

Complementi del corso di
Fisica Matematica 2

Giuseppe Benfatto
Università di Roma "Tor Vergata"

a. a. 2009-10

Indice

1	Serie di Fourier	2
1.1	Funzioni periodiche	2
1.2	Convergenza in media quadratica	7
1.3	Funzioni pari o dispari	9
1.4	Funzioni definite in un intervallo	10
1.4.1	Serie di soli seni	10
1.4.2	Serie di soli coseni	13
2	Equazione del calore	15
2.1	Condizioni di Dirichlet	15
2.2	Condizioni di Neumann	21
3	Trasformata di Fourier di funzioni continue	23
3.1	Introduzione formale	23
3.2	Funzioni di una variabile	24
3.3	Funzioni di più variabili.	30
3.4	Ulteriori proprietà della Trasformata di Fourier.	31
3.5	Applicazioni alle PDE	33
4	Complementi sull'equazione di Laplace.	36
4.1	Equazione di Laplace nel semispazio	36
4.2	Equazione di Laplace nella sfera.	37
5	Complementi sull'equazione del trasporto.	42
5.1	Equazione del trasporto non lineare.	42
6	Complementi sull'equazione delle onde.	44
6.1	Equazione di Klein-Gordon.	44
6.2	Velocità di gruppo.	46

1 Serie di Fourier

1.1 Serie di Fourier di funzioni periodiche, definite in \mathbb{R} .

Supponiamo che i numeri complessi $\{\tilde{c}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ siano tali che la serie trigonometrica $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$ è convergente in \mathbb{R} ad una funzione $\tilde{f}(x)$ a valori complessi

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (1.1)$$

La funzione $\tilde{f}(x)$ è allora una funzione periodica di periodo L , in quanto ciò è vero per le funzioni $e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$; la serie in questione si chiama la *serie di Fourier* di $\tilde{f}(x)$ con *coefficienti di Fourier* \tilde{c}_n .

Se $|\tilde{f}(x)|$ è anche integrabile nell'intervallo $[0, L]$, sono ben definite le costanti

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L dx \tilde{f}(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (1.2)$$

Si noti che l'intervallo di integrazione nella (1.2) può essere sostituito da qualunque intervallo di lunghezza L , senza cambiare il valore di c_n ; ciò può essere dimostrato facilmente usando la periodicità dell'integrando.

Sostituiamo ora la (1.1) nella (1.2) e supponiamo che sia possibile scambiare l'integrale con la serie; ciò accade, per esempio, se la serie di Fourier è uniformemente convergente (in tal caso $\tilde{f}(x)$ è anche continua). Si ha:

$$c_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_m \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{i\frac{2\pi(m-n)}{L}x} = \tilde{c}_n \quad (1.3)$$

in quanto

$$\frac{1}{L} \int_0^L dx e^{i\frac{2\pi(n-m)}{L}x} = \delta_{n,m} \quad (1.4)$$

Supponiamo ora che, invece della successione, sia data una funzione a valori complessi $f(x)$, continua e periodica di periodo L , e definiamo la successione \tilde{c}_n tramite la (1.2), con $f(x)$ al posto di $\tilde{f}(x)$. Se la successione soddisfa le condizioni precedentemente descritte, possiamo nuovamente definire una funzione $\tilde{f}(x)$ tramite la (1.1) e la (1.3) implica che

$$\int_0^L dx [f(x) - \tilde{f}(x)] e^{-i\frac{2\pi m}{L}x} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (1.5)$$

Viene pertanto naturale domandarsi se, almeno sotto opportune condizioni di regolarità, non sia anche vero che $f(x) = \tilde{f}(x)$.

Per analizzare questo problema, cominciamo con lo studiare alcune proprietà dei coefficienti di Fourier, definiti tramite la (1.2) con $f(x)$ al posto di $\tilde{f}(x)$:

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (1.6)$$

Cominciamo con l'osservare che per dare senso a questa definizione è sufficiente che $|f(x)|$ sia integrabile in $[0, L]$ e che, sotto questa sola ipotesi, la successione c_n è limitata per $|n| \rightarrow \infty$; infatti $|c_n| \leq L^{-1} \int_0^L dx |f(x)|$. È tuttavia facile dimostrare che, se $f(x)$ è abbastanza regolare, c_n tende a 0 per $|n| \rightarrow \infty$, tanto più velocemente quanto più $f(x)$ è regolare. Supponiamo, per esempio, che $f(x)$ sia di classe \mathbf{C}^1 ; allora possiamo operare una integrazione per parti nell'integrale della (1.2) ed otteniamo, se $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{i}{2\pi n} \int_0^L dx f(x) \frac{d}{dx} e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} = -\frac{i}{2\pi n} \int_0^L dx f'(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (1.7) \\ &\Rightarrow |c_n| \leq \frac{L}{2\pi n} \|f'\|_\infty \end{aligned}$$

avendo usato il fatto che sia $f(x)$ che $e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}$ assumono lo stesso valore in 0 e in L , in quanto ambedue periodiche di periodo L . La forma della (1.7) assicura che, se $f(x)$ è di classe \mathbf{C}^k (per cui $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(L)$ per ogni $j \leq k$), l'argomento precedente possa ripetersi k volte, guadagnando ogni volta una potenza di n nella stima. Abbiamo pertanto dimostrato che

$$f(x) \in \mathbf{C}^k \Rightarrow |c_n| \leq \left[\frac{L}{2\pi n} \right]^k \|f^{(k)}\|_\infty, n \neq 0 \quad (1.8)$$

Usando questa stima è molto facile dimostrare la proposizione seguente.

Proposizione 1.1 *Se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo L di classe \mathbf{C}^k , con $k \geq 2$, la serie di Fourier con coefficienti c_n definiti dalla (1.6) converge totalmente (quindi uniformemente) ad una funzione $\tilde{f}(x)$ di classe almeno \mathbf{C}^{k-2} . Inoltre, se $j \leq k-2$,*

$$\tilde{f}^{(j)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left[i \frac{2\pi n}{L} \right]^j e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (1.9)$$

cioè la serie di Fourier di $\tilde{f}(x)$ è derivabile termine a termine $k-2$ volte.

Meno ovvio è il seguente teorema.

Teorema 1.1 *Se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo L di classe \mathbf{C}^k , con $k \geq 2$, e $\tilde{f}(x)$ è definita come nella Prop. 1.1, allora*

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad (1.10)$$

Dim. - Per la Prop. 1.1, la serie di Fourier converge totalmente; pertanto, per dimostrare il teorema, basta dimostrare che

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x), \quad S_N(x) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{i \frac{2\pi n}{L} x} \quad (1.11)$$

Se sostituiamo la (1.6) nella (1.11), otteniamo

$$S_N(x) = \frac{1}{L} \int_0^L dy \delta_N(x-y) f(y) \quad (1.12)$$

dove

$$\delta_N(x-y) = \sum_{n=-N}^{+N} e^{-i \frac{2\pi n}{L} (x-y)} \quad (1.13)$$

Si noti che, se $f(x) = 1$, $c_n = \delta_{n,0}$, così che, per la (1.11), $S_N(x) = 1$; dalla (1.12) segue allora che

$$\frac{1}{L} \int_0^L dy \delta_N(x-y) = 1 \quad (1.14)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{L} \int_0^L dy \delta_N(x-y) [f(y) - f(x) + f(x)] \\ &= f(x) + \frac{1}{L} \int_0^L dy \delta_N(x-y) [f(y) - f(x)] \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ne segue che, per dimostrare il teorema, basta dimostrare che, per ogni x fissato,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^L dy \delta_N(x-y) [f(y) - f(x)] = 0 \quad (1.16)$$

Cominciamo col notare che, posto $\alpha = \frac{2\pi}{L}(x-y)$, si ha

$$\delta_N(x-y) = F_N(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^N e^{-i\alpha n} + \sum_{n=1}^N e^{i\alpha n} \quad (1.17)$$

Se $\alpha = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, si vede subito che $F_N(\alpha) = 2N + 1$. In caso contrario, usando la formula per la somma di una successione geometrica, si trova:

$$F_N(\alpha) = \sum_{n=0}^N e^{-i\alpha n} + \sum_{n=0}^N e^{i\alpha n} - 1 = 2\Re \left[\frac{e^{i\alpha(N+1)} - 1}{e^{i\alpha} - 1} \right] - 1 \quad (1.18)$$

Un semplice calcolo mostra quindi che, se $\alpha \neq 2\pi m$,

$$F_N(\alpha) = \frac{\sin[\alpha(N+1/2)]}{\sin(\alpha/2)} \quad (1.19)$$

Questa espressione ovviamente converge per $\alpha \rightarrow 2\pi m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$ (come è peraltro facile verificare direttamente), in quanto $F_N(\alpha)$ è, in base alla sua definizione (1.17), una funzione di classe \mathbf{C}^∞ . D'altra parte, $F_N(\alpha)$ è una funzione periodica di periodo 2π , al pari della funzione

$$g(\alpha) = f\left(x - \frac{L}{2\pi}\alpha\right) - f(x) \quad (1.20)$$

la quale risulta anche di classe \mathbf{C}^k , $k \geq 2$, per le ipotesi su $f(x)$, e nulla in $\alpha = 0$.

Si noti ora che, tramite un cambio di variabile, la (1.16) diventa:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\frac{2\pi x}{L}}^{\frac{2\pi x}{L} + 2\pi} d\alpha F_N(\alpha)g(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha F_N(\alpha)g(\alpha) = 0 \quad (1.21)$$

avendo usato, nel secondo passaggio, il fatto che $F_N(\alpha)g(\alpha)$ è periodica di periodo 2π , per cui l'integrale è eguale in ogni intervallo di lunghezza 2π . Inoltre, usando la (1.17), si vede che

$$F_N(\alpha)g(\alpha) = \sin(\alpha N)\psi(\alpha) + \cos(\alpha N)g(\alpha) \quad (1.22)$$

avendo definito

$$\psi(\alpha) = \begin{cases} \cos(\alpha/2) \frac{g(\alpha)}{\sin(\alpha/2)} & \text{if } \alpha \neq 0, \alpha \in [-\pi, \pi] \\ 2g'(0) & \text{if } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Facciamo vedere che la funzione $\psi(\alpha)$ è una funzione di classe \mathbf{C}^{k-1} in $[\pi, \pi]$. Definiamo

$$h(\alpha) = \begin{cases} g(\alpha)/\alpha & \text{if } \alpha \neq 0, \alpha \in [-\pi, \pi] \\ g'(0) & \text{if } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

$$s(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha/2}{\sin(\alpha/2)} & \text{if } \alpha \neq 0, \alpha \in [-\pi, \pi] \\ 1 & \text{if } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Si noti che $s(\alpha)$ è ben definita, in quanto $\sin(\alpha/2)$ non si annulla mai nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, eccetto che in $\alpha = 0$. Si ha

$$\psi(\alpha) = 2 \cos(\alpha/2) s(\alpha) h(\alpha) \quad (1.26)$$

È facile vedere che la funzione $h(\alpha)$ è di classe \mathbf{C}^{k-1} . Infatti, se $\alpha \neq 0$, la funzione è k volte differenziabile per motivi banali. Se $\alpha = 0$, basta usare per $g(x)$ lo sviluppo di Taylor nel punto $\alpha = 0$; poiché $g(0) = 0$, si ha

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= g'(0)\alpha + \sum_{j=2}^k \frac{\alpha^j}{j!} g^{(j)}(0) + o(\alpha^k) \\ h(\alpha) &= g'(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha^j}{(j+1)!} g^{(j+1)}(0) + o(\alpha^{k-1}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Nello stesso modo si vede che $s(\alpha)$ è di classe \mathbf{C}^∞ , al pari di $\cos(\alpha/2)$. Ciò prova l'asserto su $\psi(\alpha)$.

A questo punto, operando $k - 1$ integrazioni per parti successive, come nella dimostrazione della Prop. 1.1, ed usando il fatto che $\psi(\alpha)$ e $g(\alpha)$ sono periodiche di periodo 2π , al pari di $\sin(\alpha N)$ e $\cos(\alpha N)$, si può mostrare che esiste una costante C_k tale che

$$\left| \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha F_N(\alpha) g(\alpha) \right| \leq C_k N^{-(k-1)} \quad (1.28)$$

il che implica la (1.21), poiché $k \geq 2$. ■

Il teorema appena dimostrato pone delle condizioni molto restrittive, non sempre verificate nelle applicazioni. È tuttavia possibile dimostrare un teorema più generale, che citiamo senza dimostrazione. Premettiamo una definizione.

Definizione 1.1 *Una funzione $f(x)$, definita in \mathbb{R} , si dice \mathbf{C}^1 a tratti se*

- (i) *dato comunque un intervallo limitato, la funzione è continua e differenziabile ovunque, con l'eccezione di un numero finito di punti;*
- (ii) *se \bar{x} è un punto di discontinuità, allora esistono finiti $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^\pm} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^\pm} f'(x)$.*

Si noti che, se $f(x)$ è \mathbf{C}^1 a tratti e periodica di periodo L , i coefficienti di Fourier (1.6) sono ben definiti, ma il loro valore non dipende dal valore della funzione nei punti di discontinuità. Pertanto non è sicuramente possibile dimostrare che $\tilde{f}(x) = f(x)$, per ogni x ; questa eguaglianza deve essere necessariamente falsa in generale. Ci si può tuttavia chiedere se è possibile scegliere i valori di $f(x)$ nei punti di discontinuità in modo che $\tilde{f}(x) = f(x)$, per ogni x . Il teorema seguente dà una risposta positiva a questa domanda.

