.3), si vede subito che la (5.1) ammette, per $t \in [0, T)$, una soluzione, unica, che può esprimersi nella forma

$$u(x, t) = g(x - r(x_0)t) \quad (5.7)$$

dove x_0 è la soluzione della (5.6), pensata come un'equazione nell'incognita x_0 . Si noti, in particolare, che la forma della soluzione garantisce che, se $g(x)$ assume valori nell'intervallo $J \subset I$, lo stesso è vero per $u(x, t)$.

La solubilità della (5.1) è stata pertanto ridotta all'analisi della (5.6), cioè allo studio della funzione $x(\xi, t) := \xi + r(\xi)t$. Notiamo che

- a) Se la funzione $r(x_0)$ è continua e limitata, il che accade certamente se $g(x_0)$ è continua e assume valori in un intervallo chiuso $J \subset I$, allora il codominio della funzione $x(\xi, t)$ (che è un intervallo) coincide con \mathbb{R} , per ogni $t \geq 0$, visto che, in tal caso, $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} x(\xi, t) = \pm\infty$.
- b) Se la funzione $r(x_0)$ è continua e non decrescente, allora la funzione $x(\xi, t)$ è monotona in senso stretto, per ogni $t \geq 0$; infatti, se $\xi_2 > \xi_1$,

$$x(\xi_2, t) - x(\xi_1, t) = \xi_2 - \xi_1 + [r(\xi_2) - r(\xi_1)]t \geq \xi_2 - \xi_1 > 0$$

in tal caso, quindi, la (5.1) è solubile in tutto il semipiano $t \geq 0$.

- c) Se la funzione $r(x_0)$ è uniformemente Lipschziana, cioè se $|r(\xi_2) - r(\xi_1)| \leq M|\xi_2 - \xi_1|$, $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, allora, se $\xi_2 > \xi_1$,

$$x(\xi_2, t) - x(\xi_1, t) \geq (\xi_2 - \xi_1)(1 - Mt) > 0, \quad t < T = \frac{1}{M}$$

in tal caso, quindi, la (5.1) è sicuramente solubile solo nella striscia $0 \leq t < T$.

- d) Se $q(u) \in \mathbb{C}^2(I)$ e $g(x) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$, $r(x_0)$ è derivabile e la condizione di monotonia di $x(\xi, t)$ per $t \in [0, T)$ è garantita dalla condizione

$$dx/dx_0 = 1 + r'(x_0)t = 1 + q''(g(x_0))g'(x_0)t \neq 0, \quad \forall t < T, x_0 \in \mathbb{R} \quad (5.8)$$

Questa condizione garantisce anche che il codominio della funzione $x(\xi, t)$ è tutto \mathbb{R} . Infatti, se così non fosse, dovremmo avere che $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} x(\xi, t) < +\infty$ o $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} x(\xi, t) > -\infty$; tuttavia, dx/dx_0 , in quanto derivata di una funzione monotona, dovrebbe allora tendere a 0, per $x_0 \rightarrow +\infty$ o $x_0 \rightarrow -\infty$, rispettivamente, il che non può essere vero per più di un valore di t .

Se sono soddisfatte le condizioni del punto d), si può osservare anche che:

- 1) Se $q''(u) \geq 0$ (≤ 0) in I e $g'(x_0) \geq 0$ (≤ 0) in \mathbb{R} , allora la (5.7) risolve la (5.1) per ogni $t > 0$ e ogni $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Se $|q''(u)| \leq a$ e $|g'(x_0)| \leq b$, allora la (5.7) risolve la (5.1) per ogni $t \in (0, (ab)^{-1})$ e ogni $x \in \mathbb{R}$.

6 Complementi sull'equazione delle onde.

6.1 Corda elastica e catene di oscillatori accoppiati.

Come modello fenomenologico approssimato per le oscillazioni longitudinali di una corda elastica omogenea di lunghezza L fissa agli estremi e priva di peso si può considerare una catena di oscillatori armonici accoppiati definita nel modo seguente.

