Compito di esonero di Fisica matematica 2 del 24 aprile 2013

1 Compito

Esercizio n. 1

Risolvere l'equazione

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ , \quad x \in (0,\pi)\ , t > 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = te^{-t}\ , \quad u(\pi,t) = 0\ , \quad \forall t \geq 0 \\
&\ u(x,0) = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

es1_13_1

e calcolare $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$.

Esercizio n. 2

Sia $\hat{f}(k)$ la trasformata di Fourier della funzione $f(x) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \bigcap \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$, definita nel modo seguente:

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & |x| \geq 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}
$$

Si dimostri che $\hat{f}(k)$ appartiene a $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$.
Suggerimento: fare vedere, tramite delle opportune integrazioni per parti, che, per $|k| \to \infty$,

$$
\hat{f}(k) = 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos k}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \tag{1.2}
$$

es1_13_1a

2 Soluzione

Esercizio n. 1

Per ridurci al problema con condizioni omogenee, poniamo

$$
u(x,t) = \bar{u}(x,t) + v(x,t) \tag{2.1}
$$

es1_13_2

dove $\bar{u}(x,t)$ è una funzione nota che soddisfa le condizioni al bordo $\bar{u}_x(0,t) = te^{-t}$ e $\bar{u}(\pi,t) = 0$; come sappiamo, è possibile scegliere $\bar{u}(x,t)$ della forma $\bar{u}(x,t) = a(t)x + b(t)$. Un facile calcolo mostra che

$$
\bar{u}(x,t) = te^{-t}(x-\pi)
$$

Si noti che $\bar{u}(x,0)=0$; pertanto, se si sostituisce la (2.1) nella (1.1), si trova che $v(x,t)$ è la soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
& v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) - \bar{u}_t(x,t) = v_{xx}(x,t) + (\pi - x)e^{-t}(1-t)\ , \quad t>0 \\
& v_x(0,t) = v(\pi,t) = 0\ , \quad t>0 \\
& v(x,0) = 0
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

es1_13_3

Come sappiamo (vedi la Prop. 2.4 delle Note), per risolvere questo problema dobbiamo preliminarmente risolvere il problema agli autovalori:

$$\psi''(x) = -\mu^2\psi(x)\ , \quad \psi'(0) = \psi(\pi) = 0\ , \quad \mu > 0$$

La soluzione generale della $\psi''(x) = -\mu^2\psi(x)$ è della forma $\psi(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$. La condizione $\psi'(0)=0$ implica che $A=0$, mentre la condizione $\psi(\pi)=0$ implica che $\cos(\mu\pi)=0$. Ne segue che μ può assumere solo i valori

$$\mu_n = \frac{2n+1}{2}\ , \quad n \geq 0 \tag{2.3}$$

es1_13_5

e che le autofunzioni corrispondenti (con autovalore $\lambda_n = -\mu_n^2$) $\psi_n(x) = B_n\cos(\mu_n x)$ formano un sistema ortonormale completo di funzioni a valori reali, se si scelgono le costanti B_n reali e tali che $\|\psi_n\| = 1$, cioè

$$B_n^2 \int_0^\pi \cos^2(\mu_n x) = B_n^2\,\frac{\pi}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad B_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Sviluppiamo pertanto la funzione $\pi - x$ in serie delle funzioni $\psi_n(x)$. Si ha

$$\pi - x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(\mu_n x)$$

con

$$
\begin{aligned}
b_n := c_n\sqrt{\frac{2}{\pi}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi (\pi - x)\psi_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos(\mu_n x) \\
&= \frac{2}{\pi\mu_n}\int_0^\pi (\pi - x)\frac{d}{dx}\sin(\mu_n x) = \frac{2}{\pi\mu_n}\int_0^\pi \sin(\mu_n x) = \frac{2}{\pi\mu_n^2}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

es1_13_6

Se ora risolviamo la (2.2) con il metodo di Duhamel, troviamo che la funzione $v(x,t)$ può scriversi nella forma

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n f_n(t)\ \cos(\mu_n x) \tag{2.5}$$

es1_13_4

con

$$f_n(t) = \int_0^t ds\, e^{-\mu_n^2(t-s)}e^{-s}(1-s) = e^{-\mu_n^2 t}\int_0^t ds\, e^{(\mu_n^2-1)s}(1-s)$$

purché si possa dimostrare che la serie nella (2.5) è uniformemente convergente e derivabile termine a termine almeno una volta rispetto a t e almeno due volta rispetto a x

Si noti ora che $\mu_n^2 \neq 1$, per ogni n; Pertanto

$$
\begin{aligned}
f_n(t) &= e^{-\mu_n^2 t}\left[\frac{1}{\mu_n^2-1}\int_0^{(\mu_n^2-1)t} ds\, e^s - \frac{1}{(\mu_n^2-1)^2}\int_0^{(\mu_n^2-1)t} ds\, s\, e^s\right] \\
&= \frac{e^{-t}-e^{-\mu_n^2 t}}{\mu_n^2-1} - \frac{e^{-\mu_n^2 t}}{(\mu_n^2-1)^2}\left[(\mu_n^2-1)te^{(\mu_n^2-1)t} - e^{(\mu_n^2-1)t}+1\right] \\
&= \frac{(1-t)e^{-t}-e^{-\mu_n^2 t}}{\mu_n^2-1} + \frac{e^{-t}-e^{-\mu_n^2 t}}{(\mu_n^2-1)^2}
\end{aligned}
$$

Di qui si deduce facilmente, usando la (2.4) e la (2.3), che esistono $c_0, c_1 > 0$, tali che $|f_n(t)| \le c_0(n+1)^{-2}e^{-t/4}$ e $|b_n f_n(t)| \le c_1(n+1)^{-4}e^{-t/4}$; una stima simile è anzi valida anche per $f_n^{(k)}(t)$, per ogni intero k, con c_1 dipendente da k. Ne segue che la serie (2.5) è uniformemente convergente in x e t ed è derivabile termine a termine infinite volte rispetto a t e due volte rispetto a x, il che prova che la (2.5) è effettivamente la soluzione del problema (2.2). Inoltre

$$
|v(x,t)| \le c_1\, e^{-t/4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0
$$

Poiché anche $\bar{u}(x,t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$, $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$.

Esercizio n. 2

Come sappiamo, le ipotesi su $f(x)$ garantiscono che $\hat{f}(k)$ è ben definita, continua e limitata, e che anzi $\hat{f}(k) \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$. Quindi, per dimostrare che $\hat{f}(k) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, è sufficiente dimostrare che, per $|k| \to \infty$, $\hat{f}(k) = O(|k|^{-\alpha})$, con $\alpha > 1$, come mostra appunto la (1.2).

Poiché $f(x)$ è una funzione pari, la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$ è data dalla funzione

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= 2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\cos(kx)f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 dx\,\cos(kx) + g(k) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin k}{k} + g(k)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

es1_13_8

con

$$
\begin{aligned}
g(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^{+\infty} dx\,\frac{\cos(kx)}{x^3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}\frac{d}{dx}\sin(kx) \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin k}{k} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{3}{k}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}\sin(kx)
\end{aligned}
$$

Pertanto, per la (2.6),

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{3}{k^2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}\,\frac{d}{dx}\cos(kx) \\
&= 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos k}{k^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{12}{k^3}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^5}\,\frac{d}{dx}\sin(kx) \\
&= 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos k}{k^2} + 12\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin k}{k^3} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{60}{k^3}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^6}\sin(kx)
\end{aligned}
$$

da cui segue la (1.2).