Teorema 1.2 *Sia data una funzione $f(x)$, definita in \mathbb{R} , periodica di periodo L e \mathbf{C}^1 a tratti, e si definiscano i coefficienti di Fourier tramite la (1.6). Allora, se $S_N(x)$ è definita come nella (1.11), e C_f indica l'insieme dei punti di continuità,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C_f \\ \frac{1}{2} [\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)] & \text{se } x \notin C_f \end{cases} \quad (1.29)$$

Inoltre, la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso che non contiene punti di discontinuità.

1.2 Convergenza in media quadratica

Ricordiamo che, nello spazio delle funzioni $f(x)$ a valori complessi definite nell'intervallo $[0, L]$, il cui modulo quadro sia integrabile, è possibile definire una norma $\|f\|_2$ e la metrica associata ($d(f, g) = \|f - g\|$), ponendo

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{L} \int_0^L dx |f(x)|^2 \quad (1.30)$$

Questa definizione si può estendere immediatamente allo spazio delle funzioni periodiche di periodo L , nel qual caso però l'intervallo di integrazione può essere scelto arbitrariamente, purché abbia lunghezza L . Si ottiene in questo modo uno spazio metrico, che indicheremo con \mathbb{L}^2 . Si può dimostrare che questo spazio non è completo se, come faremo noi in questo corso, gli integrali si intendono nel senso di Riemann. Per avere uno spazio metrico completo, bisognerebbe utilizzare l'integrazione di Lebesgue.

Ricordiamo inoltre che \mathbb{L}^2 è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma di funzioni e moltiplicazione di una funzione per un numero complesso. Su questo spazio vettoriale si può definire un prodotto scalare, ponendo

$$(f, g) = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x)^* g(x) \quad (1.31)$$

Questa definizione ha certamente senso, grazie alla disuguaglianza di Schwarz,

$$|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad (1.32)$$

ed è inoltre facile verificare che, se $f, g, g_1, g_2 \in \mathbb{L}^2$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, allora

- a) $(f, f) = 0 \iff f = 0$
- b) $(f, g)^* = (g, f)$
- c) $(f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 (f, g_1) + c_2 (f, g_2)$

Si noti infine che $(f, f) = \|f\|_2^2$.

Osserviamo ora che, se $f \in \mathbb{L}^2$, allora $|f(x)|$ (e quindi $f(x)$) è integrabile. Infatti, per la (1.32), se poniamo $\chi(x) = 1$,

$$\left(\frac{1}{L} \int_0^L dx |f(x)| \right) = \left(\frac{1}{L} \int_0^L dx |f(x)| \chi(x) \right) \leq \|f\|_2 \|\chi\|_2 = \|f\|_2$$

Ne segue che, se $f \in \mathbb{L}^2$, allora sono definiti i coefficienti di Fourier (1.6) e quindi la funzione $S_N(x)$ della (1.11). La seguente proposizione mostra come la serie di Fourier abbia un ruolo "speciale" nello spazio \mathbb{L}^2 . Notiamo preliminarmente che $S_N(x)$ può scriversi nella forma

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N (\chi_n, f) \chi_n(x), \quad \chi_n(x) = e^{i \frac{2\pi n}{L} x} \quad (1.33)$$

e che, per la (1.4), le funzioni $\chi_n(x)$ sono un sistema ortonormale, cioè

$$(\chi_n, \chi_m) = \delta_{n,m} \quad (1.34)$$

Proposizione 1.2 *Se $f \in \mathbb{L}^2$ e $S_N(x)$ è definito come nella (1.11), allora*

$$\|f - S_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \quad (1.35)$$

Inoltre, fissato N , posto $\mathbf{a} = (a_{-N}, a_{-N+1}, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$ e

$$F_N(\mathbf{a}, x) = \sum_{n=-N}^N a_n \chi_n(x)$$

si ha

$$\|f - S_N\|_2 = \min_{\mathbf{a}} \|f - F_N(\mathbf{a})\|_2 \quad (1.36)$$

che si esprime di solito dicendo che $S_N(x)$ è la migliore approssimazione nella media quadratica con polinomi trigonometrici della forma $\sum_{n=-N}^N a_n \chi_n(x)$.

Dim. - Per la (1.34) e la (1.31) ed usando che $c_n = (\chi_n, f)$,

$$\begin{aligned} \|f - F_N(\mathbf{a})\|_2^2 &= (f - \sum_{n=-N}^N a_n \chi_n, f - \sum_{n=-N}^N a_n \chi_n) = \\ &= (f, f) + \sum_{n=-N}^N [-a_n^* (\chi_n, f) - a_n (f, \chi_n) + |a_n|^2] = \\ &= (f, f) + \sum_{n=-N}^N [-a_n^* c_n - a_n c_n^* + |a_n|^2] = (f, f) - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^N |c_n - a_n|^2 \end{aligned}$$

da cui seguono subito la (1.35) e la (1.36), poiché $\sum_{n=-N}^N |c_n - a_n|^2$ è una quantità sempre positiva, eccetto che se $a_n = c_n$ per ogni n , nel qual caso $F_N(\mathbf{a}) = S_N$. ▀

L'eguaglianza (1.35) ha una importante conseguenza. Essa infatti implica che, senza supporre alcuna proprietà di regolarità per $f(x)$, purché essa sia di quadrato sommabile, la successione dei suoi coefficienti di Fourier è infinitesima per $|n| \rightarrow \infty$ (non solo limitata, come abbiamo già osservato); anzi la serie dei moduli quadri è addirittura convergente. Queste affermazioni seguono dal fatto che $\|f - S_N\|_2^2 \geq 0$, per cui

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad (1.37)$$

Ci si può a questo punto chiedere cosa succede se $N \rightarrow \infty$. Se la funzione è continua e \mathbf{C}^1 a tratti, il Teorema 1.2 ci dice che $S_N(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, da cui segue facilmente che $\|f - S_N\|_2^2 \rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$; vale pertanto l'*Identità di Parseval*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (1.38)$$

cioè la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ non solo è convergente, ma converge proprio a $\|f\|_2^2$. Se la funzione non è continua, dimostrare questo identità non è banale, ma essa è ancora vera. Si può anzi dimostrare che la (1.38) è vera sotto la sola ipotesi che $f \in \mathbb{L}^2$.

1.3 Serie di Fourier di funzioni pari o dispari.

Se $f(x) = -f(-x)$ e $\tilde{f}(x)$ è ben definita, la serie di Fourier può scriversi in una forma diversa, che risulta utile in alcune applicazioni. Si ha infatti

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} dx f(x) \left[e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} - e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \right] = \\ &= \frac{-2i}{L} \int_0^{L/2} dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Di qui segue che $c_0 = 0$ e che $c_n = -c_{-n}$, per cui, dopo alcuni passaggi, si ottiene:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.40)$$

$$b_n = 2ic_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.41)$$

In modo analogo, se $f(x) = f(-x)$, si trova

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.42)$$

$$a_n = 2c_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.43)$$

Questi risultati si esprimono talora dicendo che la serie di Fourier di una funzione dispari si può scrivere come una *serie di soli seni*, mentre la serie di Fourier di una funzione pari si può scrivere come una *serie di soli coseni*.

Questa terminologia segue dal fatto che, in generale, la serie di Fourier può scriversi nella forma

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.44)$$

con coefficienti

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.45)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1.46)$$

Queste formule si ricavano facilmente dalla (1.1), usando la formula

$$e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)$$

1.4 Serie di Fourier di funzioni definite in un intervallo.

Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia definita nell'intervallo $I = [a, a + L]$ e ivi integrabile. Se $f(a) = f(a + L)$, a partire da questa funzione si può costruire una funzione periodica di periodo L , definita in \mathbb{R} e coincidente con $f(x)$ in I , ponendo, nell'intervallo $[a + kL, a + (k + 1)L]$, $f(x) = f(x - kL)$. Se $f(a) \neq f(a + L)$, si può procedere nello stesso modo, partendo dalla restrizione di $f(x)$ all'intervallo $[a, a + L]$. Si noti che, in questo secondo caso, anche se la funzione $f(x)$ è regolare in I , il suo prolungamento è discontinuo nei punti $a + kL$; tuttavia, anche nel caso $f(a) = f(a + L)$ la regolarità del prolungamento è in generale inferiore a quella di $f(x)$. Si vede subito che, se $f \in \mathbf{C}^k(I)$, il prolungamento è di classe $\mathbf{C}^j(\mathbb{R})$, $j \leq k$, se e solo se $f^{(r)}(a) = f^{(r)}(a + L)$, con $r \leq j$. Si noti che questa condizione è sicuramente verificata se il supporto di $f(x)$ non contiene gli estremi di I .

In ogni caso, se si definisce la successione c_n come nella (1.6), ha senso considerare la serie di Fourier associata, i cui coefficienti dipendono esclusivamente dalla funzione $f(x)$. Tale serie, tuttavia, non è l'unica che gode di questa proprietà, in quanto si può pensare di estendere $f(x)$ ad un qualunque intervallo $\bar{I} \supset I$, con una prescrizione che dipende esclusivamente dai valori di $f(x)$ in I , e quindi prolungarla a tutto \mathbb{R} come funzione periodica di periodo $|\bar{I}|$. Vediamo due applicazioni di questa idea, utili nelle applicazioni.

1.4.1 Serie di soli seni

Supponiamo che $I = [0, L]$ (ci si può sempre ridurre a questo caso con un cambio di variabili) e poniamo $\bar{I} = [-L, L]$. Data una funzione $f(x)$ definita

in I , costruiamo una funzione $\bar{f}(x)$ definita in \bar{I} , ponendo

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } 0 \leq x < L \\ -f(-x) & \text{if } -L \leq x < 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

Questa funzione è dispari, per cui la sua serie di Fourier è una serie di soli seni, cioè una serie della forma (1.40), con $2L$ al posto di L , vale a dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.48)$$

con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.49)$$

Si noti che questa serie potrebbe convergere peggio della serie definita precedentemente, in quanto in generale $\bar{f}(x)$ ha una discontinuità in 0 e in $\pm L$. Condizione necessaria perché ciò non succeda è che $f(0) = f(L) = 0$; in tal caso possiamo anzi dimostrare che la regolarità di $f(x)$ pone delle buone proprietà di decrescita per i coefficienti di Fourier.

Proposizione 1.3 *Se la funzione $f(x)$ è di classe \mathbf{C}^k in $I = [0, L]$, con $k \geq 3$, e soddisfa le condizioni $f(0) = f(L) = 0$, allora, se la successione b_n è definita come nella (1.49), si ha*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.50)$$

la convergenza essendo uniforme in I . Inoltre

$$|b_n| \leq \frac{4L^2}{(\pi n)^3} \left[\|f^{(2)}\|_{\infty} + \|f^{(3)}\|_{\infty} \right] \quad (1.51)$$

per cui la serie (1.50) è derivabile una volta termine a termine.

Se si aggiungono le ulteriori condizioni

$$f^{(2j)}(0) = f^{(2j)}(L) = 0, \quad 0 < 2j \leq k-1 \quad (1.52)$$

allora

$$|b_n| \leq \frac{2L^{k-1}}{(\pi n)^k} \|f^{(k)}\|_{\infty} \quad (1.53)$$

per cui la serie (1.50) è derivabile termine a termine $k-2$ volte.

Dim. - Cominciamo con l'osservare che il prolungamento dispari $\bar{f}(x)$ a tutto \mathbb{R} di $f(x)$, definito dalla (1.47), è di classe \mathbf{C}^1 , come è facile verificare. Pertanto, grazie al Teorema 1.2, la serie (1.48) converge uniformemente a

$\bar{f}(x)$ in \mathbb{R} , quindi anche in I , dove $\bar{f}(x) = f(x)$. Notiamo poi che, se si operano tre successive integrazioni per parti nella (1.49), si trova

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{2}{\pi n} \left[f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \right]_0^L + \frac{2}{\pi n} \int_0^L dx f^{(1)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \\
&= \frac{2}{\pi n} \int_0^L dx f^{(1)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \\
&= \frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi n}\right)^2 \left[f^{(1)}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \right]_0^L - \frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi n}\right)^2 \int_0^L dx f^{(2)}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \\
&= -\frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi n}\right)^2 \int_0^L dx f^{(2)}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \tag{1.54} \\
&= \frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi n}\right)^3 \left[f^{(2)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \right]_0^L - \frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi n}\right)^3 \int_0^L dx f^{(3)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)
\end{aligned}$$

Di qui segue subito la stima (1.51).

Si noti ora che il primo termine nell'ultima riga del calcolo precedente è eguale, a meno di una costante, a $[(-1)^n f^{(2)}(L) - f^{(2)}(0)]/|n|^3$, per cui è sicuramente non nullo per n dispari, se $f^{(2)}(L) \neq f^{(2)}(0)$. Ne segue che la stima (1.51) non può essere migliorata in generale, se $k > 3$, operando ulteriori integrazioni per parti. Le cose ovviamente cambiano se valgono le ulteriori condizioni (1.52) ed è allora facile provare la stima (1.53). \blacksquare

Le condizioni di regolarità della funzione $f(x)$ in I possono essere attenuate senza perdere molto nella decrescita dei coefficienti b_n . Vale, per esempio, la seguente proposizione.

Proposizione 1.4 *Supponiamo che esista un numero finito di punti a_i , $i = 1, \dots, m$, con $0 \equiv a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m < L \equiv a_{m+1}$, tali che $f(x)$ è continua in $I = [0, L]$ e di classe \mathbf{C}^2 negli intervalli chiusi $I_i = [a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \dots, m$. Supponiamo infine che $f(0) = f(L) = 0$. Allora, se la successione b_n è definita come nella (1.49), si ha*

$$|b_n| \leq \frac{A}{n^2}, \quad A = 2 \left[\frac{L}{\pi n} \right]^2 \max_i [\|f^{(1)}\|_\infty^{(i)} + \|f^{(2)}\|_\infty^{(i)}] \tag{1.55}$$

dove si è indicato con $\|f^{(k)}\|_\infty^{(i)}$ il massimo di $|f^{(k)}(x)|$ in I_i .