Dato l'intervallo $I = [0, L]$ ed il numero naturale N , si considera il reticolo formato dagli $N + 1$ punti $x_i = hi$, $i = 0, \dots, N$, con $h = L/N$, e si associa ad ogni punto del reticolo una particella di massa m , vincolata a muoversi su di una retta passante per x_i , contenuta in un piano fissato contenente l'intervallo I e ortogonale ad I . Ogni particella interagisce con le due prime vicine mediante una forza elastica con costante di richiamo K ; vedi Fig. 5

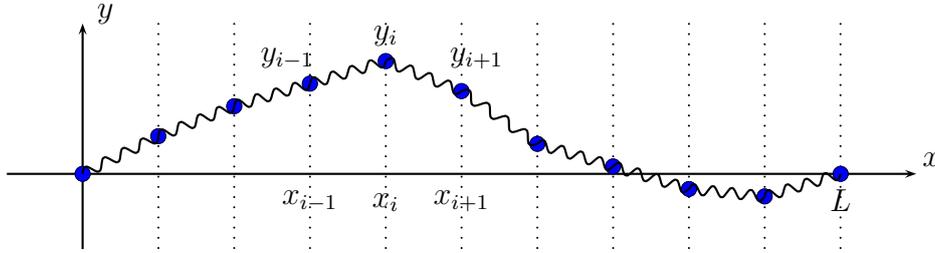


Figura 5: Catena di oscillatori accoppiati.

Per N molto grande, questo sistema di particelle può essere considerato una buona approssimazione della corda solo se $m = \rho h$, ρ essendo la densità della corda; in tal modo la massa ρL della corda viene distribuita uniformemente fra le particelle. Vogliamo ora mostrare che è possibile scegliere K in funzione di h in modo che, detta $y_i(t)$ la coordinata verticale della particella i -esima al tempo t , il moto della catena di oscillatori sia interpolato, almeno formalmente, da una funzione regolare $u(x, t)$, tale che

$$u(x_i, t) = y_i(t) \quad (6.1)$$

Poiché la catena è fissa agli estremi, $y_0(t) = y_N(t) = 0$. Se $i = 1, \dots, N - 1$, si ha invece

$$m\ddot{y}_i(t) = -K[y_i(t) - y_{i-1}(t)] - K[y_i(t) - y_{i+1}(t)] \quad (6.2)$$

Se inseriamo la (6.1) nella (6.2) e usiamo il fatto che $m = \rho h$, otteniamo:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t) = Kh^{-1}[u(x_i - h, t) - u(x_i, t) + u(x_i + h, t) - u(x_i, t)]$$

Sostituiamo in questa equazione a $u(x_i - h, t)$ e $u(x_i + h, t)$ i loro sviluppi di Taylor al secondo ordine nel punto x_i ; si trova

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t) = \frac{K}{h} \left[h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) + O(h^3) \right]$$

Ora, dato un punto $x \in (0, L)$, esiste, per ogni N , un indice $i = i(N)$, tale che $\lim_{N \rightarrow \infty} x_{i(N)} = x$. Pertanto, se $Kh^{-1} = \tau$, si trova formalmente, nel limite $h \rightarrow 0$,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad u(0, t) = u(L, t) = 0$$

Una formulazione precisa di questa affermazione ed una sua dimostrazione rigorosa possono trovarsi in [3].

Supponiamo ora che le particelle agli estremi della catena non siano fisse, ma sia sottoposte ad una forza di richiamo elastico verso l'asse x di costante di richiamo α , oltre ad essere vincolate a muoversi nella direzione dell'asse y . In tal caso, le equazioni del moto per $i = 1, \dots, N - 1$ rimangono inalterate, ma

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{y}_0(t) &= -\tau \frac{y_0(t) - y_1(t)}{h} - \alpha y_0(t) \\ \rho h \ddot{y}_N(t) &= -\tau \frac{y_N(t) - y_{N-1}(t)}{h} - \alpha y_N(t) \end{aligned}$$

Pertanto, procedendo come prima, ma operando solo uno sviluppo di Taylor al primo ordine, si trova

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) &= \tau \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \alpha u(0, t) \\ \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) &= -\tau \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} - \alpha u(L, t) \end{aligned}$$

che si riducono, per $h \rightarrow 0$, alle condizioni di Robin

$$\tau \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \alpha u(0, t) = \tau \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} + \alpha u(L, t) = 0$$

Se $\alpha = 0$, se cioè gli estremi della catena sono soggetti solo al vincolo di muoversi nella direzione y , si trovano condizioni di Neumann.

