Compito di esonero di Fisica matematica 2 del 4 giugno 2013

1 Compito

Si consideri l'equazione

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) = x^2 \ , &\quad r = \sqrt{x^2+y^2} \in (1,R) \ , \quad R > 1 \\
u(x,y) = 0 \ , &\quad r = 1 \\
\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) + \alpha\, u(x,y) = 0 \ , &\quad r = R \ , \quad \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

1) Fare vedere che il problema ammette una soluzione unica, se $\alpha \geq 0$ (cosa che peraltro sappiamo essere vera in generale per domini limitati regolari e condizioni al bordo miste), e calcolarla.

2) Discutere, ancora nel caso $\alpha \geq 0$, il comportamento asintotico di $v(r,\theta)$ per $R \to \infty$, ad r fissato, se $v(r,\theta)$ è la soluzione scritta in coordinate polari.

3) Far vedere che, per alcuni valori di $\alpha < 0$ e R, la soluzione non esiste, oppure esiste, ma non è unica.

2 Soluzione

1) Come sappiamo, $v(r,\theta)$ deve essere della forma

$$v(r,\theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \big[a_n(r)\cos(n\theta) + b_n(r)\sin(n\theta)\big] \tag{2.1}$$

dove le funzioni $a_n(r)$ e $b_n(r)$ soddisfano le equazioni

$$a_n''(r) + \frac{1}{r}a_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}a_n(r) = \frac{r^2}{2}(\delta_{n,0} + \delta_{n,2}) \ , \quad n \geq 0 \tag{2.2}$$

$$b_n''(r) + \frac{1}{r}b_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}b_n(r) = 0 \ , \quad n \geq 1 \tag{2.3}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $x^2 = [1+\cos(2\theta)]/2$. Bisogna inoltre imporre le condizioni al bordo:

$$a_0(1) = 0 \ , \quad a_0'(R) + \alpha\, a_0(R) = 0 \tag{2.4}$$

e, se $n \geq 1$

$$a_n(1) = b_n(1) = 0 \ , \quad a_n'(R) + \alpha a_n(R) = b_n'(R) + \alpha b_n(R) = 0 \tag{2.5}$$

Come sappiamo, la soluzione generale della (2.3) è della forma

$$b_n(r) = \frac{C_n}{r^n} + D_n r^n$$

e le condizioni (2.5) implicano le identità

$$C_n + D_n = 0 \;, \quad -\frac{nC_n}{R^{n+1}} + nD_n R^{n-1} + \alpha\left(\frac{C_n}{R^n} + D_n R^n\right) = 0$$

equivalenti a

$$C_n = -D_n \;, \quad C_n[-n(1+R^{2n}) - \alpha R(R^{2n}-1)] = 0 \tag{2.6}$$

Se $\alpha \geq 0$, la seconda di queste identità può essere verificata solo se $C_n = 0$, in quanto $R > 1$; quindi $b_n(r) = 0$, per ogni $n \geq 1$. Lo stesso calcolo permette di dimostrare che $a_n(r) = 0$, se $n \neq 0, 2$. Ci rimangono da studiare le equazioni per $a_0(r)$ e $a_2(r)$.

Consideriamo l'equazione per $a_0(r)$. In tal caso la soluzione della (2.2) è della forma

$$a_0(r) = A_0 + B_0 \log r + \bar{a}_0(r)$$

dove $\bar{a}_0(r)$ è una soluzione particolare, che si intuisce facilmente possa prendersi della forma $\bar{a}_0(r) = K_0 r^4$. É facile verificare che ciò è vero e che $K_0 = 1/32$; le condizioni (2.5) implicano pertanto le identità:

$$A_0 + K_0 = 0 \;, \quad \frac{B_0}{R} + 4K_0R^3 + \alpha[A_0 + B_0 \log R + K_0 R^4] = 0$$

equivalenti a

$$A_0 = -K_0 > 0 \;, \quad B_0\left[\frac{1}{R} + \alpha \log R\right] + 4K_0R^3 + \alpha K_0(R^4 - 1) = 0 \tag{2.7}$$

Quindi, se $\alpha \geq 0$, $1/R + \alpha \log R \geq 1/R$, in quanto $R > 1$; ne segue che

$$a_0(r) = K_0(r^4 - 1) + B_0 \log r \;, \quad B_0 = -\frac{4K_0R^4 + \alpha K_0 R(R^4-1)}{1 + \alpha R \log R} \tag{2.8}$$

