# Esercizi del corso di Fisica Matematica 2

Giuseppe Benfatto
Università di Roma "Tor Vergata"

a. a. 2012-13

# Indice

# 1 Esercizi sull'equazione del calore

## 1.1 Esercizi risolti

**Esercizio 1.1** *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \gamma u(x,t)\ , \quad x \in (-L,L)\ , \quad t > 0$$

$$u(-L,t) = u(L,t) = 0\ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})\ , \quad f(x) \neq 0\ , \quad \mathit{supp} f \subseteq [-L/2, L/2]$$

*Si supponga infine che*

$$\int_{-L}^{L} dx f(x) \sin\left[\frac{\pi}{2L}(x+L)\right] \neq 0$$

*Si dimostri che, fissati $D > 0$ e $L$, esiste $\gamma_c > 0$, tale che*

$$\lim_{t\to\infty} \max_{x\in[-L,L]} |u(x,t)| = \begin{cases} \infty & \mathit{if}\ \gamma > \gamma_c \\ 0 & \mathit{if}\ \gamma < \gamma_c \end{cases}$$

*Cosa si può affermare riguardo $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$, se $\gamma = \gamma_c$?*

**Soluzione -** Se poniamo

$$u(x,t) = e^{\gamma t} v(x+L,t) \tag{1.1}$$

la funzione $v(y,t)$ soddisfa l'equazione:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(y,t) = D\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y,t)\ , \quad y \in (0,2L)\ , \quad t > 0 \tag{1.2}$$

$$v(0,t) = v(2L,t) = 0\ , \quad \forall t \geq 0$$

$$v(y,0) = \tilde{f}(y) = f(y-L)\ , \quad \mathrm{supp}\tilde{f} \subseteq [L/2, 3L/2]$$

con

$$\int_0^{2L} dy \tilde{f}(y) \sin\left(\frac{\pi y}{2L}\right) \neq 0 \tag{1.3}$$

Le ipotesi su $f(x)$ garantiscono che la funzione $\tilde{f}(y)$ può prolungarsi dall'intervallo $[0, 2L]$, nei cui estremi si annulla insieme a tutte le sue derivate, a tutto l'asse reale, come funzione periodica di periodo $4L$, dispari e $C^\infty$. Pertanto $\tilde{f}(y)$ può svilupparsi in serie di Fourier di soli seni:

$$\tilde{f}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi y}{2L}\right) \tag{1.4}$$

e questa serie converge uniformemente, insieme alle serie delle derivate di ogni ordine, in quanto i coefficienti vanno a 0, per $n \to \infty$, più rapidamente di ogni potenza. Inoltre

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} dy \tilde{f}(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{2L}\right) \tag{1.5}$$

Ne segue, come sappiamo, tramite il metodo di separazione delle variabili, che la soluzione della (1.2) è data dalla serie (uniformemente convergente e derivabile infinite volte termine a termine)

$$v(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-D\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi y}{2L}\right) \tag{1.6}$$

Usando la (1.1), si trova pertanto che

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(\gamma - \gamma_c n^2)t} \sin\left(\frac{n\pi(x+L)}{2L}\right) \tag{1.7}$$

con

$$\gamma_c = \frac{D\pi^2}{4L^2} \tag{1.8}$$

Si noti che

$$|u(x,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| e^{(\gamma - \gamma_c n^2)t} \le e^{(\gamma-\gamma_c)t} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

Pertanto, se $\gamma < \gamma_c$,

$$\lim_{t\to\infty} ||u(t)||_\infty = 0$$

dove $||u(t)||_\infty \equiv \max_{x\in[-L,L]} |u(x,t)|$.