6.2 Equazione di Klein-Gordon.

Consideriamo l'equazione

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \Delta u(x, t) - m^2 u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)\end{aligned}\tag{6.3}$$

Cerchiamo una soluzione applicando il metodo descritto nel §3.5, cerchiamo cioè una soluzione della forma

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} \hat{u}(k, t) e^{ikx}\tag{6.4}$$

con $\hat{u}(k, t)$ abbastanza regolare per poter scambiare le derivate con l'integrale. Procedendo come nell'esempio 3.1, si vede che $\hat{u}(k, t)$ deve soddisfare l'equazione

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(k, t)}{\partial t^2} = -\omega(k)^2 \hat{u}(k, t)\tag{6.5}$$

$$\omega(k) = \sqrt{c^2 k^2 + m^2}\tag{6.6}$$

La soluzione di questa equazione è della forma

$$\hat{u}(k, t) = A(k) e^{i\omega(k)t} + B(k) e^{-i\omega(k)t}\tag{6.7}$$

Le condizioni iniziali impongono che

$$A(k) + B(k) = \hat{\varphi}(k), \quad i\omega(k)[A(k) - B(k)] = \hat{h}(k)\tag{6.8}$$

dove $\hat{\varphi}(k)$ e $\hat{h}(k)$ sono le trasformate di Fourier (supposte ben definite e abbastanza regolari) dei dati iniziali. Ne segue che

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} [A(k) e^{i[kx + \omega(k)t]} + B(k) e^{i[kx - \omega(k)t]}]\tag{6.9}$$

con

$$A(k) = \frac{1}{2} \left[\hat{\varphi}(k) + \frac{\hat{h}(k)}{i\omega(k)} \right], \quad B(k) = \frac{1}{2} \left[\hat{\varphi}(k) - \frac{\hat{h}(k)}{i\omega(k)} \right]\tag{6.10}$$

Osservazioni

1) La funzione $e^{i[kx \pm \omega(k)t]}$ non rientra fra quelle per cui è definita la trasformata di Fourier, per cui non è possibile riscrivere i due termini che compongono la (6.9) come convoluzioni di funzioni definite in \mathbb{R}^n . Nel caso $m = 0$ la (6.3) coincide con l'equazione delle onde e ciò è in accordo con la formula di Kirchoff, se $n \geq 2$, o la formula di D'Alembert, se $n = 1$.

2) Se $m = 0$ e $n = 1$, è tuttavia facile verificare che la (6.9) è equivalente alla forma generale della soluzione dell'equazione delle onde. In tal caso infatti

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} [A(k) e^{i[kx+c|k|t]} + B(k) e^{i[kx-c|k|t]}] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} [\tilde{A}(k) e^{ik(x+ct)} + \tilde{B}(k) e^{ik(x-ct)}] \end{aligned} \quad (6.11)$$

con $\tilde{A}(k) = A(k)$ e $\tilde{B}(k) = B(k)$, se $k > 0$, $\tilde{A}(k) = B(k)$ e $\tilde{B}(k) = A(k)$, se $k < 0$. Pertanto

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (6.12)$$

dove $F(x)$ e $G(x)$ sono le anti-trasformate di $\tilde{B}(k)$ e $\tilde{A}(k)$, rispettivamente.

3) Per ogni valore di $m \geq 0$ la (6.9) rappresenta la soluzione come uno sviluppo in onde piane monocromatiche di lunghezza d'onda $\lambda(k) = 2\pi/|k|$, periodo $T(k) = 2\pi/\omega(k)$ e velocità di propagazione

$$c(k) = \frac{\omega(k)}{|k|} = \frac{\lambda(k)}{T(k)} \quad (6.13)$$

Nella (6.9) queste onde sono descritte dalle funzioni $e^{i[kx \pm \omega(k)t]}$, le quali

- assumono lo stesso valore su tutti gli iper-piani ortogonali alla direzione di k (sono dei punti se $n = 1$), posti a distanza $\lambda(k)$ l'uno dall'altro;
- sono periodiche in t di periodo $T(k)$;
- la fase dell'onda $\varphi_k(x, t) = kx \pm \omega(k)t$ gode della proprietà che

$$\varphi_k \left(x_0 \mp c(k) \frac{k}{|k|} t, t \right) = \varphi_k(x_0)$$

Questa proprietà si esprime di solito dicendo che *i piani di fase fissata si muovono nella direzione di k con velocità di fase $c(k)$* ; l'onda $e^{i[kx - \omega(k)t]}$ si muove nello stesso verso di k e si chiama *progressiva*, mentre l'onda $e^{i[kx + \omega(k)t]}$ si muove nel verso opposto e si chiama *regressiva*.