Consideriamo infine l'equazione per $a_2(r)$. In tal caso, se si sceglie la soluzione particolare come nel caso precedente, la soluzione generale della (2.2) è della forma

$$a_2(r) = \frac{A_2}{r^2} + B_2 r^2 + K_2 r^4 \;, \quad K_2 = \frac{1}{24}$$

e le condizioni (2.5) implicano le identità:

$$A_2 + B_2 + K_2 = 0 \;, \quad -\frac{2A_2}{R^3} + 2B_2R + 4K_2R^3 + \alpha\left[\frac{A_2}{R^2} + B_2R^2 + K_2R^4\right] = 0$$

equivalenti a

$$
\begin{gathered}
B_2 = -A_2 - K_2 \\
A_2\Big[-\frac{2}{R^3} + \frac{\alpha}{R^2} - 2R - \alpha R^2\Big] + 4K_2R^3 + \alpha K_2 R^4 - K_2(2R + \alpha R^2) = 0
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Il coefficiente di A_2 non può annullarsi, se $\alpha \geq 0$ e $R > 1$. Ne segue che

$$
a_2(r) = A_2 \left[\frac{1}{r^2} - r^2\right] + K_2(r^4 - 1) \tag{2.10}
$$

con A_2 definito dalla (2.9).

2) Per $R \to \infty$, le costanti B_0 e A_2, che compaiono nella (2.8) e nella (2.10) sono divergenti. In particolare, se $\alpha = 0$,

$$
\begin{gathered}
B_0 \simeq -4K_0R^4 \ , \quad A_2 \simeq 2K_2R^2 \quad \Rightarrow \\
v(r,\theta) \simeq -4K_0R^4 \log r + 2K_2R^2 \left(\frac{1}{r^2} - r^2\right) \cos(2\theta)
\end{gathered}
$$

mentre, se $\alpha > 0$,

$$
\begin{gathered}
B_0 \simeq -\frac{K_0R^4}{\log R} \ , \quad A_2 \simeq K_2R^2 \quad \Rightarrow \\
v(r,\theta) \simeq -\frac{K_0R^4}{\log R} \log r + K_2R^2 \left(\frac{1}{r^2} - r^2\right) \cos(2\theta)
\end{gathered}
$$

c) Se $\alpha < 0$, si procede esattamente come prima, in quanto la soluzione, se esiste, deve necessariamente essere della forma (2.1). Tuttavia, ora può succedere che le equazioni (2.6), (2.7) e (2.9) non ammettano soluzione o la ammettano, ma lasciando indeterminato il valore di C_n, B_0 o A_2, rispettivamente. In particolare, ciò succede per la (2.7), se

$$
\frac{1}{R} + \alpha \log R = 0 \ , \quad 4K_0R^3 + \alpha K_0(R^4 - 1) \neq 0
$$

nel qual caso non c'è soluzione, mentre se

$$
\frac{1}{R} + \alpha \log R = 0 \ , \quad 4K_0R^3 + \alpha K_0(R^4 - 1) = 0 \tag{2.11}
$$

esistono infinite soluzioni, indicizzate dal valore di B_0. Si noti che questa situazione non può in realtà verificarsi, in quanto le (2.11) sono ambedue soddisfatte se e solo se

$$
F(R) := \log R - \frac{1}{4} + \frac{1}{4R^4} = 0
$$

e questa condizione non è mai verificata per $R > 1$, poiché $F(1) = 0$ e $F'(R) = 1/R - 1/R^5 > 0$, se $R > 1$.

Un discorso analogo può farsi per la (2.9), che non ammette soluzione se

$$-\frac{2}{R^3} + \frac{\alpha}{R^2} - 2R - \alpha R^2 = 0 \, , \quad 4K_2R^3 + \alpha K_2 R^4 - K_2(2R + \alpha R^2) \neq 0$$

Inoltre è possibile dimostrare, con un po' di calcoli banali, che le equazioni

$$-\frac{2}{R^3} + \frac{\alpha}{R^2} - 2R - \alpha R^2 = 0 \, , \quad 4K_2R^3 + \alpha K_2 R^4 - K_2(2R + \alpha R^2) = 0$$

non sono mai ambedue verificate per $R > 1$.

Rimane da considerare la (2.6), con $n \neq 2$, e l'analoga equazione per la funzione $a_n(r)$. La (2.6) è verificata per ogni valore di C_n, se

$$\alpha = \alpha_n := -\frac{n(R^{2n} + 1)}{R(R^{2n} - 1)}$$

Per tali valori negativi di α, la soluzione esiste, ma non è unica; l'insieme delle soluzioni è indicizzata da due parametri reali, una per $a_2(r)$ e una per $b_2(r)$.