Supponiamo ora $\gamma > \gamma_c$ e riscriviamo la soluzione nella forma:

$$u(x,t) = e^{(\gamma-\gamma_c)t} \left[ c_1 \sin\left(\frac{\pi(x+L)}{2L}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-\gamma_c(n^2-1)t} \sin\left(\frac{n\pi(x+L)}{2L}\right) \right] \tag{1.9}$$

Per l'ipotesi (1.3) su $f(x)$ e la (1.5), $|c_1| > 0$. Inoltre la serie al secondo membro della (1.9) si può stimare con

$$\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| e^{-\gamma_c(n^2-1)t} \le e^{-3\gamma_c t} \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \tag{1.10}$$

ed è pertanto minore in modulo di $|c_1|/2$, se $t$ è abbastanza grande, diciamo per $t \geq T$. Ne segue, usando la (1.9), che, se $t \geq T$,

$$||u(t)||_\infty \geq |u(0,t)| = e^{(\gamma-\gamma_c)t} \left| c_1 - \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-\gamma_c(n^2-1)t} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right|$$
$$\geq e^{(\gamma-\gamma_c)t} |c_1|/2$$

da cui segue subito che

$$\lim_{t\to\infty} ||u(t)||_\infty = \infty$$

Supponiamo infine che $\gamma = \gamma_c$. Per la (1.9),

$$u(x,t) = c_1 \sin\left(\frac{\pi(x+L)}{2L}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-\gamma_c(n^2-1)t} \sin\left(\frac{n\pi(x+L)}{2L}\right) \tag{1.11}$$

da cui, usando la stima (1.10) per la serie a secondo membro, segue che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = c_1 \sin\left(\frac{\pi(x+L)}{2L}\right)$$

∎

**Esercizio 1.2** *Si calcoli la soluzione (nella classe di Tychonov) dell'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) = \Delta u(\vec{x},t)\ , \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2\ , \quad t > 0$$
$$u(\vec{x},0) = 1 - \vec{x}^2$$

**Soluzione -** Come sappiamo, l'unica soluzione nella classe di Tychonov è data da:

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{y}\, e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{4t}} (1 - \vec{y}^2)$$

Se poniamo $\vec{z} \equiv \vec{y} - \vec{x}$, $\vec{y}^2 = (\vec{y} - \vec{x} + \vec{x})^2 = \vec{z}^2 + \vec{x}^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{z}$. Pertanto, poiché $\frac{1}{4\pi t}\int d\vec{z}\, e^{-\frac{\vec{z}^2}{4t}} = 1$:

$$u(\vec{x},t) = 1 - \vec{x}^2 - \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{z}\, e^{-\frac{\vec{z}^2}{4t}} (\vec{z}^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{z})$$

Tuttavia, poiché $z_i e^{-\frac{\vec{z}^2}{4t}}$, $i = 1, 2$, è una funzione dispari rispetto a $z_i$, l'integrale del termine proporzionale a $\vec{x} \cdot \vec{z}$ è nullo. Inoltre, se usiamo le coordinate polari per l'integrale rimanente:

$$\frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{z}\, e^{-\frac{\vec{z}^2}{4t}} \vec{z}^2 = \frac{1}{4\pi t} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} d\rho\rho\, e^{-\frac{\rho^2}{4t}} \rho^2 =$$

$$= \frac{1}{4t} \int_0^{\infty} d\lambda\, \lambda\, e^{-\frac{\lambda}{4t}} = 4t \int_0^{\infty} d\lambda\, \lambda\, e^{-\lambda} = 4t \int_0^{\infty} \lambda d(-e^{-\lambda}) =$$

$$= 4t \int_0^{\infty} e^{-\lambda} = 4t$$

Pertanto

$$u(\vec{x}, t) = 1 - \vec{x}^2 - 4t$$

∎

**Esercizio 1.3** *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \sin(\omega t)\sin^2(x) , \quad x \in (0,\pi) , t > 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = \sin^4(x)$$

**a)** *Calcolare la soluzione.*

**b)** *Fare vedere che esistono tre funzioni $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$, tali che*

$$\lim_{t\to\infty} [u(x,t) - A(x) - B(x)\sin(\omega t) - C(x)\cos(\omega t)] = 0$$

**c)** *Calcolare la quantità*

$$q(t) = \int_0^{\pi} dx\, u(x,t)$$

*usando la soluzione della (1.12) e controllare il risultato usando solo l'equazione di continuità, cioè l'equazione che si ottiene integrando ambedue i membri dell'equazione differenziale (1.12) fra $0$ e $\pi$.*