4) La funzione $\omega(k)$ viene chiamata *relazione di dispersione*. Se $m = 0$, $\omega(k) = c|k|$ e si dice che *la dispersione è lineare*; in tal caso $c(k) = c$, per cui la velocità di fase è costante. Ne segue che, se si sostituisce nella (6.9) l'integrale di volume con l'integrale su di una retta passante per l'origine di versore n , si ottiene una funzione della forma (6.12), con $x \cdot n$ al posto di x , cioè la somma di due onde (non monocromatiche), una progressiva e una regressiva, che si muovono con velocità c nella direzione di n . Se $m > 0$, ciò non è vero; nel §6.3 faremo vedere come si possa associare in tal caso una velocità di propagazione ai pacchetti d'onda unidimensionali.

6.3 Velocità di gruppo.

Vogliamo ora analizzare come si comporta, al variare del tempo, una funzione a valori reali della forma

$$u(x, t) = \Re \int dk A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} \quad (6.14)$$

nel caso in cui $\omega(k)$ non è costante. Per semplicità consideremo il caso unidimensionale, quindi $x, k \in \mathbb{R}$. Se scriviamo $A(k)$ nella forma $a(k)e^{i\theta(k)}$, con $a(k) \geq 0$, possiamo rappresentare $u(x, t)$ nella forma

$$u(x, t) = \int dka(k) \cos[kx - \omega(k)t + \theta(k)] \quad (6.15)$$

La prima osservazione da fare è che la diversa velocità di propagazione delle onde monocromatiche con diverso valore di k implica che il grafico di $u(x, t)$ come funzione di x ha una forma che dipende dal tempo in modo abbastanza complicato; in particolare esso non si può sicuramente ottenere da quello a $t = 0$ mediante una semplice traslazione. Per capire meglio cosa succede, supponiamo che $a(k)$ sia una funzione regolare a supporto compatto nell'intervallo $I = [k_0 - \varepsilon, k_0 + \varepsilon]$, con $0 < \varepsilon \ll k_0$, consideriamo cioè un *pacchetto d'onde* molto "stretto". Indichiamo inoltre con

$$\varphi(k, x, t) = kx - \omega(k)t + \theta(k) \quad (6.16)$$

la fase del coseno e supponiamo che $\omega''(k) \neq 0$, se $k \in I$.

È evidente che, se la fase ha una variazione molto grande al variare di k in I , per dei valori fissati di x e t , $u(x, t)$ è molto piccolo. D'altra parte, questa variazione è limitata da

$$2\varepsilon \max_{k \in I} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial k}(k, x, t) \right| \leq 2\varepsilon \left| \frac{\partial \varphi}{\partial k}(k_0, x, t) \right| + 2\varepsilon^2 M_I, \quad M_I = \max_{k \in I} \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k^2}(k, x, t) \right|$$

e dalla (6.16) segue che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k}(k, x, t) = x - \omega'(k)t + \theta'(k), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k^2}(k, x, t) = -\omega''(k)t + \theta''(k)$$

Pertanto, se poniamo

$$x = \omega'(k_0)t + \theta'(k_0) + \delta \quad (6.17)$$

la variazione della fase nell'intervallo I è minore di

$$2\varepsilon|\delta| + 2\varepsilon^2(|t|\|\omega''\|_I + \|\theta''\|_I)$$

dove

$$\|\omega''\|_I = \max_{k \in I} |\omega''(k)|, \quad \|\theta''\|_I = \max_{k \in I} |\theta''(k)|$$

Ne segue che, se δ e t soddisfano la condizione

$$2\varepsilon|\delta| + 2\varepsilon^2(|t|\|\omega''\|_I + \|\theta''\|_I) \leq \eta \ll \pi \quad (6.18)$$

$u(x, t)$ è bene approssimata dalla funzione

$$\tilde{u}(x, t) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dp a(k_0 + p) \cos\{\varphi(k_0, x, t) + p[x - \omega'(k_0)t + \theta'(k_0)]\} \quad (6.19)$$

cioè dall'espressione che si ottiene sostituendo nella (6.15) $\varphi(k, x, t)$ con il suo sviluppo di Taylor del primo ordine in k , intorno a $k = k_0$. Si noti che le (6.18) sono verificate, in particolare, se

$$|t|\|\omega''\|_I + \|\theta''\|_I \leq \frac{\eta}{4\varepsilon^2}, \quad |\delta| \leq \frac{\eta}{4\varepsilon}$$

La prima condizione è verificata se ε è abbastanza piccolo ($\|\theta''\|_I \leq \eta/(4\varepsilon^2)$) e

$$|t| \leq T_\varepsilon = \frac{\eta/(4\varepsilon^2) - \|\theta''\|_I}{\|\omega''\|_I} \quad (6.20)$$