Dim. - Supponiamo, per semplicità, che $m = 1$; la dimostrazione si estende facilmente al caso generale. Per ipotesi, la funzione $f(x)$, pur potendo non essere differenziabile nel punto a_1 , è di classe \mathbf{C}^2 sia in $[0, a_1]$ che in $[a_1, L]$. Pertanto, se riscriviamo la (1.49) nella forma

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{a_1} dx f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) + \frac{2}{L} \int_{a_1}^L dx f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

possiamo operare una integrazione per parti in ambedue gli integrali. Usando il fatto che $f(x)$ è continua in a_1 e nulla in 0 e L , è facile vedere che i termini di bordo, pur non essendo nulli, si cancellano, per cui

$$b_n = \frac{2}{L} \left[\frac{L}{\pi n} \right] \int_0^{a_1} dx f^{(1)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) + \frac{2}{L} \left[\frac{L}{\pi n} \right] \int_{a_1}^L dx f^{(1)}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Operando una seconda integrazione per parti, si ottiene allora la (1.55). ■

1.4.2 Serie di soli coseni

Data una funzione $f(x)$ definita in $I = [0, L]$, costruiamo una funzione $\bar{f}(x)$ definita in $\bar{I} = [-L, L]$, ponendo

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } 0 \leq x < L \\ f(-x) & \text{if } -L \leq x < 0 \end{cases} \quad (1.56)$$

Questa funzione è pari, per cui la sua serie di Fourier è una serie di soli coseni, cioè una serie della forma (1.42), con $2L$ al posto di L , vale a dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.57)$$

con

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.58)$$

Contrariamente a quanto succedeva nel caso precedente, ora $\bar{f}(x)$ è continua in tutto \mathbb{R} , se $f(x)$ è continua in I , in quanto $\bar{f}(-L) = \bar{f}(L)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \bar{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \bar{f}(x)$. Può tuttavia succedere che ci sia una discontinuità in $x = 0$ della derivata prima, anche se $f(x)$ è di classe \mathbf{C}^1 in I . Condizione necessaria perché ciò non succeda è che $f'(0) = f'(L) = 0$; in tal caso, come prima, possiamo anzi dimostrare che la regolarità di $f(x)$ pone delle buone proprietà di decrescita per i coefficienti di Fourier, migliori di quelle precedenti.

Proposizione 1.5 *Se la funzione $f(x)$ è di classe \mathbf{C}^k in $I = [0, L]$, con $k \geq 4$, e soddisfa le condizioni $f'(0) = f'(L) = 0$, allora, se la successione a_n è definita come nella (1.58), si ha*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.59)$$

la convergenza essendo uniforme in I . Inoltre

$$|a_n| \leq 2 \left[\frac{L}{\pi n} \right]^4 [\|f^{(3)}\|_\infty + \|f^{(4)}\|_\infty] \quad (1.60)$$

per cui la serie (1.59) è derivabile due volte termine a termine.

Se si aggiungono le ulteriori condizioni

$$f^{(2j+1)}(0) = f^{(2j+1)}(L) = 0, \quad 0 < 2j + 1 \leq k - 1 \quad (1.61)$$

allora

$$|a_n| \leq 2 \left[\frac{L}{\pi n} \right]^k \|f^{(k)}\|_\infty \quad (1.62)$$

per cui la serie (1.59) è derivabile termine a termine $k - 2$ volte.

Dim. - La dimostrazione è simile a quella della Prop. 1.3. Tuttavia, in questo caso, è possibile fare 3 integrazioni per parti, anziché 2, prima che compaia un termine di bordo non necessariamente nullo, sotto le sole condizioni $f'(0) = f'(L) = 0$. ■

Come nel caso della serie di soli seni, anche se si attenuano le condizioni di regolarità della funzione, fino ad ammettere che ci sia un numero finito di discontinuità di prima specie nelle derivate prime e seconde, ma non nella funzione stessa, si possono ancora trovare delle buone proprietà di decrescita dei coefficienti a_n . Procedendo come nella dimostrazione della Prop. 1.4, si trova che $|a_n| \leq A/n^2$, con una costante A che dipende dalla funzione.

2 L'equazione del calore in un intervallo

2.1 Condizioni di Dirichlet

Cominciamo con il considerare il problema omogeneo.

Proposizione 2.1 *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x) \quad (2.3)$$

Se la funzione $f(x)$ soddisfa le condizioni della Prop. 1.4 (per cui, in particolare, $f(0) = f(L) = 0$), allora esiste una soluzione della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-dn^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right), \quad d = D \frac{\pi^2}{L^2} \quad (2.4)$$

dove le costanti b_n sono definite come nella (1.49).

Se invece $f(x)$ non soddisfa la condizione al contorno (2.2), ma è \mathbf{C}^1 a tratti, allora la (2.4) è una soluzione solo se si sostituisce la condizione iniziale (2.3) con la condizione

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L dx |u(x, t) - f(x)|^2 = 0 \quad (2.5)$$

Dim. - La dimostrazione è basata sul *metodo di separazione delle variabili*, che consiste nel cercare inizialmente delle soluzioni della (2.1) a *variabili separate*, cioè della forma $u(x, t) = v(t)h(x)$, che soddisfano le condizioni al bordo (2.2). Sostituendo nella (2.1), troviamo che

$$\dot{v}(t)h(x) = Dv(t)h''(x) \Rightarrow \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = D \frac{h''(x)}{h(x)} \quad (2.6)$$

Il fatto che la seconda identità debba essere valida per tutti i valori di t e x per cui ha senso ($v(t) \neq 0$ e $h(x) \neq 0$), implica che deve esistere una costante λ tale che

$$\dot{v}(t) = D\lambda v(t) \quad (2.7)$$

$$h''(x) = \lambda h(x) \quad (2.8)$$

La condizione (2.2) coinvolge solo la funzione $h(x)$ ed impone che

$$h(0) = h(L) = 0 \quad (2.9)$$

Si tratta quindi di un problema simile al problema della ricerca degli autovalori e degli autovettori di una matrice; ci si aspetta quindi che λ non possa assumere un valore arbitrario. I valori di λ per cui la (2.8) ha soluzioni non nulle (a valori complessi) che soddisfano le (2.9) si dicono *autovalori dell'operatore derivata seconda nell'intervallo $(0, L)$ con condizioni di Dirichlet al bordo* e le soluzioni corrispondenti, definite ovviamente a meno di una costante arbitraria, *autofunzioni*.

Vogliamo ora far vedere che l'insieme degli autovalori è un insieme discreto di numeri reali negativi e che la costante arbitraria può essere scelta in modo che le autofunzioni siano reali. Notiamo che la soluzione generale, nel campo complesso, dell'equazione $h''(x) = \lambda h(x)$ è della forma

$$h(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}, \quad \mu = \sqrt{\lambda} \quad (2.10)$$

e le condizioni (2.9) impongono che

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Abbiamo quindi un sistema lineare omogeneo nelle incognite A e B , che ammette soluzioni non nulle solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, cioè se

$$e^{-\mu L} - e^{\mu L} = 0 \Rightarrow e^{2\mu L} = 1 \Rightarrow 2\mu L = i2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

ed in tal caso, $A = -B$ e $h(x) = A \sin(\pi n x / L)$. Ne segue che gli autovalori e le autofunzioni possono essere indicizzati con un intero $n \geq 1$ (cambiare n in $-n$ cambia solo segno ad A e, se $n = 0$, $h(x) = 0$) e che, se si sceglie $A = 1$,

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad h_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (2.13)$$

Se si pone $\lambda = \lambda_n$ nella (2.7), si trova che, a meno di una costante, $v(t) = e^{D\lambda_n t}$; quindi abbiamo trovato una famiglia numerabile di soluzioni a variabili separate, che possono scriversi, posto $d = D(\pi/L)^2$,

$$u_n(x, t) = e^{-dn^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n \geq 1 \quad (2.14)$$

Si noti ora che la funzione $u(x, t)$ della (2.4) è della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x, t)$$

Pertanto, se la successione b_n è limitata, essa è una soluzione della (2.1), visto che ciò è vero per le $u_n(x, t)$, in quanto la serie è uniformemente convergente e

differenziabile infinite volte termine a termine nell'aperto $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$. Ciò segue subito dall'osservazione che $b_n e^{-dn^2t}$ decresce più rapidamente di ogni potenza per $|n| \rightarrow \infty$, per ogni $t > 0$.

Notiamo infine che $u(x, t)$ è, come funzione di x , una serie di soli seni, quindi è la restrizione all'intervallo $[0, L]$ di una funzione periodica di periodo $2L$, che, per $t > 0$, è C^∞ su \mathbb{R} . Se $t = 0$, questa serie è ancora ben definita, almeno se la funzione $f(x)$ è C^1 a tratti; abbiamo infatti mostrato nella Prop. 1.3 che, in tal caso, $f(x)$ si può sviluppare in serie di soli seni con coefficienti b_n dati dalla (1.49) e $u(x, 0) = f(x)$. Ciò non è tuttavia sufficiente a garantire che la condizione iniziale (2.3) è soddisfatta, nel caso in cui $f(x)$ non è continua o non soddisfa le condizioni al contorno. Facciamo vedere che invece la condizione più debole (2.5) è soddisfatta, cioè che la *condizione iniziale è soddisfatta in media quadratica*.

Si noti che, per ogni $t > 0$, la funzione $u(x, t) - f(x)$ è una funzione C^1 a tratti, quindi di quadrato sommabile. Si può allora usare l'Identità di Parseval (1.38), applicata alla funzione $f(x)$, vista come funzione periodica di periodo $2L$; usando la (1.41) (con $2L$ al posto di L), si trova facilmente che

$$\frac{2}{L} \int_0^L dx |u(x, t) - f(x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(e^{-dn^2t} - 1)|^2 \equiv \Delta(t) \quad (2.15)$$

Per dimostrare la (2.5), dobbiamo pertanto dimostrare che, dato $\varepsilon > 0$, esiste δ_ε tale che $D(t) < \varepsilon$, se $0 < t < \delta_\varepsilon$. Sia pertanto dato $\varepsilon > 0$ e notiamo che, per l'Identità di Parseval applicata a $f(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ è convergente; esiste allora N_ε , tale che

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |b_n(e^{-dn^2t} - 1)|^2 \leq \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} |b_n|^2 < \varepsilon/2$$

D'altra parte, se $x > 0$, $1 - e^{-x} \leq x$, per cui, posto $A = \max_{n \geq 1} |b_n|$,

$$\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} |b_n(e^{-dn^2t} - 1)|^2 \leq (dAt)^2 \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} n^4 \leq (dAt)^2 N_\varepsilon^5 < \varepsilon/2$$

se $0 < t < \delta_\varepsilon \equiv (\varepsilon/2)^{1/2} N_\varepsilon^{-5/2} (dA)^{-1}$. Ne segue che $D(t) < \varepsilon$, se $0 < t < \delta_\varepsilon$, come richiesto.

Supponiamo ora che $f(x)$ soddisfi le condizioni della Prop. 1.4. Dalla (1.55) segue allora che esiste una costante A tale che $|b_n| \leq A/n^2$; pertanto

$$|u(x, t) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(e^{-dn^2t} - 1)| \leq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - e^{-dn^2t}) \equiv \Delta_1(t)$$

ed è facile dimostrare, procedendo come prima, che $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Delta_1(t) = 0$. Di qui segue subito che $u(x, t) - f(x) \rightarrow 0$, per $t \rightarrow 0^+$, e che anzi la convergenza è uniforme in $x \in [0, L]$. ■

Passiamo ora a studiare il problema non omogeneo. Un ruolo essenziale avrà l'uso del cosiddetto *Metodo di Duhamel*, che conviene illustrare nel caso dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, cioè dei sistemi della forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.16)$$

dove A è una matrice $n \times n$, mentre $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ sono vettori in \mathbb{C}^n . Come è ben noto, dati comunque \mathbf{x}_0 e la funzione $\mathbf{f}(t)$ di classe \mathbf{C}^1 , questo sistema ammette una ed una sola soluzione. Vogliamo fare vedere che la soluzione può scriversi nella forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0 + \int_0^t ds e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) \quad (2.17)$$

se definiamo, come è usuale, $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ per cui, in particolare,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{t^{n-1}}{n!} A^n = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = A e^{tA}$$

Pertanto, se deriviamo rispetto a t ambedue i membri della (2.17), otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A e^{tA} \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(t) + \int_0^t ds \frac{d}{dt} e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) \\ &= A \left[e^{tA} \mathbf{x}_0 + \int_0^t ds e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) \right] + \mathbf{f}(t) = A \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \end{aligned}$$

Il fatto che $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ è evidente, quindi la (2.17) è effettivamente la soluzione della (2.16).

Si noti anche che un teorema ben noto garantisce che la soluzione possa scriversi come la somma di una soluzione dell'equazione omogenea, cioè una funzione della forma $e^{tA} \mathbf{x}_1$, più una soluzione particolare. La (2.17) fa vedere che è possibile trovare una soluzione particolare che si annulla per $t = 0$, così che, in particolare, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0$. Questa soluzione si ottiene integrando rispetto ad s la soluzione del problema omogeneo, dipendente dal parametro $s \in [0, t]$,

$$\dot{\mathbf{w}}(t, s) = A \mathbf{w}(t, s), \quad \mathbf{w}(s, s) = \mathbf{f}(s) \quad (2.18)$$

la cui soluzione è appunto $e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s)$.