**Soluzione -**

**a)** Come sappiamo (vedi l'equazione (2.35) delle note aggiuntive, con $L = \pi$), la soluzione può scriversi nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n e^{-n^2 t} + \int_0^t ds\, e^{-n^2(t-s)} b_n(s) \right] \cos(nx)$$

dove $a_n$ sono i coefficienti di Fourier della serie di soli coseni della funzione $\sin^4(x)$, mentre $b_n(s)$ sono gli analoghi coefficienti della funzione $\sin(\omega s)\sin^2(x)$. Si noti ora che

$$\sin^4(x) = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{2^4} \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (e^{ix})^k (-e^{-ix})^{4-k} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-1)^k (e^{ix})^{2k-4} = \frac{1}{2^4} \left[ \binom{4}{2} + e^{-4ix} + e^{4ix} - 4e^{-2ix} - 4e^{2ix} \right] =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x) \tag{1.13}$$

Pertanto

$$a_0 = \tfrac{3}{8}, \quad a_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad a_4 = \tfrac{1}{8}$$
$$a_n = 0, \quad \text{se } n \neq 0, 2, 4$$

Inoltre

$$\sin(\omega s)\sin^2(x) = \sin(\omega s) \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \right]$$

Pertanto

$$b_0(s) = \tfrac{1}{2}\sin(\omega s), \quad b_2(s) = -\tfrac{1}{2}\sin(\omega s)$$
$$b_n(s) = 0, \quad \text{se } n \neq 0, 2$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \left[ \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \int_0^t ds\, \sin(\omega s) \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[ e^{-4t} + \int_0^t ds\, e^{-4(t-s)} \sin(\omega s) \right] \cos(2x) \\ & + \frac{1}{8} e^{-16t} \cos(4x) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Si noti ora che

$$\int_0^t ds\, \sin(\omega s) = \frac{1}{\omega}[1 - \cos(\omega t)] \tag{1.15}$$

e che, se si pone

$$F(t) = \int_0^t ds\, e^{4s} \sin(\omega s)$$

allora, operando due integrazioni per parti,

$$\begin{aligned} F(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t ds\, e^{4s} \frac{d}{ds} \cos(\omega s) &= -\frac{1}{\omega}[e^{4t} \cos(\omega t) - 1] + \frac{4}{\omega} \int_0^t ds\, e^{4s} \cos(\omega s) \\ &= -\frac{1}{\omega}[e^{4t} \cos(\omega t) - 1] + \frac{4}{\omega^2} e^{4t} \sin(\omega t) - \frac{16}{\omega^2} \int_0^t ds\, e^{4s} \sin(\omega s) \end{aligned}$$

Ma l'ultimo integrale è proprio la funzione $F(t)$, per cui

$$\left(1 + \frac{16}{\omega^2}\right) F(t) = -\frac{1}{\omega}[e^{4t} \cos(\omega t) - 1] + \frac{4}{\omega^2} e^{4t} \sin(\omega t)$$

da cui segue, con pochi passaggi, che

$$F(t) = \frac{\omega}{16+\omega^2} + \frac{e^{4t}}{16+\omega^2}[4 \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)] \tag{1.16}$$

Se si inseriscono le (1.15) e (1.16) nella (1.14), si trova

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2\omega}[1 - \cos(\omega t)] + \frac{1}{8} e^{-16t} \cos(4x) - \\ - \frac{1}{2} \cos(2x) \left[ e^{-4t} \left(1 + \frac{\omega}{16+\omega^2}\right) + \frac{4 \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)}{16+\omega^2} \right] \end{aligned} \tag{1.17}$$

**b)** Nel limite $t \to \infty$, i termini nel secondo membro della (1.17) proporzionali a $e^{-4t}$ e $e^{-16t}$ vanno a zero, mentre gli altri sono costanti o oscillano. Pertanto

$$\lim_{t\to\infty} [u(x,t) - A(x) - B(x) \sin(\omega t) - C(x) \cos(\omega t)] = 0$$

con

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2\omega} \\ B(x) &= -\frac{2}{16+\omega^2} \cos(2x) \\ C(x) &= -\frac{1}{2\omega} + \frac{\omega}{2(16+\omega^2)} \cos(2x) \end{aligned}$$