Per quel che riguarda x , le (6.18) sono verificate almeno nell'intervallo con centro in $\omega'(k_0)t + \theta'(k_0)$ e ampiezza $\eta/(4\varepsilon)$. Questo intervallo si sposta rigidamente con velocità

$$v_g(k_0) = \omega'(k_0)$$

detta *velocità di gruppo*. Questo nome segue dal fatto che, in base alle considerazioni precedenti, la funzione $u(x, t)$, pur essendo una funzione oscillante, ha valori sensibilmente diversi da zero solo in un intervallo di ampiezza $O(1/\varepsilon)$, che si sposta con velocità $v_g(k_0)$, almeno fino a tempi di ordine $(1/\varepsilon)^2$.

Quando t diviene ancora più grande, questa descrizione della funzione $u(x, t)$ non è più valida. Ciò si spiega facilmente con l'osservazione che il pacchetto d'onde può decomporsi in pacchetti ancora più piccoli, ad ognuno dei quali potremmo applicare le considerazioni precedenti. Supponiamo, per esempio, di "dividere il pacchetto in due", scrivendo la funzione $a(k)$ nella forma $a(k) = a_1(k) + a_2(k)$, in modo che il supporto di $a_1(k)$ sia l'intervallo $[k_0 - \varepsilon, k_0 + \varepsilon/4]$, mentre il supporto di $a_2(k)$ è l'intervallo $[k_0 - \varepsilon/4, k_0 + \varepsilon]$. Queste definizioni implicano che $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, per cui otteniamo una nuova descrizione di $u(x, t)$. Infatti, se indichiamo con k_i i centri dei due intervalli, le considerazioni precedenti ci direbbero che ognuno dei due pacchetti si muove con velocità $v_g(k_i)$ ed ha un'ampiezza circa doppia rispetto a quello "completo". Ovviamente le due descrizioni entrano in conflitto solo se passa un tempo sufficiente perché i due pacchetti si "separino", cioè abbiano percorso un tragitto delle stesse dimensioni della loro ampiezza. Poiché la differenza delle velocità dei due pacchetti è di ordine ε e la loro ampiezza è di ordine $1/\varepsilon$, ciò avviene dopo un tempo di ordine $1/\varepsilon^2$, in accordo con la condizione (6.20). A questo punto l'unica descrizione corretta è

la seconda, che descrive $u(x, t)$ come la somma di due pacchetti a supporto “quasi disgiunto” nello spazio.

Se si va ancora avanti col tempo, anche questi due pacchetti si decompongono e così via. Questo fenomeno si chiama *dispersione* e spiega il nome di *relazione di dispersione* per la funzione $\omega(k)$. Da quel che abbiamo detto, perché ci sia dispersione $\omega''(k)$ deve essere diversa da 0.

Per completare la descrizione dei pacchetti d'onde, è utile analizzare più in dettaglio la funzione $\tilde{u}(x, t)$ definita nella (6.19) nel caso particolare in cui $\theta(k) = 0$ e

$$a(k) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon), & |k - k_0| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In tal caso, se si pone $v_0 = \omega(k_0)/k_0$ e $v_g = v_g(k_0)$, si trova facilmente che:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dp \cos\{[k_0 x - \omega(k_0)t] + p[x - \omega'(k_0)t]\} \\ &= \cos[k_0(x - v_0 t)] \frac{\sin[\varepsilon(x - v_g t)]}{\varepsilon(x - v_g t)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Nella Fig. 6 è disegnato il grafico di $\tilde{u}(x, t)$ al tempo $t = 0$ e al tempo $t = 10$, per un pacchetto con $\varepsilon = .1$, $k_0 = 2$, nel caso in cui la relazione di dispersione sia quella dell'equazione di Klein-Gordon con $m = 1$ e $c = 1$, vedi la (6.6), per cui $v_0 = 1.118$ e $v_g = 0.8944$. Nel disegno la linea rossa indica la posizione del punto $x = v_g t$, mentre quella nera indica il punto $x = v_0 t$ (le due linee si sovrappongono a $t = 0$).