La possibilità di applicare il metodo di Duhamel all'equazione del calore segue dall'osservazione che, nella discussione precedente, ciò che contava era

solo il fatto che $\frac{d}{dt}e^{tA}\mathbf{x}_0 = A e^{tA}\mathbf{x}_0$, non la definizione esplicita dell'operatore lineare e^{tA} in funzione di A . Consideriamo allora lo spazio \mathfrak{F}_0 delle funzioni della variabile reale $x \in [0, L]$, di classe \mathbf{C}^2 e nulle al bordo ed indichiamo con Δ_0 l'operatore "derivata seconda". Definiamo poi formalmente l'operatore $e^{t\Delta_0}$ come l'operatore lineare definito così che, se $t > 0$ e $f \in \mathfrak{F}_0$,

$$[e^{t\Delta_0}f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-dn^2t} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (2.19)$$

dove b_n sono i coefficienti dello sviluppo di $f(x)$ come serie di seni. La Prop. 2.1 ci dice allora che

$$\frac{d}{dt}e^{t\Delta_0}f = \Delta_0 e^{t\Delta_0}f \quad (2.20)$$

Proposizione 2.2 *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \quad (2.21)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.22)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \varphi(x) \quad (2.23)$$

Se le funzioni $\varphi(x)$ e $f(x, s)$, $s \geq 0$, soddisfano le condizioni della Prop. 1.4 e $f(x, s)$ è anche continua come funzione di s , allora esiste una soluzione della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n e^{-dn^2t} + \int_0^t ds e^{-dn^2(t-s)} b_n(s) \right] \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (2.24)$$

dove le costanti a_n e $b_n(s)$ sono definite come nella (1.49), sostituendo $\varphi(x)$ e $f(x, s)$ al posto di $f(x)$, e d è definito come nella (2.4).

Dim. - Se indichiamo con $\mathbf{u}(t) \in \mathfrak{F}_0$ la funzione $u(x, t)$, con $\mathbf{f}(t)$ la funzione $f(x, t)$ e con $\boldsymbol{\varphi}$ la funzione $\varphi(x)$, allora la soluzione del problema può scriversi nella forma, simile alla (2.17),

$$\mathbf{u}(t) = e^{t\Delta_0}\boldsymbol{\varphi} + \int_0^t ds e^{(t-s)\Delta_0} \mathbf{f}(s) \quad (2.25)$$

Quindi la (2.24) è una conseguenza della (2.19) e del fatto che la serie che definisce $e^{(t-s)\Delta_0} \mathbf{f}(s)$

$$[e^{(t-s)\Delta_0} \mathbf{f}(s)](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(s) e^{-dn^2(t-s)} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

converge uniformemente in $s \in [0, t]$, per cui si può scambiare l'integrale con la serie nella (2.25). Per dimostrare quest'ultima affermazione, notiamo che, per la (1.55),

$$|b_n(s)| \leq \frac{4L}{(\pi n)^2} \max_{0 \leq s \leq t} \max_{0 \leq x \leq L} [|f^{(1)}(x, s)| + |f^{(2)}(x, s)|] \equiv \frac{A(t)}{n^2}$$

e che, se $s \in [0, t]$, $|e^{-dn^2(t-s)} \sin(\pi n x/L)| \leq 1$. ■

Osservazione 1 - Si noti che, se $\varphi(x)$ è di classe \mathbf{C}^2 , ma non soddisfa le condizioni al bordo, o addirittura di classe \mathbf{C}^1 a tratti, allora, come nella Prop. 2.1, la condizione iniziale è soddisfatta solo in media quadratica. Le condizioni di regolarità del termine di sorgente $f(x, t)$ possono invece essere attenuate senza modificare il risultato. Per esempio, se $f(x, t)$ è di classe \mathbf{C}^1 come funzione di x e continua come funzione di t , ma non soddisfa le condizioni al bordo, possiamo procedere nel modo seguente. Notiamo innanzi tutto che la serie di Fourier di $[e^{(t-s)\Delta_0} \mathbf{f}(s)](x)$ converge uniformemente, in x e s , se $s \in [0, t - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, per cui

$$\begin{aligned} \int_0^{t-\varepsilon} ds [e^{(t-s)\Delta_0} \mathbf{f}(s)](x) &= \int_0^{t-\varepsilon} ds \sum_{n=1}^{\infty} b_n(s) e^{-dn^2(t-s)} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \int_0^{t-\varepsilon} ds b_n(s) e^{-dn^2(t-s)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

D'altra parte, procedendo come nella dimostrazione della (1.55), si può vedere che esiste una funzione continua $A(t)$, tale che $|b_n(s)| \leq A(t)/n$, se $s \in [0, t]$. Quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t-\varepsilon} ds b_n(s) e^{-dn^2(t-s)} \right| &\leq \frac{A(t)}{n} \int_0^{t-\varepsilon} ds e^{-dn^2(t-s)} = \\ &= \frac{A(t)}{n^3} [e^{-n^2\varepsilon} - e^{-n^2t}] \leq \frac{A(t)}{n^3} \end{aligned}$$

Di qui segue che la serie nell'ultimo membro della (2.26) è uniformemente convergente per ogni $\varepsilon > 0$, e che converge termine a termine alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \int_0^t ds b_n(s) e^{-dn^2(t-s)} \quad (2.27)$$

anch'essa uniformemente convergente. È quindi facile dimostrare che esiste $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{t-\varepsilon} ds [e^{(t-s)\Delta_0} \mathbf{f}(s)](x)$ e che questo limite è dato proprio dalla serie (2.27).

Osservazione 2 - Se, nella Prop. 2.2, sostituiamo le condizioni al bordo nulle con le condizioni

$$u(0, t) = h_1(t) , \quad u(L, t) = h_2(t) \quad (2.28)$$

con $h_1(t)$ e $h_2(t)$ funzioni date di classe \mathbf{C}^1 per $t \geq 0$, la soluzione del problema può ridursi facilmente al problema con condizioni al bordo nulle. Basta definire la funzione $v(x, t)$, così che

$$u(x, t) = h_1(t) + \frac{x}{L}[h_2(t) - h_1(t)] + v(x, t) \quad (2.29)$$

Si vede subito che $v(0, t) = v(L, t) = 0$ e che

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + \tilde{f}(x, t) \quad (2.30)$$

con

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - \dot{h}_1(t) - \frac{x}{L}[\dot{h}_2(t) - \dot{h}_1(t)] \quad (2.31)$$

Infine

$$v(x, 0) = u(x, 0) - h_1(0) - \frac{x}{L}[h_2(0) - h_1(0)]$$

.

2.2 Condizioni di Neumann

Proposizione 2.3 *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) , \quad x \in (0, L) , \quad t > 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 , \quad \forall t \geq 0 \quad (2.33)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \varphi(x) \quad (2.34)$$

Se le funzioni $\varphi(x)$ e $f(x, s)$, $s \geq 0$, soddisfano le condizioni della Prop. 1.5, allora esiste una soluzione della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n e^{-dn^2 t} + \int_0^t ds e^{-dn^2(t-s)} b_n(s) \right] \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad (2.35)$$

dove le costanti a_n e $b_n(s)$ sono definite come nella (1.58), sostituendo $\varphi(x)$ e $f(x, s)$ al posto di $f(x)$.

Dim. - Si procede come nel caso delle condizioni di Dirichlet. Il punto di partenza è la ricerca delle autofunzioni, cioè delle soluzioni non nulle dell'equazione (2.8), questa volta però con condizioni al bordo

$$h'(0) = h'(L) = 0 \quad (2.36)$$

e dei corrispondenti autovalori. Procedendo come nella Prop. 2.1, si trova che

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad h_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n \geq 0 \quad (2.37)$$

Si ritrovano quindi gli autovalori precedenti, per $n \geq 1$, ma ora c'è un autovalore in più, $\lambda_0 = 0$, cui corrisponde un'autofunzione costante. Ne segue che la soluzione può scriversi come una serie di soli coseni e, procedendo come nella Prop. 2.1 e nella Prop. 2.2, si arriva alla (2.35), usando i risultati del §1.4.2. Omettiamo i dettagli. ■

3 Trasformata di Fourier di funzioni continue

3.1 Funzioni di una variabile: introduzione formale a partire dalla serie di Fourier

Come abbiamo visto nel §1, se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo T abbastanza regolare (almeno \mathbf{C}^1 a tratti), $f(x)$ può svilupparsi in *serie di Fourier*:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{ik_n x}, \quad \hat{f}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-ik_n x} f(x), \quad k_n = \frac{2\pi}{T} n \quad (3.1)$$

la serie essendo convergente nei punti di continuità (uniformemente negli intervalli chiusi in cui è continua).

Supponiamo ora che sia data una funzione $f(x)$ di classe \mathbf{C}^1 , definita sull'asse reale, e indichiamo con $f_T(x)$ la funzione periodica di periodo T (sicuramente \mathbf{C}^1 a tratti) tale che

$$f_T(x) = f(x), \quad x \in [-T/2, T/2] \quad (3.2)$$

Usando la (3.1), possiamo allora scrivere, $\forall x \in [-T/2, T/2]$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{T,n} e^{ik_n x}, \quad \hat{f}_{T,n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-ik_n x} f(x) \quad (3.3)$$

Supponiamo ora che la funzione $f(x)$ sia assolutamente integrabile su tutto l'asse reale; allora è ben definito il limite per $T \rightarrow \infty$ dell'integrale nella seconda delle (3.3), se si sostituisce k_n con un numero reale k fissato. D'altra parte $\Delta k = k_{n+1} - k_n = (2\pi)/T \rightarrow 0$, per $T \rightarrow \infty$; pertanto la serie nella (3.3) può essere pensata formalmente come una somma di Riemann

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta k \hat{f}_T(k_n) e^{ik_n x}, \quad \hat{f}_T(k_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T \hat{f}_{T,n} \quad (3.4)$$

e ci si aspetta che

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (3.5)$$

essendo

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx} \quad (3.6)$$

la *trasformata di Fourier* di f .

La dimostrazione rigorosa della congettura precedente, eventualmente sotto ulteriori ipotesi su f , è abbastanza complicata, ma esiste una trattazione più semplice, che non fa uso dell'analogia con la serie di Fourier.

3.2 Funzioni di una variabile: trattazione rigorosa.

Consideriamo l'insieme delle funzioni a valori complessi, definite su tutto l'asse reale, e indichiamo con $\mathbf{C}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle funzioni continue, con $\mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle funzioni continue che vanno a 0 all'infinito, con $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle funzioni limitate e con $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle funzioni il cui modulo è integrabile su \mathbb{R} . Nel seguito considereremo solo funzioni per cui l'integrazione può intendersi definita come integrazione di Riemann, per cui non sarà necessario fare ricorso alla teoria dell'integrale di Lebesgue.

Se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, è definita, $\forall k \in \mathbb{R}$, la trasformata di Fourier (3.6). Vale inoltre la proposizione seguente.

Proposizione 3.1 *Se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{f} \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$.*

Dim. - Dalla (3.6) segue che

$$|\hat{f}(k_1) - \hat{f}(k_2)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} |f(x)| |e^{-ik_1x} - e^{-ik_2x}| \quad (3.7)$$

Si noti che

$$|e^{-ik_1x} - e^{-ik_2x}| \leq \min\{2, |x||k_1 - k_2|\} \quad (3.8)$$

Inoltre, poiché $f \in \mathbf{L}^1$, $\int_{|x|>R} |f(x)| \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$. Pertanto, dato $\varepsilon > 0$, esiste R tale che

$$\int_{|x|>R} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} |f(x)| |e^{-ik_1x} - e^{-ik_2x}| \leq 2 \int_{|x|>R} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} |f(x)| \leq \varepsilon/2 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq R} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} |f(x)| |e^{-ik_1x} - e^{-ik_2x}| &\leq R|k_1 - k_2| \int_{|x|\leq R} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} |f(x)| \leq \\ &\leq \frac{R|k_1 - k_2|}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ne segue allora che, se $|k_1 - k_2| \leq \varepsilon\sqrt{2\pi}/(2R\|f\|_1)$, $|\hat{f}(k_1) - \hat{f}(k_2)| \leq \varepsilon$, e quindi che \hat{f} è uniformemente continua in \mathbb{R} .

Rimane da dimostrare che $|\hat{f}(k)| \rightarrow 0$, se $|k| \rightarrow \infty$. Poiché $e^{-i\pi} = -1$, $\hat{f}(k)$ si può anche scrivere nella forma

$$\hat{f}(k) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ik(x+\pi/k)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x - \pi/k) e^{-ikx} \quad (3.11)$$

per cui, sommando membro a membro questa equazione alla (3.6), si trova

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} [f(x) - f(x - \pi/k)] e^{-ikx} \quad (3.12)$$

Se $|k| \geq 1$, dato $\varepsilon > 0$, esiste R (indipendente da k) tale che

$$\frac{1}{2} \int_{|x|>R} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} |f(x) - f(x - \pi/k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.13)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \int_{|x|\leq R} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} |f(x) - f(x - \pi/k)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2R}{2\sqrt{2\pi}} \max_{|x|\leq R} |f(x) - f(x - \pi/k)| \end{aligned} \quad (3.14)$$

Poiché f è continua (e quindi uniformemente continua su ogni intervallo chiuso), esiste M tale che $\max_{|x|\leq R} |f(x) - f(x - \pi/k)| \leq (\varepsilon\sqrt{2\pi})/(2R)$, se $|k| \geq M$. Ne segue che $|\hat{f}(k)| \leq \varepsilon$, se $|k| \geq M$. ■

La Prop. 3.1 implica, in particolare, che $\hat{f}(k)$ è limitata, ma non garantisce che sia anche integrabile. Non ci possiamo quindi aspettare che la *formula di inversione* (3.5) sia valida in generale. Supponiamo pertanto che $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ e definiamo la funzione

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (3.15)$$

Ci proponiamo di dimostrare che, in effetti, $g(x) = f(x)$. Cominciamo col notare che, se $\lambda > 0$, la funzione $\hat{f}(k)e^{-\lambda|k|}$, in quanto prodotto di una funzione limitata per una funzione integrabile, è integrabile e che

$$g(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) e^{-\lambda|k|} e^{ikx} \quad (3.16)$$

come è facile dimostrare. Ben definita e limitata, se $\lambda > 0$, è anche la funzione

$$h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} e^{-\lambda|k|} \quad (3.17)$$

Pertanto, se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, è ben definita la convoluzione $f * h_\lambda(x) = \int dy f(x-y) h_\lambda(y)$, la quale gode di una importante proprietà, descritta dalla proposizione seguente.