**c)** Si noti che

$$\int_0^\pi dx\, \cos(nx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx\, \cos(nx) = 0, \quad \text{se } n \neq 0$$

Pertanto, dalla (1.17) segue che

$$q(t) = \int_0^\pi dx\, u(x,t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2\omega}[1 - \cos(\omega t)] \tag{1.18}$$

Questo risultato può essere ottenuto direttamente dall'equazione di continuità. Infatti, se integriamo la (1.12) in $x$ fra 0 e $\pi$ ed usiamo le condizioni al bordo, otteniamo.

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \int_0^\pi dx\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \sin(\omega t) \int_0^\pi dx\, \sin^2(x) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \frac{\pi}{2}\sin(\omega t) = \frac{\pi}{2}\sin(\omega t)\end{aligned}$$

da cui segue che

$$q(t) = q(0) + \frac{\pi}{2}\int_0^t ds\, \sin(\omega s) = q(0) + \frac{\pi}{2\omega}[1 - \cos(\omega t)] \tag{1.19}$$

D'altra parte, usando la (1.13), si vede che $q(0) = \frac{3\pi}{8}$. Quindi la (1.19) coincide con la (1.18). ▮

**Esercizio 1.4** *Si consideri l'equazione*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t) + e^{kt} g(x)\ , \quad x \in (0,1)\ , t > 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0\ , \quad \forall t \geq 0 \\ &u(x,0) = \varphi(x)\end{aligned} \tag{1.20}$$

*dove $k$ è un parametro reale fissato.*

**a)** *Calcolare la soluzione nel caso in cui*

$$g(x) = \sin^2(2\pi x)\ , \quad \varphi(x) = \cos(\pi x) \tag{1.21}$$

**b)** *Studiare il comportamento asintotico della soluzione al variare di $k$.*

**Soluzione -** Se si pone $u(x,t) = e^{-t} v(x,t)$, è facile vedere che $v(x,t)$ è la soluzione del problema

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + e^{(k+1)t} g(x)\ , \quad x \in (0,1)\ , t > 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0\ , \quad \forall t \geq 0 \\ &v(x,0) = \varphi(x)\end{aligned} \tag{1.22}$$

Pertanto, usando la Prop. 2.3 delle Note, la funzione $v(x,t)$ può scriversi nella forma

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n\, e^{-(\pi n)^2 t} + b_n \int_0^t ds\, e^{-(\pi n)^2 (t-s)} e^{(k+1)s} \right] \cos(\pi n x)$$

purché le successioni $a_n$ e $b_n$, definite dagli sviluppi

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\pi n x)\ , \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(\pi n x)$$

vadano a 0 abbastanza velocemente per $n \to \infty$. In tal caso la soluzione della (1.20) è uguale a

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n e^{-(\pi^2 n^2+1)t} + b_n e^{-(\pi^2 n^2+1)t} \int_0^t ds\, e^{(\pi^2 n^2+k+1)s} \right] \cos(\pi n x) \tag{1.23}$$

**a)** Si noti che:

$$\sin^2(2\pi x) = \frac{1-\cos(4\pi x)}{2}$$

Pertanto, se $g(x)$ e $\varphi(x)$ sono date dalle (1.21), allora

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{se } n \neq 1 \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } n=0 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } n=4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la (1.23) diventa

$$\begin{aligned} u(x,t) = e^{-(\pi^2+1)t} \cos(\pi x) + \frac{1}{2} e^{-t} \int_0^t ds\, e^{(k+1)s} - \\ - \frac{1}{2} \cos(4\pi x) e^{-(16\pi^2+1)t} \int_0^t ds\, e^{(16\pi^2+k+1)s} \end{aligned}$$