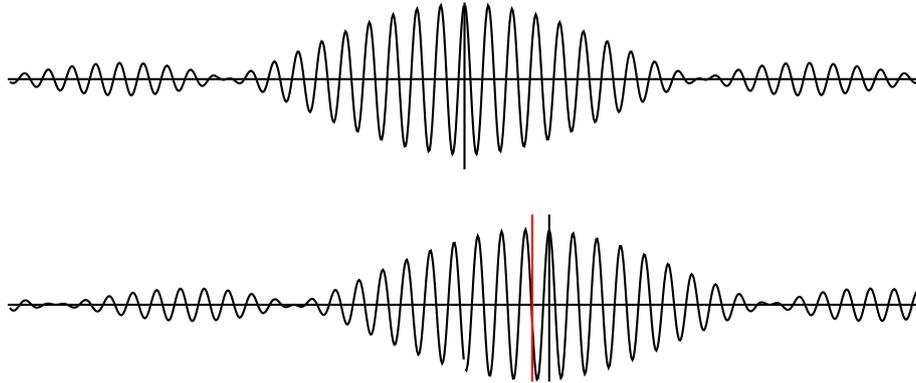


Figura 6: Grafico di $\tilde{u}(x, t)$ al tempo $t = 0$, in alto, ed al tempo $t = 10$.

La funzione $\tilde{u}(x, t)$ si può descrivere come un'onda monocromatica di lunghezza d'onda $2\pi/k_0$ e velocità di fase v_0 , la cui ampiezza varia lentamente su scala $1/\varepsilon$ ed ha un massimo che si sposta con velocità v_g . Si noti che il valore di $\tilde{u}(x, t)$ nel punto di in cui l'ampiezza è massima, cioè la funzione

$$F(t) = u(v_g t, t) = \cos[k_0(v_g - v_0)t]$$

è una senoide che compie una oscillazione completa in un tempo $T = 2\pi/|k_0(v_g - v_0)|$.

A Spazi \mathbf{L}^p

A.1 Definizioni e proprietà generali

In questa appendice riportiamo le definizioni degli spazi \mathbf{L}^p e alcune loro proprietà, la cui dimostrazione può trovarsi in molti testi, per esempio [1].

Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un insieme aperto connesso; data una funzione $f(x)$ definita in Ω , misurabile secondo Lebesgue, e un numero reale $p \geq 1$, si dice che $f(x)$ appartiene allo spazio $\mathbf{L}^p(\Omega)$ se $\int dx |f(x)|^p < +\infty$. Poiché l'integrale di Lebesgue non cambia, se si modifica la funzione su di un insieme di misura nulla, gli elementi di questo spazio sono in realtà classi di equivalenza di funzioni rispetto alla relazione che considera equivalenti due funzioni che differiscono al più su di un insieme di misura nulla. È facile vedere che $\mathbf{L}^p(\Omega)$ è chiuso rispetto al prodotto per un numero complesso (ovvio) e alla somma di funzioni (segue dalla convessità della funzione $|x|^p$ per $p \geq 1$, tramite la conseguente disuguaglianza $|x/2 + y/2|^p \leq |x|^p/2 + |y|^p/2$). Inoltre, gli si dà una struttura di spazio normato, quindi anche di spazio metrico, ponendo

$$\|f\|_p = \left(\int dx |f(x)|^p \right)^{1/p}, \quad d(f, g) = \|f - g\|_p \quad (\text{A.1})$$

Si noti che la dimostrazione che $\|f\|_p$ è una norma è banale solo nel caso $p = 1$; per il caso $p = 2$ si veda più avanti.

Si definisce anche $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ lo spazio normato delle classi di equivalenza delle funzioni $f(x)$ limitate (ovviamente a meno di un insieme di misura nulla) con norma

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f(x)|$$

dove “ess sup” indica l'estremo superiore (finito) sul sottoinsieme di Ω (dipendente dalla funzione scelta nella classe di equivalenza) in cui $f(x)$ è limitata.

Per ogni $p \in [1, +\infty]$, $\mathbf{L}^p(\Omega)$ contiene lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ delle funzioni di classe \mathbf{C}^∞ con supporto compatto contenuto in Ω . Nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^n$, ha anche interesse considerare lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni di classe \mathbf{C}^∞ che vanno a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza, insieme a tutte le loro derivate, dette *funzioni di Schwarz*. Vale il seguente Teorema:

Teorema A.1 *Per ogni $p \in [1, +\infty)$, $\mathbf{L}^p(\Omega)$ è uno spazio metrico completo, coincidente con la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$, o anche di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se $\Omega = \mathbb{R}^n$. Questa proprietà non vale per $p = \infty$.*