Proposizione 3.2 *Se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, allora*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \hat{f}(k) e^{-\lambda|k|} \quad (3.18)$$

Dim. - Si osservi che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f * h_\lambda(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x-y)h_\lambda(y) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x-y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{iky} e^{-\lambda|k|} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Il fatto che f sia integrabile, al pari di $e^{-\lambda|k|}$, permette di invertire l'ordine di integrazione nelle variabili y e k , per cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f * h_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} e^{-\lambda|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} f(x-y) e^{-iky} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} e^{-\lambda|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} f(y) e^{-iky} \end{aligned} \quad (3.20)$$

da cui segue la (3.18), usando la (3.6). ▀

La funzione $h_\lambda(x)$ può essere calcolata esplicitamente. Infatti, poiché $e^{-\lambda|k|}$ è una funzione pari, si può scrivere

$$h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \cos(kx) e^{-\lambda|k|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk e^{-\lambda k} \cos(kx) \quad (3.21)$$

D'altra parte $x^2 \cos(kx) = -d^2/dk^2 \cos(kx)$; pertanto

$$x^2 h_\lambda(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk e^{-\lambda k} \frac{d^2}{dk^2} \cos(kx) \quad (3.22)$$

Le due derivate possono essere trasferite dal coseno sull'esponenziale con due integrazioni per parti. Poiché $d \cos(kx)/dk = 0$ e $\cos(kx) = 1$ in $k = 0$, si trova che

$$x^2 h_\lambda(x) = -\lambda^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk e^{-\lambda k} \cos(kx) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} = -\lambda^2 h_\lambda(x) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (3.23)$$

e quindi che

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{x^2 + \lambda^2} \quad (3.24)$$

Da questa espressione segue in particolare, con un facile calcolo, che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1 \quad (3.25)$$

La (3.25) permette di dimostrare che $h_\lambda(x)$ è una “delta approssimata” per $\lambda \rightarrow 0^+$, come indicato più precisamente nella proposizione seguente.

Proposizione 3.3 Se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{B}(\mathbb{R})$, allora

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * h_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} f(x) \quad (3.26)$$

Dim. - Si noti che, grazie alla (3.25),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * h_\lambda(x) - f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy h_\lambda(y) [f(x-y) - f(x)] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} [f(x-\lambda y) - f(x)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

D'altra parte, poiché f è limitata, esiste una costante C tale $|f(x)| \leq C$. Ne segue che, dato $\varepsilon > 0$, esiste R tale che

$$\frac{1}{\pi} \int_{|y|>R} \frac{dy}{1+y^2} |f(x-\lambda y) - f(x)| \leq \frac{2C}{\pi} \int_{|y|>R} \frac{dy}{1+y^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.28)$$

Inoltre, poiché f è continua, fissato comunque x , esiste δ tale che, se $0 < \lambda \leq \delta$ e $|y| \leq R$, $|f(x-\lambda y) - f(x)| \leq \varepsilon/2$, così che

$$\frac{1}{\pi} \int_{|y|\leq R} \frac{dy}{1+y^2} |f(x-\lambda y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.29)$$

Mettendo insieme le due ultime stime, si deduce che, fissato x e $\varepsilon > 0$, esiste δ tale che, se $0 < \lambda \leq \delta$, allora $|(2\pi)^{-1/2} g * h_\lambda(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. \blacksquare

La Prop. 3.2 e la (3.16) mostrano, se $g(x)$ è definita come nella (3.15), allora

$$g(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * h_\lambda(x) \quad (3.30)$$

Questo risultato, insieme alla Prop. 3.3, implica allora che effettivamente $g(x) = f(x)$, almeno se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{B}(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$.

Notiamo ora che la Prop. 3.1 dice in sostanza che la trasformata di Fourier può essere vista come una applicazione di $\mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ in $\mathbf{C}_0(\mathbb{R})$, che indicheremo con \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} : \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathbf{C}_0(\mathbb{R}), \quad \mathbf{F}(f) = \hat{f} \quad (3.31)$$

Facciamo vedere che, se si restringe \mathbf{F} allo spazio

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) : \hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})\} \quad (3.32)$$

allora \mathbf{F} è invertibile e la sua immagine è eguale a $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1 (Teorema di inversione della trasformata di Fourier)

\mathbf{F} è un'applicazione iniettiva e suriettiva di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ in sé stesso; inoltre, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, allora

$$f(x) = \mathbf{F}(\hat{f})(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (3.33)$$

Dim. - Notiamo innanzi tutto che, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, allora $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, per cui è definita la funzione

$$g(x) = \mathbf{F}(\hat{f})(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (3.34)$$

Poiché $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{B}(\mathbb{R})$, la discussione precedente mostra che $g(x) = f(x)$. Di qui segue, in particolare, che \mathbf{F} è iniettiva; infatti, se $\mathbf{F}(f_1) = \mathbf{F}(f_2)$, $\mathbf{F}(f_1 - f_2) = 0$ e quindi, per la (3.33), $f_1(x) - f_2(x) = 0$ per ogni x . Il fatto che \mathbf{F} sia suriettiva segue dall'osservazione che, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e si pone $\tilde{f}(x) = \mathbf{F}(f)(-x)$, allora $\tilde{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $f = \mathbf{F}(\tilde{f})$. \blacksquare

Notiamo ora che $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma di funzioni e moltiplicazione di una funzione per un numero complesso. Su questo spazio vettoriale possiamo introdurre, in analogia a quanto abbiamo fatto nel §1.2, un prodotto scalare, mediante la definizione

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x) g(x) \quad (3.35)$$

Questa definizione ha certamente senso se f e g sono elementi di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, in quanto, per la Prop. 3.1 e il teorema 3.1, $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \subset \mathbf{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathbf{B}(\mathbb{R})$ e quindi $fg \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ (fg è il prodotto di una funzione limitata per una funzione assolutamente integrabile, quindi è assolutamente integrabile). È inoltre facile verificare che, se $f, g, g_1, g_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, allora

- a) $(f, f) = 0 \iff f = 0$
- b) $(f, g)^* = (g, f)$
- c) $(f, c_1g_1 + c_2g_2) = c_1(f, g_1) + c_2(f, g_2)$

Come al solito, il prodotto scalare (\cdot, \cdot) permette di introdurre una struttura di spazio metrico in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, definendo prima la *norma* $\|f\|_2$ di f

$$\|f\|_2^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 \quad (3.36)$$

e quindi la *distanza* $d(f, g)$ fra gli elementi f e g di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

$$d(f, g) \equiv \|f - g\|_2 \quad (3.37)$$

È inoltre valida la *diseguaglianza di Schwarz*:

$$|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad (3.38)$$

Si può infine dimostrare, ma questo non è un risultato banale, che $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ non è uno spazio metrico completo.

Il Teorema seguente mostra che la trasformata di Fourier lascia invariante la struttura di spazio con prodotto scalare di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, per cui, in particolare, \mathbf{F} è una *isometria* di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, cioè $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Teorema 3.2 (*Teorema di Plancherel*) Se $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, allora

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) \quad (3.39)$$

Dim. - Basta osservare che, per la (3.33),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x) g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}^*(k) e^{-ikx} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}^*(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} g(x) e^{-ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \hat{f}^*(k) \hat{g}(k) \end{aligned} \quad (3.40)$$

avendo usato il fatto che è possibile invertire l'ordine delle due integrazioni, essendo integrabili assolutamente sia g che \hat{f} che $g\hat{f}$. ■

La trasformata di Fourier ha un'altra importante proprietà descritte dalla proposizione seguente.

Proposizione 3.4 Se $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, allora, posto $p = f \cdot g$ e $h = (2\pi)^{-1/2}(f * g)$, $p, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e

$$\hat{p}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\hat{f} * \hat{g})(k), \quad \hat{h}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k) \quad (3.41)$$

Dim. - Come è facile dimostrare, $p, h \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, per cui \hat{p} e \hat{h} sono ben definite; inoltre

$$\begin{aligned} \hat{p}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x)g(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} e^{isx} \hat{g}(s) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \hat{g}(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(k-s)x} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k-s)g(s) \end{aligned} \quad (3.42)$$

da cui segue facilmente che $\hat{p} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. Analogamente

$$\begin{aligned}\hat{h}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} f(x-y)g(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} g(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik(x-y)} f(x-y) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)\end{aligned}\quad (3.43)$$

ed anche $\hat{h} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. Ne segue che $p, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. ■

3.3 Funzioni di più variabili.

Il caso di funzioni di più variabili si tratta essenzialmente nello stesso modo. Se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, è ben definita la trasformata di Fourier

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}} f(x) e^{-ikx} \quad (3.44)$$

dove $x, k \in \mathbb{R}^n$ e $kx = \sum_{i=1}^n k_i x_i$. La Prop. 3.1, se $n > 1$, deve essere modificata nel modo seguente, se non si vogliono introdurre ulteriori ipotesi o tecniche meno elementari.

Proposizione 3.5 *Se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\hat{f} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Dim. - La dimostrazione della continuità si fa nello stesso modo ed il fatto che $\hat{f}(k)$ sia limitata segue dalla stima $|\hat{f}(k)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int dx |f(x)|$. ■

Definiamo ora, se $n > 1$ e h_λ è la funzione definita nella (3.17),

$$h_\lambda^{(n)}(x) = \prod_{i=1}^n h_\lambda(x_i), \quad \lambda > 0 \quad (3.45)$$

È facile verificare che

$$h_\lambda^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} H^{(n)}(\lambda k), \quad H^{(n)}(k) = \prod_{i=1}^n e^{-|k_i|} \quad (3.46)$$

È a questo punto un facile esercizio estendere le Prop. 3.2 e 3.3 al caso attuale, in quanto il fatto che $\hat{f}(k)$ fosse infinitesima per $|k| \rightarrow \infty$ non veniva mai usato, essendo solo importante che \hat{f} fosse continua e limitata. Si ottengono le proposizioni seguenti.

Proposizione 3.6 *Se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e $f * h_\lambda^{(n)}$ indica la convoluzione di f e $h_\lambda^{(n)}$,*

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} f * h_\lambda^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} H^{(n)}(\lambda k) \hat{f}(k) \quad (3.47)$$

Proposizione 3.7 *Se $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} f * h_\lambda^{(n)}(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} f(x) \quad (3.48)$$

Anche tutte le altre considerazioni del par. 3.2 si estendono facilmente, dopo avere definito

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)\} \quad (3.49)$$

In particolare si estendono in modo ovvio le definizioni di \mathbf{F} , prodotto scalare e di norma, i Teoremi 3.1 e 3.2 e la Prop. 3.4.

Teorema 3.3 *(Teorema di inversione della trasformata di Fourier)*

\mathbf{F} è un'applicazione iniettiva e suriettiva di $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ in sé stesso; inoltre, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$f(x) = \mathbf{F}(\hat{f})(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (3.50)$$

Teorema 3.4 *(Teorema di Plancherel) Se $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) \quad (3.51)$$

Proposizione 3.8 *Se $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, allora, posto $p = f \cdot g$ e $h = (2\pi)^{-n/2}(f * g)$, $p, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\hat{p}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\hat{f} * \hat{g})(k), \quad \hat{h}(k) = \hat{f}(k) \hat{g}(k) \quad (3.52)$$

Osservazione - Si noti che, nel caso $n = 1$, lo spazio (3.49) non è diverso da quello introdotto nel §3.2. Infatti la condizione che $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^1)$ implica che $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^1)$.

3.4 Ulteriori proprietà della Trasformata di Fourier.

Se $f \in \mathbf{C}^N(\mathbb{R}^n)$, lo spazio delle funzioni derivabili con continuità fino all'ordine N , e $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, con $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, e $|\underline{\alpha}| \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq N$, definiamo

$$D^{\underline{\alpha}} f(x) = \frac{\partial^{|\underline{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \quad (3.53)$$

L'utilità della trasformata di Fourier nello studio delle equazioni alle derivate parziali in \mathbb{R}^n è basata sulla proposizione seguente.

Proposizione 3.9 *Se $f \in \mathbf{C}^N(\mathbb{R}^n)$ ed esiste una costante C tale che*

$$|D^\alpha f(x)| \leq C(1 + |x|^{n+1})^{-1} \quad (3.54)$$

$\forall \underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, con $|\underline{\alpha}| \leq N$, allora, per ogni fissato $\underline{\alpha}$ tale che $|\underline{\alpha}| \leq N$, posto $g_{\underline{\alpha}}(x) = D^\alpha f(x)$, si ha

$$\hat{g}_{\underline{\alpha}}(k) = (ik_1)^{\alpha_1} \dots (ik_n)^{\alpha_n} \hat{f}(k) \quad (3.55)$$

Dim. - Segue facilmente dalla (3.44), tramite delle integrazioni per parti, grazie alla proprietà (3.54). Consideriamo in dettaglio il caso $|\underline{\alpha}| = 1$; il caso generale si tratta iterando lo stesso argomento.