**b)** Si noti che

$$G_{k,\alpha}(t) \equiv e^{-\alpha t} \int_0^t ds\, e^{(k+\alpha)s} = \begin{cases} t e^{-\alpha t} & \text{se } k=-\alpha \\ \frac{e^{kt}-e^{-\alpha t}}{k+\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto, se $k<0$, $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$, per ogni $x \in [0,1]$. Se $k \geq 0$, invece, si ha:

$$\lim_{t\to+\infty} \left[ u(x,t) - \bar{u}(x,t) \right] = 0$$

con

$$\bar{u}(x,t) = e^{kt} \left[ \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(16\pi^2+k+1)} \cos(4\pi x) \right]$$

∎

**Esercizio 1.5** *Si consideri l'equazione*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u + e^{kt}g(x)\ , \quad x \in (0,\pi)\ , t > 0 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0\ , \quad \forall t \geq 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x)\end{aligned} \tag{1.24}$$

*dove $k$ è un parametro reale fissato.*

**a)** *Calcolare la soluzione nel caso in cui*

$$g(x) = \sin(2x)\cos^2 x\ , \quad \varphi(x) = \sin x \tag{1.25}$$

**b)** *Studiare il comportamento asintotico della soluzione al variare di $k$.*

**c)** *Generalizzare l'analisi del punto b) al caso in cui $g(x)$ e $\varphi(x)$ sono due qualunque funzioni $C^\infty$ con supporto contenuto in $(0,\pi)$.*

**Soluzione -** Se si pone $u(x,t) = e^t v(x,t)$, è facile vedere che $v(x,t)$ è la soluzione del problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) &= 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + e^{(k-1)t}g(x)\ , \quad x \in (0,\pi)\ , t > 0 \\ v(0,t) &= v(\pi,t) = 0\ , \quad \forall t \geq 0 \\ v(x,0) &= \varphi(x)\end{aligned} \tag{1.26}$$

Pertanto, usando la Prop. 2.2 delle Note, la funzione $v(x,t)$ può scriversi nella forma

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n e^{-2n^2 t} + \int_0^t ds e^{-2n^2(t-s)} e^{(k-1)s} b_n \right] \sin(nx) \tag{1.27}$$

purché le successioni $a_n$ e $b_n$, definite dagli sviluppi

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)\ , \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \tag{1.28}$$

vadano a 0 abbastanza velocemente per $n \to \infty$. In tal caso la soluzione della (1.24) è uguale a

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n e^{-(2n^2-1)t} + b_n e^{-(2n^2-1)t} \int_0^t ds\, e^{(2n^2+k-1)s} \right] \sin(nx) \tag{1.29}$$

**a)** Si noti che:

$$\sin(2x)(1-\sin^2 x) = \frac{1}{2}\sin(2x)(1+1-2\sin^2 x)$$
$$= \frac{1}{2}\sin(2x)[1+\cos(2x)] = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(4x)$$

Pertanto, se $g(x)$ e $\varphi(x)$ sono date dalle (1.25), allora

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{se } n>1 \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } n=2 \\ \frac{1}{4} & \text{se } n=4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la (1.29) diventa

$$u(x,t) = e^{-t}\sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)e^{-7t}\int_0^t ds\, e^{(k+7)s} + \frac{1}{4}\sin(4x)e^{-31t}\int_0^t ds\, e^{(k+31)s}$$

**b)** Si noti che

$$G_{k,\alpha}(t) \equiv e^{-\alpha t}\int_0^t ds\, e^{(k+\alpha)s} = \begin{cases} te^{-\alpha t} & \text{se } k=-\alpha \\ \frac{e^{kt}-e^{-\alpha t}}{k+\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.30}$$

Pertanto, se $k<0$, $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$, per ogni $x \in [0,\pi]$. Se $k \geq 0$, invece, si ha:

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \lim_{t\to+\infty} e^{kt} F_k(x)$$

con

$$F_k(x) = \frac{\sin(2x)}{2(k+7)} + \frac{\sin(4x)}{4(k+31)} = \frac{\sin(2x)}{2(k+7)}\left[1 + \frac{k+7}{k+31}\cos(2x)\right]$$

avendo usato il fatto che $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$; quindi il segno e gli zeri di $F_k(x)$ coincidono con quelli di $\sin(2x)$, in quanto $1+\frac{k+7}{k+31}\cos(2x) > 0$, per ogni $x$. Ne segue che, se $k>0$