A.2 $\mathbf{L}^2(\Omega)$ visto come spazio di Hilbert

Nel caso di $\mathbf{L}^2(\Omega)$, si introduce anche il prodotto scalare fra due suoi elementi f e g :

$$(f, g) \equiv \int_{\Omega} dx f^*(x)g(x) \quad (\text{A.2})$$

L'integrale è ben definito, in quanto $|f^*(x)g(x)| \leq [|f(x)|^2 + |g(x)|^2]/2$. Inoltre è facile verificare che sono verificate le usuali proprietà del prodotto scalare:

- a) $(f, f) \geq 0$ e $(f, f) = 0 \iff f = 0$
- b) $(f, g)^* = (g, f)$
- c) $(f, c_1g_1 + c_2g_2) = c_1(f, g_1) + c_2(f, g_2)$

Si noti che $(f, f) = \|f\|_2^2$, se $\|f\|_2$ è definito come in (A.1). Da queste proprietà segue che

Proposizione A.1 *Per ogni f e g in $\mathbf{L}^2(\Omega)$, vale la*

$$\text{Disuguaglianza di Schwarz: } |(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad (\text{A.3})$$

Dim. - Si noti che la proprietà c) implica che $(f, g) = 0$, se $f = 0$; per provarlo, basta porre $\alpha = 0$ nella $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$. La (A.3) è pertanto banale se $f = 0$ o $g = 0$; possiamo quindi supporre che $\|f\|_2$ e $\|g\|_2$ sono non nulli. Se poniamo $h = g - (f, g)f/\|f\|_2^2$, si vede subito che $(f, h) = 0$, per cui

$$\|g\|_2^2 = (g, g) = (h, h) + \frac{|(f, g)|^2}{\|f\|_2^2} \Rightarrow \frac{|(f, g)|^2}{\|f\|_2^2} \leq \|g\|_2^2$$

da cui segue la (A.3). ▀

Di qui segue, in particolare, che $\|\cdot\|$ soddisfa la disuguaglianza triangolare ed è quindi una norma. Infatti

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\Re(f, g) \leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2|(f, g)| \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$$

Per il Teorema A.1, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ è completo come spazio normato, quindi è un esempio di *spazio di Hilbert*, cioè di uno spazio vettoriale in cui sono definiti una norma ed un prodotto scalare con le stesse proprietà valide per $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Definizione A.1 *Se H è uno spazio di Hilbert e V è un sottoinsieme di H , si dice che V è un insieme di vettori ortonormali o un sistema ortonormale, se $(u, u) = 1, \forall u \in V$, e $(u, v) = 0$ per ogni coppia di elementi distinti di V . Si dice anche che V è un insieme di vettori ortonormali massimale, se non esiste in H alcun vettore ortogonale a tutti gli elementi di V .*

Definizione A.2 Uno spazio di Hilbert H si dice separabile se è separabile come spazio metrico, cioè se esiste un insieme $S \subset H$ al più numerabile, che è denso in H .

Un ruolo importante svolge il seguente teorema, per la cui dimostrazione si può vedere il cap. 4 di [1].

Teorema A.2 Se H è uno spazio di Hilbert separabile, gli insiemi di vettori ortonormali massimali sono al più numerabili.

Si noti che, se V è un sistema ortonormale, i suoi elementi sono tutti linearmente indipendenti. Infatti, se $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i$, $v_i \in V$, è una combinazione lineare finita di N elementi di V , allora $(v_j, x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (v_j, v_i) = \alpha_j$; quindi $x = 0 \iff \alpha_i = 0 \forall i$. Di qui segue subito che, se lo spazio di Hilbert H è di dimensione finita N come spazio vettoriale, allora i suoi sistemi ortonormali non possono contenere più di N elementi. Si può anzi dimostrare che i suoi sistemi ortonormali massimali hanno esattamente N elementi, sono cioè delle basi di H , dette *basi ortonormali*. Per verificarlo, supponiamo che $V_k = \{v_1, \dots, v_k\}$ sia un sistema ortonormale con $k < N$; sistemi di questo tipo si ottengono banalmente per $k = 1$, scegliendo un vettore $u \neq 0$ e ponendo $v_1 = u/\|u\|$. Poiché $k < N$, esiste certamente un vettore u che non è una combinazione lineare degli elementi di V_k ; pertanto, se poniamo $\tilde{v}_{k+1} = u - \sum_{i=1}^k (v_i, u)v_i$, $\tilde{v}_{k+1} \neq 0$ ed è facile verificare che $(\tilde{v}_{k+1}, v_i) = 0$ per $i = 1, \dots, k$. Basta pertanto aggiungere $v_{k+1} = \tilde{v}_{k+1}/\|\tilde{v}_{k+1}\|$ a V_k per ottenere un sistema ortonormale con $k + 1$ elementi; iterando questo procedimento, detto *procedimento di ortonormalizzazione di Schmidt*, si costruisce una base ortonormale a partire da una qualunque base di H .