Se $|\underline{\alpha}| = 1$, non è restrittivo supporre che $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ e $\alpha_n = 1$. La condizione (3.54) garantisce (in modo semplice) che l'integrale che definisce $\hat{g}(k)$ si possa calcolare eseguendo prima l'integrale nella variabile x_n , quindi quello nelle altre variabili. Inoltre, posto $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $\tilde{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) e^{-ikx} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n f(x) \frac{\partial}{\partial x_n} e^{-ikx} + \\ &+ e^{-i\tilde{k}\tilde{x}} \lim_{R \rightarrow \infty} [f(\tilde{x}, R) e^{-ik_n R} - f(\tilde{x}, -R) e^{+ik_n R}] \end{aligned}$$

ed il secondo termine a secondo membro è nullo, grazie sempre alla (3.54) (con $\underline{\alpha} = 0$). Ne segue subito che $\hat{g}_{\underline{\alpha}}(k) = ik_n \hat{f}(k)$. ■

Si noti che la Prop. 3.9 implica anche che esiste una costante C tale che

$$|\hat{f}(k)| \leq C(1 + |k|^N)^{-1} \quad (3.56)$$

Ciò segue facilmente dalla (3.55), dall'osservazione che $g_{\underline{\alpha}}(k)$ è limitata per ogni $\underline{\alpha}$ e dalla disuguaglianza $|k|^N \leq (|k_1| + \dots + |k_n|)^N$.

Un'altra proprietà della Trasformata di Fourier, simmetrica della precedente, è descritta dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.10 *Se la funzione $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n)$ e soddisfa la disuguaglianza*

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|^{n+N+1})^{-1} \quad (3.57)$$

allora $\hat{f} \in \mathbf{C}^N(\mathbb{R}^n)$.

Dim. - Basta dimostrare che, grazie alla condizione (3.57), le derivate rispetto alle variabili k_i di ordine $\leq N$ possono essere scambiate con l'integrale nella definizione (3.44) di $\hat{f}(k)$; omettiamo i dettagli. ■

3.5 Esempi di soluzione di equazioni alle derivate parziali basate sull'uso della Trasformata di Fourier.

L'uso della trasformata di Fourier permette in molti casi di ridurre la ricerca delle soluzioni di una equazione alle derivate parziali alla soluzione di un problema di equazioni differenziali ordinarie. Facciamo alcuni esempi.

Esempio 3.1 (Equazione del calore in \mathbb{R}^n) *Si cerca una funzione $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, tale che*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (3.58)$$

sotto l'ipotesi che $\hat{\varphi}(k)$ sia ben definita.

Il problema può essere affrontato supponendo che esistano soluzioni per cui la trasformata di Fourier di $u(x, t)$, pensata come funzione solo di x , è ben definita per ogni t e vale la formula di inversione (3.50); la validità di questa ipotesi verrà verificata a posteriori. Possiamo pertanto scrivere

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} \hat{u}(k, t) e^{ikx} \quad (3.59)$$

Supponiamo anche che la derivata rispetto a t possa scambiarsi con l'integrale nella (3.59); anche questa ipotesi verrà verificata alla fine. Ne segue che $\mathbf{F}(\partial u / \partial t) = \partial \hat{u} / \partial t$. D'altra parte, usando la Prop 3.9, è facile mostrare che $\mathbf{F}(\Delta u) = -k^2 \hat{u}$; pertanto, eguagliando le trasformate di Fourier dei due membri dell'equazione (3.58), si trova che la funzione $\hat{u}(k, t)$ deve soddisfare, per ogni k , l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t) \quad (3.60)$$

con condizione iniziale $\hat{u}(k, 0) = \hat{\varphi}(k)$. Ne segue che

$$\hat{u}(k, t) = \hat{\varphi}(k) e^{-k^2 t} \quad (3.61)$$

e questa espressione giustifica le ipotesi fatte per ottenere questo risultato. Inoltre, per la Prop. 3.8,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} dy G(x - y, t) \varphi(y) \quad (3.62)$$

con

$$G(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^n} e^{-k^2 t} e^{ikx} = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_i}{2\pi} e^{-k_i^2 t} e^{ik_i x_i} \quad (3.63)$$

D'altra parte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_i}{2\pi} e^{-k_i^2 t} e^{ik_i x_i} = e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_i}{2\pi} e^{-t(k_i - \frac{ix_i}{2t})^2} = e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_i}{2\pi} e^{-tk_i^2} \quad (3.64)$$

avendo effettuato nell'ultimo passaggio una traslazione del cammino di integrazione nella direzione dell'asse immaginario (nel piano complesso della variabile k_i), giustificata dall'analiticità della funzione e^{-tz^2} come funzione di z e dalla sua decrescita più che esponenziale nella direzione dell'asse reale. Infine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_i}{2\pi} e^{-tk_i^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\lambda^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \quad (3.65)$$

e pertanto

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (3.66)$$

Esempio 3.2 (Equazione di Laplace nel semispazio) *Si cerca una funzione $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, tale che, se poniamo $y = (x_1, \dots, x_n)$ (così che $x = (y, x_{n+1})$,*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}_+^{n+1} \equiv \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\} \\ u(y, 0) = \varphi(y), & \lim_{x_{n+1} \rightarrow +\infty} u(y, x_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (3.67)$$

sotto l'ipotesi che $\hat{\varphi}(k)$ sia ben definita.

Si procede come nell'esempio precedente, con x_{n+1} che prende il posto di t , ponendo

$$u(y, x_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} \hat{u}(k, x_{n+1}) e^{iky} \quad (3.68)$$

Se, nell'espressione precedente, la derivata seconda rispetto a x_{n+1} può essere scambiata con l'integrale, si trova che la funzione $\hat{u}(k, t)$ deve soddisfare l'equazione

$$-k^2 \hat{u}(k, t) + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t^2}(k, t) = 0, \quad \forall k \quad (3.69)$$

e le condizioni

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{\varphi}(k), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{u}(k, t) = 0 \quad (3.70)$$

È facile verificare che la soluzione di questo problema è

$$\hat{u}(k, t) = \hat{\varphi}(k) e^{-|k|t} \quad (3.71)$$

Pertanto, per la Prop. 3.8,

$$u(x) = u(y, x_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}^n} dy' H_n(y - y', x_{n+1}) \varphi(y') \quad (3.72)$$

con

$$H_n(y, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^n} e^{-|k|t} e^{iky} \quad (3.73)$$

$$e^{-|k|t} = \int_{\mathbb{R}^n} dy H_n(y, t) e^{-iky} \quad (3.74)$$

L'integrale nella definizione di $H_n(y, t)$ è calcolabile esplicitamente per ogni $n \geq 1$. Nel caso $n = 1$, il risultato si ottiene immediatamente usando la (3.17) e la (3.24); si trova

$$H_1(y, t) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{y^2 + t^2} \quad (3.75)$$

Se $n > 1$, l'espressione esplicita di $H_n(y, t)$ si ottiene più semplicemente con il *metodo della carica immagine*, che verrà spiegato più avanti, nel §4.1. Dalla (3.74), ponendo $k = 0$, si ottiene tuttavia direttamente un'altra importante proprietà della funzione $H_n(y, t)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} dy H_n(y, t) = 1, \quad \forall t > 0 \quad (3.76)$$

4 Complementi sull'equazione di Laplace.

4.1 Equazione di Laplace nel semispazio

Cerchiamo di risolvere il problema (3.67), estendendo al caso del semispazio la formula che esprime la soluzione in termini della funzione di Green nel caso di un dominio limitato, supponiamo cioè che esista una soluzione limitata, che possa scriversi nella forma

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dy K(x, y)\varphi(y), \quad K(x, y) = -\nabla_z G(x, z)|_{z=(y,0)} \cdot n(y) \quad (4.1)$$

dove $G(x, z)$ è la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta_z G(x, z) = -\delta(x - z), & x, z \in \mathbb{R}_+^{n+1} \\ G(x, z_y) = 0, & z_y = (y, 0), y \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.2)$$

Nel linguaggio dell'elettrostatica, la soluzione di questo problema si ottiene con il *metodo della carica immagine*. Fissato $x \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, sia $G(x, z)$, $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, il potenziale generato da una carica $+1$ posta nel punto x e da una carica -1 posta nel punto speculare rispetto al piano $x_{n+1} = 0$, cioè il punto $\tilde{x} = (y, -x_{n+1})$. Si ha

$$G(x, z) = \Gamma_{n+1}(x - z) - \Gamma_{n+1}(\tilde{x} - z) \quad (4.3)$$

$$\Gamma_m(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } m = 2 \\ \frac{1}{\alpha_m(m-2)|x|^{m-2}} & \text{se } m > 2 \end{cases} \quad (4.4)$$

dove α_m è la superficie della sfera di raggio 1 in \mathbb{R}^m .

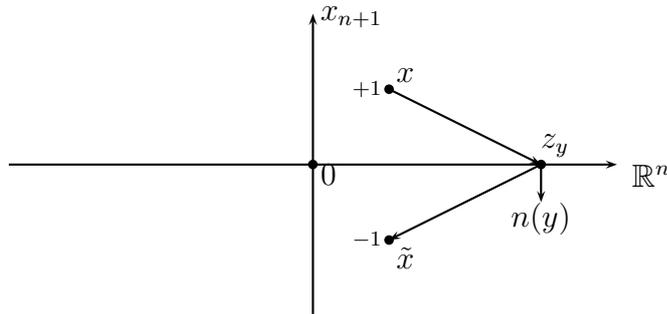


Figura 1: Metodo della carica immagine.

Se ora si restringe z a \mathbb{R}_+^{n+1} , $\Delta_z \Gamma_{n+1}(\tilde{x} - z) = 0$. Inoltre, se $z = (y, 0)$, $|x - z| = |\tilde{x} - z|$, per cui $G(x, z) = 0$. Quindi $G(x, z)$ soddisfa la (4.2).

Usando la definizione del *nucleo di Poisson* $K(x, y)$ nella (4.1), si trova, se $n > 1$ e si pone $z_y = (y, 0)$,

$$K(x, y) = \frac{(z_y - x) \cdot n(y)}{\alpha_{n+1}|x - z_y|^{n+1}} - \frac{(z_y - \tilde{x}) \cdot n(y)}{\alpha_{n+1}|\tilde{x} - z_y|^{n+1}} = \frac{2x_{n+1}}{\alpha_{n+1}|x - z_y|^{n+1}} \quad (4.5)$$

in quanto (vedi Fig. 1) $(z_y - x) \cdot n(y) = -(z_y - \tilde{x}) \cdot n(y) = x_{n+1}$ e $|x - z_y| = |\tilde{x} - z_y|$. È facile vedere che lo stesso risultato si ottiene se $n = 1$.

Se ora poniamo $x = (y', x_{n+1})$, $y' \in \mathbb{R}^n$, allora $|x - z_y|^2 = x_{n+1}^2 + |y' - y|^2$. Pertanto la soluzione del problema (3.67) si può scrivere nella forma (3.72), con

$$H_n(y, t) = \frac{2t}{\alpha_{n+1}(t^2 + y^2)^{(n+1)/2}} \quad (4.6)$$

purché si riesca a dimostrare che, sotto opportune ipotesi su $\varphi(y)$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} dy' H_n(y - y', t) \varphi(y') = \varphi(x) \quad (4.7)$$

Infatti la condizione $\Delta u(x) = 0$ è garantita dal procedimento utilizzato. Si noti anche che questa espressione coincide, se $n = 1$, con la (3.75), visto che $\alpha_2 = 2\pi$.

Procedendo come nella dimostrazione della proposizione analoga nel §4.2, è facile dimostrare, usando la (3.76), la proposizione seguente.

Proposizione 4.1 *Se la funzione $\varphi(y)$ è continua e limitata, allora la condizione (4.7) è soddisfatta, per cui la (3.72) è effettivamente una soluzione del problema (3.67).*

4.2 Equazione di Laplace nella sfera.

Sia \mathbf{B}_1 la sfera aperta di raggio 1 in \mathbb{R}^n , con centro nell'origine. Vogliamo risolvere l'equazione

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & |x| < 1 \\ u(y) &= g(y), & |y| = 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Come sappiamo, se questo problema ammette una soluzione di classe \mathbb{C}^2 nella chiusura di \mathbf{B}_1 , allora essa può scriversi nella forma

$$u(x) = \int_{\partial \mathbf{B}_1} d\sigma(y) K(x, y) g(y) \quad (4.9)$$

$$K(x, y) = -\nabla_z G(x, z)|_{z=y} \cdot n(y) \quad (4.10)$$

dove $G(x, z)$ è la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta_z G(x, z) = -\delta(x - z), & x, z \in \mathbf{B}_1 \\ G(x, y) = 0, & y \in \partial \mathbf{B}_1 \end{cases} \quad (4.11)$$

Cominciamo con il caso $n \geq 3$. Cercheremo di risolvere questo problema, adattando alla nuova geometria il metodo della carica immagine nel modo seguente. Definiamo, se $x \neq 0$, $G(x, z)$ come il potenziale generato da una carica $+1$ posta nel punto x e da una carica $-q(x)$ posta nel punto

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2} \quad (4.12)$$

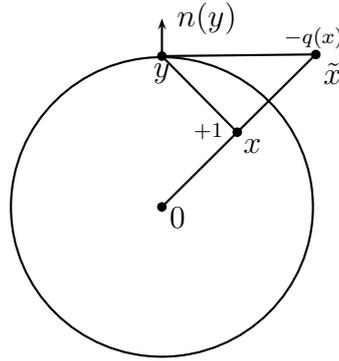


Figura 2: Il metodo della carica immagine per la sfera.