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \in (0,\pi/2) \\ 0 & \text{se } x = 0, \pi/2, \pi \\ -\infty & \text{se } x \in (\pi/2,\pi) \end{cases}$$

mentre, se $k=0$,

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = F_0(x)$$

**c)** Le ipotesi su $g(x)$ e $\varphi(x)$ garantiscono che esse, oltre ad essere $C^\infty$, sono nulle in due intorni di 0 e $\pi$, quindi sono nulle in 0 e $\pi$ insieme a tutte le loro derivate. Pertanto le successione $a_n$ e $b_n$ vanno a 0 per $n \to \infty$ più rapidamente di ogni potenza, per cui la serie (1.29) è differenziabile quante volte si vuole rispetto a $t$ e $x$ termine a termine, se $t > 0$, e $\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x)$, uniformemente in $x$. Ne segue che la (1.29) risolve effettivamente l'equazione (1.24).

Usando la (1.30), si trova allora che, se $k < 0$, $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$, per ogni $x \in [0,\pi]$. Se $k \geq 0$, invece, si ha:

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \lim_{t\to+\infty} e^{kt} F_k(x)$$

con

$$F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2n^2 + k - 1} \sin(nx)$$

e si procede come al punto b), con la ovvia differenza che nulla può essere detto sul segno di $F_k(x)$, che dipende (in modo complicato) dalla successione $b_n$. ∎

## 1.2 Esercizi non risolti

**Esercizio 1.6** *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \gamma u(x,t) + \sin^2 x \ , \quad x \in (0,\pi) \ , \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0$$

*con* $\gamma > 0$.

*Calcolare la soluzione ed il suo limite per* $t \to \infty$.

**Esercizio 1.7** *Calcolare la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + k\, u(x,t) \ , \quad x \in (0,2) \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0 \ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = e^{-x} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos(\pi x)$$

*dove* $k$ *è un numero reale fissato.*

*Calcolare quindi* $\lim_{t\to\infty} u(1,t)$*, al variare di* $k$.

**Esercizio 1.8** *Si consideri l'equazione*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \gamma u(x,t) + a \;, \quad x \in (-L, L) \;, \quad t > 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(-L,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \;, \quad \forall t \geq 0 \\
&u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)
\end{aligned}$$

*con $\gamma > 0$ e $a \in \mathbb{R}$.*

*Calcolare la soluzione ed il suo limite per $t \to \infty$.*

**Esercizio 1.9** *Calcolare la soluzione dell'equazione*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + k\, u(x,t) \;, \quad x \in (0,1) \;, \quad t > 0 \\
&u(0,t) = 0 \;, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \;, \quad \forall t \geq 0 \\
&u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

*dove $k$ è un numero reale fissato.*

*Calcolare quindi $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$, al variare di $k$.*

**Esercizio 1.10** *Risolvere l'equazione*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \;, \quad x \in (0,1) \;, \quad t > 0 \\
&u(0,t) = 0 \;, \quad u(1,t) = 1 \;, \quad \forall t \geq 0 \\
&u(x,0) = x + \sin(\pi x) - 2\sin(3\pi x)
\end{aligned}$$

**Esercizio 1.11** *Risolvere l'equazione*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 2\, \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \;, \quad x \in (0,1) \;, \quad t > 0 \\
&u(0,t) = u(1,t) = 0 \;, \quad \forall t \geq 0 \\
&u(x,0) = e^{-x}[\sin(\pi x) + 2\sin(3\pi x)]
\end{aligned}$$

**Esercizio 1.12** *Scrivere, in funzione di $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \cos^3\left(\frac{x}{2}\right)\, e^{\alpha t}\ , \quad x \in (0,\pi)\ , \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\ , \quad u(\pi,t) = 0\ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0$$

*e calcolare*

$$\bar{u}(x) \equiv \lim_{t\to\infty} u(x,t)$$

*al variare di $\alpha$ in $\mathbb{R}$.*

**Esercizio 1.13** *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \gamma u(x,t) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\ , \quad x \in (0,\pi)\ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0$$