Le considerazioni precedenti dimostrano in sostanza che tutti gli spazi di Hilbert di dimensione finita N sono isomorfi a \mathbb{C}^N . Se la dimensione è infinita, si può invece dimostrare che esistono infiniti spazi di Hilbert non isomorfi. Tuttavia, se lo spazio di Hilbert H è di dimensione infinita ma è anche separabile, i suoi sistemi ortonormali massimali, che sono numerabili per il Teorema A.2, hanno una proprietà importante, che giustifica la definizione equivalente di *basi ortonormali*, analogamente a quel che si fa per gli spazi di dimensione finita.

Teorema A.3 Se H è uno spazio di Hilbert separabile e $V = \{v_i, i \in \mathbb{N}\}$ è una base ortonormale di H , allora, per ogni $u \in H$,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i, \quad \alpha_i = (v_i, u) \tag{A.4}$$

la convergenza della serie dovendo intendersi nella metrica dello spazio, cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\| = 0$.

Da questo teorema discende facilmente la

$$\text{Identità di Parseval : } \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(v_n, u)|^2 \quad (\text{A.5})$$

Molti sistemi ortonormali sono associati a taluni operatori sullo spazio di Hilbert H nel modo seguente. Supponiamo che M sia un sottospazio lineare di H , supposto separabile, e che T sia un operatore lineare definito su M con valori in H , tale che

$$(v, Tu) = (Tv, u), \quad \forall u, v \in M \quad (\text{A.6})$$

e sia $V \in M$ il sottinsieme, eventualmente vuoto, degli autovettori di T :

$$V := \{\psi \in M : \psi \neq 0, \exists \lambda \in \mathbb{C} : T\psi = \lambda\psi\} \quad (\text{A.7})$$

I valori assunti da λ sono detti *autovalori* di T . Dato λ , l'insieme degli autovettori con autovalore λ forma, insieme al vettore 0, un sottospazio lineare di M , che indicheremo con M_λ . Indicheremo inoltre con M_V il sottospazio lineare di M generato da V

Proposizione A.2 *Gli autovalori di V sono tutti reali. Inoltre se M_λ ha dimensione finita per ogni autovalore λ , M_V contiene un sistema ortonormale massimale formato da elementi di V .*

Dim. - Per la (A.6), se $T\psi = \lambda\psi$, allora $0 = (\psi, T\psi) - (T\psi, \psi) = (\lambda - \lambda^*)\|\psi\|^2$; pertanto $\lambda = \lambda^*$, in quanto $\|\psi\| \neq 0$. Inoltre, se $T\psi_i = \lambda_i\psi_i$, $i = 1, 2$, e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora

$$0 = (\psi_2, T\psi_1) - (T\psi_2, \psi_1) = (\lambda_1 - \lambda_2^*)(\psi_2, \psi_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_2, \psi_1)$$

pertanto $(\psi_2, \psi_1) = 0$. Se $\dim(M_\lambda) = n_\lambda$, è possibile trovare in M_λ , tramite il procedimento di ortonormalizzazione di Schmidt, infiniti sistemi di n_λ autovettori ortonormali. Se se ne sceglie uno per ogni λ , si costruisce un sistema ortonormale in M_V , che è ovviamente massimale. ■

Un esempio notevole di spazio di Hilbert separabile è proprio lo spazio di funzioni $\mathbf{L}^2(\Omega)$. In tal caso gli autovettori si chiamano anche *autofunzioni* ed è facile vedere che, se l'operatore lineare T soddisfa la condizione (A.6), allora le autofunzioni possono essere scelte come funzioni reali. Inoltre, in molti casi importanti, lo spazio M su cui è definito l'operatore è denso in $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e, per di più, il sistema ortonormale costruito come nella Prop. A.2 è una base di $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Alcuni esempi notevoli di basi ortonormali di $\mathbf{L}^2(\Omega)$ di questo tipo sono discusse nei par. 1 e 2.

Riferimenti bibliografici

- [1] W. Rudin , *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1970.
- [2] E. Giusti, *Analisi Matematica*, Bollati Boringhieri, 2003.
- [3] G. Gallavotti, *Meccanica Elementare*, Boringhieri, 1980.
- [4] S. Salsa, *Equazioni a derivate parziali*, Springer-Verlag Italia, 2009.