Si ha pertanto

$$G(x, z) = \Gamma_n(x - z) - q(x)\Gamma_n(\tilde{x} - z) \quad (4.13)$$

Poiché $\Delta_z \Gamma_n(\tilde{x} - z) = 0$, se $x, z \in \mathbf{B}_1$, dobbiamo vedere se è possibile determinare $q(x)$, in modo che $G(x, y) = 0$, se $y \in \partial \mathbf{B}_1$. Usando la (4.12) ed il fatto che $|y| = 1$, si ha:

$$(\tilde{x} - y)^2 = \frac{1}{|x|^2} + 1 - 2\frac{x \cdot y}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^2}(1 + x^2 - 2x \cdot y) = \frac{(x - y)^2}{|x|^2}$$

per cui $|x - y| = |x||\tilde{x} - y|$. Usando la (4.4) e ricordando che $n \geq 3$, si ha allora

$$G(x, y) = \frac{1}{\alpha_n(n-2)|x-y|^{n-2}}[1 - q(x)|x|^{n-2}] = 0 \Rightarrow q(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

Ne segue che

$$-\nabla_z G(x, z) = \frac{z - x}{\alpha_n|x - z|^n} - \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{z - \tilde{x}}{\alpha_n|\tilde{x} - z|^n}$$

Usando la (4.10) e ancora la $|x - y| = |x||\tilde{x} - y|$, si ha:

$$K(x, y) = \frac{[(y - x) - (|x|^2 y - x)] \cdot n(y)}{\alpha_n|x - y|^n} = \frac{(1 - |x|^2)y \cdot n(y)}{\alpha_n|x - y|^n}$$

Poiché $y \cdot n(y) = |y| = 1$, si ha infine

$$K(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{\alpha_n |x - y|^n} \quad (4.14)$$

Si noti che, contrariamente a quel che abbiamo visto nel caso del semispazio, il metodo della carica immagine non si può estendere al caso $n = 2$. In tal caso, tuttavia, è facile vedere che la funzione di Green è data dalla formula:

$$\begin{aligned} G(x, z) &= \Gamma_2(x - z) - \Gamma_2(|x|(\tilde{x} - z)) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log |x - z| + \frac{1}{2\pi} \log(|x||\tilde{x} - z|) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Infatti, l'identità $|x - y| = |x||\tilde{x} - y|$ è valida, se $|y| = 1$, anche per $n = 2$. Di qui segue inoltre, con un calcolo simile al precedente, che la (4.14) è valida anche per $n = 2$, in accordo con la formula ottenuta con il metodo di separazione delle variabili.

Vogliamo ora fare vedere che la (4.9) è effettivamente una soluzione del problema (4.8), per $n \geq 2$. Poiché la condizione $\Delta u(x) = 0$ è garantita dal procedimento utilizzato, ci rimane da verificare le condizioni al bordo, sotto opportune ipotesi di regolarità. La seguente proposizione mostra che è sufficiente supporre i dati al bordo continui, condizione che peraltro, come sappiamo, è anche sufficiente ad assicurare l'unicità.

Proposizione 4.2 *Se la funzione $g(y)$ è continua, allora, $\forall y_0 \in \partial \mathbf{B}_1$,*

$$\lim_{x \rightarrow y_0} \int_{\partial \mathbf{B}_1} d\sigma(y) K(x, y) g(y) = g(y_0) \quad (4.16)$$

Quindi la (4.8) è solubile e la (4.9) ne è la soluzione (unica), $\forall n \geq 2$.

Dim. - Cominciamo con l'osservare che la funzione $u(x) = 1$ è una soluzione del problema (4.8) con $g(y) = 1$. Dalla (4.9) si deduce allora che

$$\int_{\partial \mathbf{B}_1} d\sigma(y) K(x, y) = 1 \quad (4.17)$$

Quindi, dimostrare la (4.16) è equivalente a dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow y_0} \int_{\partial \mathbf{B}_1} d\sigma(y) K(x, y) [g(y) - g(y_0)] = 0 \quad (4.18)$$

Dobbiamo cioè dimostrare che, dato comunque $\varepsilon > 0$, si può determinare η in modo che, se $x \in \mathbf{V}_\eta = \{z \in \mathbf{B}_1 : |z - y_0| \leq \eta\}$, allora l'integrale della (4.18) è minore in modulo di ε .

Poiché $K(x, y_0)$ diverge se $x \rightarrow y_0$, conviene dividere il dominio di integrazione $\partial \mathbf{B}_1$ in due parti. La prima parte è un intorno I_δ di y_0 , tale che, se

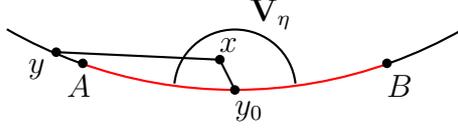


Figura 3: Intorni di y_0 nel caso $n = 2$.

$y \in I_\delta$, allora $|y - y_0| \leq \delta$ e $|g(y) - g(y_0)| \leq \varepsilon/2$; ciò è possibile in quanto abbiamo supposto $g(y)$ continua. La seconda parte, che indicheremo con J_δ è il complementare di I_δ . Nella Fig. 3, che fa riferimento al caso $n = 2$, l'insieme I_δ è rappresentato dall'arco AB .

Il fatto, essenziale nella dimostrazione, che

$$K(x, y) > 0$$

e la (4.17) implicano che, per ogni $x \in \mathbf{B}_1$,

$$\left| \int_{I_\delta} d\sigma(y) K(x, y)[g(y) - g(y_0)] \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{I_\delta} d\sigma(y) K(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ci rimane pertanto da dimostrare che, se $x \in \mathbf{V}_\eta$ e η è abbastanza piccolo, allora anche il contributo all'integrale dell'insieme J_δ si può stimare con $\varepsilon/2$. Cominciamo con lo scegliere η in modo che, se $x \in \mathbf{V}_\eta$ e $y \in J_\delta$ (all'esterno dell'arco AB in Fig. 3), allora $|y - x| \geq \delta/2$; $\eta \leq \delta/4$ va certamente bene, se δ è abbastanza piccolo. La (4.14) implica allora che

$$K(x, y) \leq \frac{2^n(1 + |x|)}{\alpha_n \delta^n} (1 - |x|)$$

D'altra parte $1 + |x| \leq 2$ e $1 - |x| = |y_0| - |x| \leq |y_0 - x| \leq \eta$. Inoltre la funzione $g(y)$ è limitata, in quanto continua su un compatto, per cui $|g(y) - g(y_0)| \leq 2\|g\|_\infty$. Pertanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{J_\delta} d\sigma(y) K(x, y)[g(y) - g(y_0)] \right| &\leq \eta \frac{2^{n+2}\|g\|_\infty}{\alpha_n \delta^n} \int_{J_\delta} d\sigma(y) K(x, y) \\ &\leq \eta \frac{2^{n+2}\|g\|_\infty}{\alpha_n \delta^n} \end{aligned}$$

Basta quindi scegliere

$$\eta \leq \frac{\alpha_n \delta^n}{2^{n+2}\|g\|_\infty} \frac{\varepsilon}{2}$$

per ottenere il risultato cercato. ▀

Consideriamo ora il problema (4.8) nella sfera \mathbf{B}_R di raggio R in \mathbb{R}^n , con centro nell'origine.

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0, & |x| < R \\ u(y) &= g(y), & |y| = R\end{aligned}\tag{4.19}$$

La soluzione di questo problema, che sappiamo essere unica (se esiste), si riduce molto facilmente alla soluzione della (4.8). Infatti, se la funzione $g(y)$ è continua su $\partial\mathbf{B}_R$, ciò è vero anche per la funzione $\tilde{g}(y) = g(Ry)$, definita su $\partial\mathbf{B}_1$. Esiste quindi una soluzione $\tilde{u}(x)$ della (4.8) con dato al bordo $\tilde{g}(y)$ ed è facile verificare che la funzione $u(x) = \tilde{u}(x/R)$ risolve la (4.19). Inoltre, usando la (4.9) e la (4.14), si trova:

$$\begin{aligned}u(x) &= \int_{\partial\mathbf{B}_1} d\sigma(y) K\left(\frac{x}{R}, y\right) g(Ry) = \int_{\partial\mathbf{B}_R} \frac{d\sigma(y)}{R^{n-1}} \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}\right) g(y) \\ &= \int_{\partial\mathbf{B}_R} K_R(x, y) g(y)\end{aligned}$$

con

$$K_R(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\alpha_n R |x - y|^n}\tag{4.20}$$

5 Complementi sull'equazione del trasporto.

5.1 Equazione del trasporto non lineare.

Sia I un intervallo dell'asse reale e $q(u)$ una funzione di classe \mathbb{C}^1 su I . Ci chiediamo se esistono soluzioni a valori in I , di classe \mathbb{C}^1 nell'aperto $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$, dell'equazione del trasporto con corrente $j(x, t) = q(u(x, t))$, cioè dell'equazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + q'(u) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Applichiamo il *metodo delle caratteristiche*, cerchiamo cioè di individuare una famiglia di curve nel semipiano $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0\}$, parametrizzata da $x_0 \in \mathbb{R}$, della forma

$$x = f(t, x_0), \quad f(0, x_0) = x_0 \quad (5.2)$$

e tali che su di esse la soluzione è costante, cioè tali che

$$u(f(t, x_0), t) = u(x_0, 0) = g(x_0), \quad \forall t \geq 0 \quad (5.3)$$

Questa condizione implica che:

$$0 = \frac{d}{dt}u(f(t, x_0), t) = \frac{\partial u}{\partial t}(f(t, x_0), t) + \frac{\partial u}{\partial x}(f(t, x_0), t) \frac{d}{dt}f(t, x_0) \quad (5.4)$$

Se si confronta la seconda eguaglianza con la (5.1) e si usa la (5.3), si trova:

$$\frac{d}{dt}f(t, x_0) = q'(u(f(t, x_0))) = q'(g(x_0)) \quad (5.5)$$

Quindi le caratteristiche esistono e sono definite dall'equazione

$$x = x_0 + r(x_0)t, \quad r(x_0) = q'(g(x_0)) \quad (5.6)$$

Supponiamo ora che le equazioni (5.6) siano invertibili per ogni $t \in [0, T)$, $T > 0$, e che il loro codominio sia tutto l'asse reale; supponiamo cioè che per ogni punto $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T)$ passi una ed una sola caratteristica. Allora, usando la (5.3), si vede subito che la (5.1) ammette, per $t \in [0, T)$, una soluzione, unica, che può esprimersi nella forma

$$u(x, t) = g(x - r(x_0)t) \quad (5.7)$$

dove x_0 è la soluzione della (5.6), pensata come un'equazione nell'incognita x_0 . Si noti, in particolare, che la forma della soluzione garantisce che, se $g(x)$ assume valori nell'intervallo $J \subset I$, lo stesso è vero per $u(x, t)$.

La solubilità della (5.1) è stata pertanto ridotta all'analisi della (5.6). Dobbiamo innanzi tutto verificare che la funzione $x_0 + r(x_0)t$ è monotona in senso stretto come funzione di x_0 . Se $q(u) \in \mathbb{C}^2(I)$ e $g(x) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$, ciò è garantito dalla condizione

$$dx/dx_0 = 1 + r'(x_0)t = 1 + q''(g(x_0))g'(x_0)t \neq 0, \quad \forall t < T \quad (5.8)$$

Questa condizione garantisce anche che il codominio della (5.6) è tutto \mathbb{R} . Infatti, se così non fosse, dx/dx_0 , in quanto derivata di una funzione monotona, dovrebbe tendere a 0, per $x_0 \rightarrow +\infty$ o $x_0 \rightarrow -\infty$, il che non può essere vero per più di un valore di t .

Di qui seguono subito alcune semplici proprietà dell'equazione (5.1).

- a) Se $q''(u) \geq 0 (\leq 0)$ in I e $g'(x_0) \geq 0 (\leq 0)$ in \mathbb{R} , allora la (5.7) risolve la (5.1) per ogni $t > 0$ e ogni $x \in \mathbb{R}$.
- b) Se $|q''(u)| \leq a$ e $|g'(x_0)| \leq b$, allora la (5.7) risolve la (5.1) per ogni $t \in (0, (ab)^{-1})$ e ogni $x \in \mathbb{R}$.

6 Complementi sull'equazione delle onde.

6.1 Equazione di Klein-Gordon.

Consideriamo l'equazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \Delta u(x, t) - m^2 u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Cerchiamo una soluzione applicando il metodo descritto nel §3.5, cerchiamo cioè una soluzione della forma

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} \hat{u}(k, t) e^{ikx} \quad (6.2)$$

con $\hat{u}(k, t)$ abbastanza regolare per poter scambiare le derivate con l'integrale. Procedendo come nell'esempio 3.1, si vede che $\hat{u}(k, t)$ deve soddisfare l'equazione

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(k, t)}{\partial t^2} = -\omega(k)^2 \hat{u}(k, t) \quad (6.3)$$

$$\omega(k) = \sqrt{c^2 k^2 + m^2} \quad (6.4)$$

La soluzione di questa equazione è della forma

$$\hat{u}(k, t) = A(k) e^{i\omega(k)t} + B(k) e^{-i\omega(k)t} \quad (6.5)$$

Le condizioni iniziali impongono che

$$A(k) + B(k) = \hat{\varphi}(k), \quad i\omega(k)[A(k) - B(k)] = \hat{h}(k) \quad (6.6)$$

dove $\hat{\varphi}(k)$ e $\hat{h}(k)$ sono le trasformate di Fourier (supposte ben definite e abbastanza regolari) dei dati iniziali. Ne segue che

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} [A(k) e^{i[kx + \omega(k)t]} + B(k) e^{i[kx - \omega(k)t]}] \quad (6.7)$$

con

$$A(k) = \frac{1}{2} \left[\hat{\varphi}(k) + \frac{\hat{h}(k)}{i\omega(k)} \right], \quad B(k) = \frac{1}{2} \left[\hat{\varphi}(k) - \frac{\hat{h}(k)}{i\omega(k)} \right] \quad (6.8)$$

Osservazioni

1) La funzione $e^{i[kx \pm \omega(k)t]}$ non rientra fra quelle per cui è definita la trasformata di Fourier, per cui non è possibile riscrivere i due termini che compongono

la (6.7) come convoluzioni di funzioni definite in \mathbb{R}^n . Nel caso $m = 0$ la (6.1) coincide con l'equazione delle onde e ciò è in accordo con la formula di Kirchoff, se $n \geq 2$, o la formula di D'Alembert, se $n = 1$.