*con $\gamma > 0$.*

*Calcolare la soluzione ed il suo limite per $t \to \infty$.*

**Esercizio 1.14** *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ , \quad x \in (0,\pi)\ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0\ , \quad u(\pi,t) = 1\ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = \bar{u}(x) + \varphi(x) \tag{1.31}$$

*dove $\bar{u}(x)$ è la soluzione stazionaria dell'equazione e $\varphi(x)$ è una funzione* $\mathbf{C}^\infty$ *con supporto in un intervallo $[a,b]$, con $0 < a < b < \pi$. Si dimostri quindi che*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \bar{u}(x)$$

Suggerimento*: si calcoli prima $\bar{u}(x)$ e si ponga $u(x,t) = \bar{u}(x) + v(x,t)$; si risolva quindi l'equazione per $v(x,t)$.*

**Esercizio 1.15** *Scrivere, in funzione di $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \cos\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]\, t\, e^{\alpha t}\ , \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)\ , \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi/2, t) = 0\ , \quad u(-\pi/2, t) = 0\ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0$$

*e calcolare*

$$\bar{u}(x) \equiv \lim_{t\to\infty} u(x,t)$$

*al variare di $\alpha$ in $\mathbb{R}$.*

**Esercizio 1.16** *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \gamma u(x,t)\ , \quad x \in (0,\pi)\ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0\ , \quad u(\pi,t) = 1\ , \quad \forall t \geq 0$$

*con $\gamma > 0$.*

*Si calcoli la soluzione stazionaria $\bar{u}(x)$ dell'equazione e si dimostri che, se il dato iniziale è della forma*

$$u(x,0) = \bar{u}(x) + \varphi(x)$$
$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)$$
$$|c_n| \leq A n^{-4}$$

*allora la soluzione $u(x,t)$ è una funzione di classe $\mathbf{C}^2$ in $[0,+\infty) \times [0,\pi]$, tale che*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \bar{u}(x)$$

# 2 Esercizi sull'equazione di Laplace-Poisson

## 2.1 Esercizi risolti

**Esercizio 2.1**
*1) Risolvere l'equazione*

$$\Delta u(x,y) = 0 \ , \quad 0 < r = \sqrt{x^2+y^2} < R$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) + \alpha\, u(x,y) = x^2y^2 \ , \quad r = R \ , \quad \alpha > 0 \tag{2.1}$$

$$\lim_{r\to 0} r\, \frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r} = -\frac{q}{2\pi} \ , \quad v(r,\theta) \equiv u(r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{2.2}$$

*2) Fissati $r$ e $\theta$, calcolare*

- $\lim_{R\to\infty} v(r,\theta)$
- $\lim_{R\to\infty} \frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}$
- $\lim_{\alpha\to\infty} v(r,\theta)$ *(a quali condizioni al bordo corrisponde il limite?)*

*3) Fissato $R$, calcolare la "carica" contenuta nel cerchio $B_r$ di raggio $r \in (0,R)$ e centro nell'origine, definita dalla*

$$Q = -\int_{\partial B_r} ds\, \frac{\partial u}{\partial n}$$

*dove $ds$ è l'elemento di linea e $n$ indica la normale esterna alla circonferenza $\partial B_r$ di raggio $r$, che si considera orientata in senso antiorario.*

**Soluzione - 1)** Come sappiamo la soluzione in coordinate polari è della forma

$$v(r,\theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r)\cos(n\theta) + b_n(r)\sin(n\theta)] \tag{2.3}$$

con

$$\begin{aligned} a_0(r) &= A_0 + C_0 \log r \\ a_n(r) &= A_n r^n + C_n r^{-n} \\ b_n(r) &= B_n r^n + D_n r^{-n} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Si noti che, se $n \geq 1$,