2) Se $m = 0$ e $n = 1$, è tuttavia facile verificare che la (6.7) è equivalente alla forma generale della soluzione dell'equazione delle onde. In tal caso infatti

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} [A(k) e^{i[kx+|k|t]} + B(k) e^{i[kx-|k|t]}] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} [\tilde{A}(k) e^{ik(x+ct)} + \tilde{B}(k) e^{ik(x-ct)}] \end{aligned} \quad (6.9)$$

con $\tilde{A}(k) = A(k)$ e $\tilde{B}(k) = B(k)$, se $k > 0$, $\tilde{A}(k) = B(k)$ e $\tilde{B}(k) = A(k)$, se $k < 0$. Pertanto

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (6.10)$$

dove $F(x)$ e $G(x)$ sono le anti-trasformate di $\tilde{B}(k)$ e $\tilde{A}(k)$, rispettivamente.

3) Per ogni valore di $m \geq 0$ la (6.7) rappresenta la soluzione come uno sviluppo in onde piane monocromatiche di lunghezza d'onda $\lambda(k) = 2\pi/|k|$, periodo $T(k) = 2\pi/\omega(k)$ e velocità di propagazione

$$c(k) = \frac{\omega(k)}{|k|} = \frac{\lambda(k)}{T(k)} \quad (6.11)$$

Nella (6.7) queste onde sono descritte dalle funzioni $e^{i[kx \pm \omega(k)t]}$, le quali

- assumono lo stesso valore su tutti gli iper-piani ortogonali alla direzione di k (sono dei punti se $n = 1$), posti a distanza $\lambda(k)$ l'uno dall'altro;
- sono periodiche in t di periodo $T(k)$;
- la fase dell'onda $\varphi_k(x, t) = kx \pm \omega(k)t$ gode della proprietà che

$$\varphi_k \left(x_0 \mp c(k) \frac{k}{|k|} t, t \right) = \varphi_k(x_0)$$

Questa proprietà si esprime di solito dicendo che *i piani di fase fissata si muovono nella direzione di k con velocità di fase $c(k)$* ; l'onda $e^{i[kx - \omega(k)t]}$ si muove nello stesso verso di k e si chiama *progressiva*, mentre l'onda $e^{i[kx + \omega(k)t]}$ si muove nel verso opposto e si chiama *regressiva*.

4) La funzione $\omega(k)$ viene chiamata *relazione di dispersione*. Se $m = 0$, $\omega(k) = c|k|$ e si dice che *la dispersione è lineare*; in tal caso $c(k) = c$, per cui la velocità di fase è costante. Ne segue che, se si sostituisce nella (6.7) l'integrale di volume con l'integrale su di una retta passante per l'origine di versore n , si ottiene una funzione della forma (6.10), con $x \cdot n$ al posto di x , cioè la somma di due onde (non monocromatiche), una progressiva e una regressiva, che si muovono con velocità c nella direzione di n . Se $m > 0$, ciò non è vero; nel §6.2 faremo vedere come si possa associare in tal caso una velocità di propagazione ai pacchetti d'onda unidimensionali.

6.2 Velocità di gruppo.

Vogliamo ora analizzare come si comporta, al variare del tempo, una funzione a valori reali della forma

$$u(x, t) = \Re \int dk A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} \quad (6.12)$$

nel caso in cui $\omega(k)$ non è costante. Per semplicità considereremo il caso unidimensionale, quindi $x, k \in \mathbb{R}$. Se scriviamo $A(k)$ nella forma $a(k)e^{i\theta(k)}$, con $a(k) \geq 0$, possiamo rappresentare $u(x, t)$ nella forma

$$u(x, t) = \int dk a(k) \cos[kx - \omega(k)t + \theta(k)] \quad (6.13)$$

La prima osservazione da fare è che la diversa velocità di propagazione delle onde monocromatiche con diverso valore di k implica che il grafico di $u(x, t)$ come funzione di x ha una forma che dipende dal tempo in modo abbastanza complicato; in particolare esso non si può sicuramente ottenere da quello a $t = 0$ mediante una semplice traslazione. Per capire meglio cosa succede, supponiamo che $a(k)$ sia una funzione regolare a supporto compatto nell'intervallo $I = [k_0 - \varepsilon, k_0 + \varepsilon]$, con $0 < \varepsilon \ll k_0$, consideriamo cioè un *pacchetto d'onde* molto "stretto". Indichiamo inoltre con

$$\varphi(k, x, t) = kx - \omega(k)t + \theta(k) \quad (6.14)$$

la fase del coseno e supponiamo che $\omega''(k) \neq 0$, se $k \in I$.

È evidente che, se la fase ha una variazione molto grande al variare di k in I , per dei valori fissati di x e t , $u(x, t)$ è molto piccolo. D'altra parte, questa variazione è limitata da

$$2\varepsilon \max_{k \in I} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial k}(k, x, t) \right| \leq 2\varepsilon \left| \frac{\partial \varphi}{\partial k}(k_0, x, t) \right| + 2\varepsilon^2 M_I, \quad M_I = \max_{k \in I} \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k^2}(k, x, t) \right|$$

e dalla (6.14) segue che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k}(k, x, t) = x - \omega'(k)t + \theta'(k), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k^2}(k, x, t) = -\omega''(k)t + \theta''(k)$$

Pertanto, se poniamo

$$x = \omega'(k_0)t + \theta'(k_0) + \delta \quad (6.15)$$

la variazione della fase nell'intervallo I è minore di

$$2\varepsilon|\delta| + 2\varepsilon^2(|t|\|\omega''\|_I + \|\theta''\|_I)$$

dove

$$\|\omega''\|_I = \max_{k \in I} |\omega''(k)|, \quad \|\theta''\|_I = \max_{k \in I} |\theta''(k)|$$

Ne segue che, se δ e t soddisfano la condizione

$$2\varepsilon|\delta| + 2\varepsilon^2(|t|\|\omega''\|_I + \|\theta''\|_I) \leq \eta \ll \pi \quad (6.16)$$

$u(x, t)$ è bene approssimata dalla funzione

$$\tilde{u}(x, t) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dp a(k_0 + p) \cos\{\varphi(k_0, x, t) + p[x - \omega'(k_0)t + \theta'(k_0)]\} \quad (6.17)$$

cioè dall'espressione che si ottiene sostituendo nella (6.13) $\varphi(k, x, t)$ con il suo sviluppo di Taylor del primo ordine in k , intorno a $k = k_0$. Si noti che le (6.16) sono verificate, in particolare, se

$$|t|\|\omega''\|_I + \|\theta''\|_I \leq \frac{\eta}{4\varepsilon^2}, \quad |\delta| \leq \frac{\eta}{4\varepsilon}$$

La prima condizione è verificata se ε è abbastanza piccolo ($\|\theta''\|_I \leq \eta/(4\varepsilon^2)$) e

$$|t| \leq T_\varepsilon = \frac{\eta/(4\varepsilon^2) - \|\theta''\|_I}{\|\omega''\|_I} \quad (6.18)$$

Per quel che riguarda x , le (6.16) sono verificate almeno nell'intervallo con centro in $\omega'(k_0)t + \theta'(k_0)$ e ampiezza $\eta/(4\varepsilon)$. Questo intervallo si sposta rigidamente con velocità

$$v_g(k_0) = \omega'(k_0)$$

detta *velocità di gruppo*. Questo nome segue dal fatto che, in base alle considerazioni precedenti, la funzione $u(x, t)$, pur essendo una funzione oscillante, ha valori sensibilmente diversi da zero solo in un intervallo di ampiezza $O(1/\varepsilon)$, che si sposta con velocità $v_g(k_0)$, almeno fino a tempi di ordine $(1/\varepsilon)^2$.

Quando t diviene ancora più grande, questa descrizione della funzione $u(x, t)$ non è più valida. Ciò si spiega facilmente con l'osservazione che il pacchetto d'onde può decomporre in pacchetti ancora più piccoli, ad ognuno dei quali potremmo applicare le considerazioni precedenti. Supponiamo, per esempio, di "dividere il pacchetto in due", scrivendo la funzione $a(k)$ nella forma $a(k) = a_1(k) + a_2(k)$, in modo che il supporto di $a_1(k)$ sia l'intervallo $[k_0 - \varepsilon, k_0 + \varepsilon/4]$, mentre il supporto di $a_2(k)$ è l'intervallo $[k_0 - \varepsilon/4, k_0 + \varepsilon]$. Queste definizioni implicano che $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, per cui otteniamo una nuova descrizione di $u(x, t)$. Infatti, se indichiamo con k_i i centri dei due intervalli, le considerazioni precedenti ci direbbero che ognuno dei due pacchetti si muove con velocità $v_g(k_i)$ ed ha un'ampiezza circa doppia rispetto a quello "completo". Ovviamente le due descrizioni entrano in conflitto solo se passa un tempo sufficiente perché i due pacchetti si "separino", cioè abbiano percorso un tragitto delle stesse dimensioni della loro ampiezza. Poiché la differenza delle velocità dei due pacchetti è di ordine ε e la loro ampiezza è di ordine $1/\varepsilon$, ciò avviene dopo un tempo di ordine $1/\varepsilon^2$, in accordo con la condizione (6.18). A questo punto l'unica descrizione corretta è

la seconda, che descrive $u(x, t)$ come la somma di due pacchetti a supporto “quasi disgiunto” nello spazio.

Se si va ancora avanti col tempo, anche questi due pacchetti si decompongono e così via. Questo fenomeno si chiama *dispersione* e spiega il nome di *relazione di dispersione* per la funzione $\omega(k)$. Da quel che abbiamo detto, perché ci sia dispersione $\omega''(k)$ deve essere diversa da 0.

Per completare la descrizione dei pacchetti d'onde, è utile analizzare più in dettaglio la funzione $\tilde{u}(x, t)$ definita nella (6.17) nel caso particolare in cui $\theta(k) = 0$ e

$$a(k) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon), & |k - k_0| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In tal caso, se si pone $v_0 = \omega(k_0)/k_0$ e $v_g = v_g(k_0)$, si trova facilmente che:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dp \cos\{[k_0 x - \omega(k_0)t] + p[x - \omega'(k_0)t]\} \\ &= \cos[k_0(x - v_0 t)] \frac{\sin[\varepsilon(x - v_g t)]}{\varepsilon(x - v_g t)} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Nella Fig. 4 è disegnato il grafico di $\tilde{u}(x, t)$ al tempo $t = 0$ e al tempo $t = 10$, per un pacchetto con $\varepsilon = .1$, $k_0 = 2$, nel caso in cui la relazione di dispersione sia quella dell'equazione di Klein-Gordon con $m = 1$ e $c = 1$, vedi la (6.4), per cui $v_0 = 1.118$ e $v_g = 0.8944$. Nel disegno la linea rossa indica la posizione del punto $x = v_g t$, mentre quella nera indica il punto $x = v_0 t$ (le due linee si sovrappongono a $t = 0$).

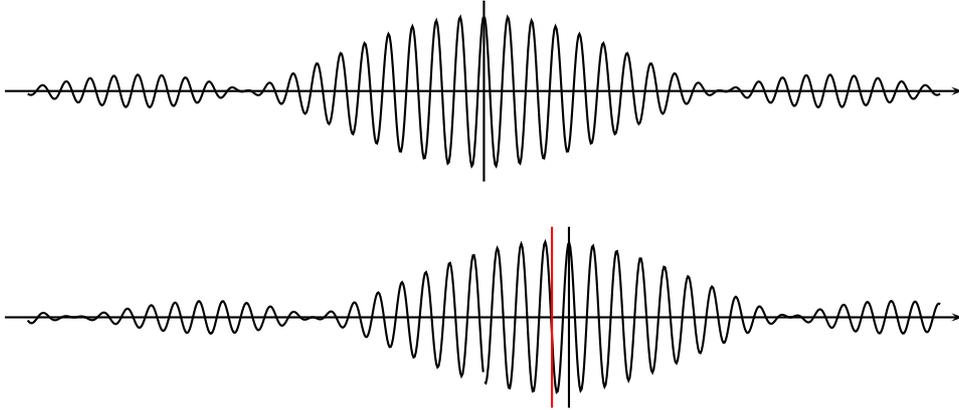


Figura 4: Grafico di $\tilde{u}(x, t)$ al tempo $t = 0$, in alto, ed al tempo $t = 10$.

La funzione $\tilde{u}(x, t)$ si può descrivere come un'onda monocromatica di lunghezza d'onda $2\pi/k_0$ e velocità di fase v_0 , la cui ampiezza varia lentamente su scala $1/\varepsilon$ ed ha un massimo che si sposta con velocità v_g . Si noti che il valore di $\tilde{u}(x, t)$ nel punto di in cui l'ampiezza è massima, cioè la funzione

$$F(t) = u(v_g t, t) = \cos[k_0(v_g - v_0)t]$$

è una senoide che compie una oscillazione completa in un tempo $T = 2\pi/|k_0(v_g - v_0)|$.