$$\lim_{r\to 0} r \frac{d}{dr} r^{-n} = -n \lim_{r\to 0} r^{-n} = -\infty$$

$$\lim_{r\to 0} r \frac{d}{dr} r^{n} = n \lim_{r\to 0} r^{n} = 0$$

e che $\lim_{r\to 0} r\frac{d}{dr}\log r = 1$. Pertanto, la condizione (2.2) in $r=0$ impone che

$$C_0 = -\frac{q}{2\pi}\ , \quad C_n = D_n = 0,\ \forall n \geq 1 \tag{2.5}$$

Ci rimane da imporre la condizione al bordo (2.1). Se $r = R$, si ha:

$$x^2y^2 = R^4\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{R^4}{4}\sin^2(2\theta) = \frac{R^4}{8}[1-\cos(4\theta)]$$

Poiché $\partial u/\partial n = \partial v/\partial r$ nei punti di una circonferenza con centro nell'origine, questa equazione, insieme alle (2.4) e (2.5), implica che

$$\begin{aligned}
a_0'(R) + \alpha\, a_0(R) &= -\frac{q}{2\pi R} + \alpha\left(A_0 - \frac{q}{2\pi}\log R\right) = \frac{R^4}{8} \\
a_4'(R) + \alpha\, a_4(R) &= A_4(4R^3 + \alpha R^4) = -\frac{R^4}{8} \\
a_n'(R) + \alpha\, a_n(R) &= A_n(4R^3 + \alpha R^4) = 0,\ \forall n \neq 0, 4 \\
b_n'(R) + \alpha\, b_n(R) &= B_n(4R^3 + \alpha R^4) = 0,\ \forall n \geq 1
\end{aligned}$$

Pertanto

$$v(r,\theta) = \frac{R^4}{8\alpha} + \frac{q}{2\pi R\alpha} - \frac{q}{2\pi}\log\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{Rr^4}{8(4+\alpha R)}\cos(4\theta)$$

In coordinate cartesiane

$$u(x,y) = \frac{R^4}{8\alpha} + \frac{q}{2\pi R\alpha} - \frac{q}{4\pi}\log\left(\frac{x^2+y^2}{R^2}\right) - \tilde{u}(x,y)$$

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{Rr^4}{8(4+\alpha R)}\left(1 - 8\frac{x^2y^2}{r^4}\right) = \frac{R}{8(4+\alpha R)}[(x^2+y^2)^2 - 8x^2y^2]$$

**2)** Fissati comunque $r > 0$ e $\theta$, $\lim_{R\to\infty} v(r,\theta) = +\infty$. Tuttavia, se si deriva rispetto ad $r$, prima di fare il limite, si ha

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r} = -\frac{q}{2\pi r} - \frac{r^3}{2\alpha}\cos(4\theta)$$

Se, invece, si fissa anche $R$ e si manda $\alpha$ a $+\infty$, si trova

$$\lim_{\alpha\to+\infty} v(r,\theta) = -\frac{q}{2\pi}\log\left(\frac{r}{R}\right)$$

cioè la soluzione del problema con la stessa condizione in $r = 0$ e condizioni di Dirichlet nulle per $r = R$, come era facile aspettarsi.

**3)** Se $r \in (0, R)$, si ha:

$$Q = -\int_0^{2\pi} d\theta\, r\, \frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r} = \int_0^{2\pi} d\theta\, r\, \frac{q}{2\pi r} = q$$

in quanto $\int_0^{2\pi} d\theta \, \cos(4\theta) = 0$. ∎

**Esercizio 2.2** *Trovare tutte le soluzioni dell'equazione*

$$\Delta u(x,y) = 0 \,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2} > 1 \tag{2.6}$$

$$u(x,y) = y^2 \,, \quad r = 1 \tag{2.7}$$

$$\lim_{r\to\infty} \left[ \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) - r\cos(2\theta) + r\sin(2\theta) \right] = 0 \tag{2.8}$$

*dove $v(r,\theta)$ è la soluzione scritta in coordinate polari.*

**Soluzione -** Come sappiamo, $v(r,\theta)$ deve essere della forma

$$\begin{aligned} v(r,\theta) = a_0 + b_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \big[ &(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos(n\theta) + \\ &+ (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin(n\theta) \big] \end{aligned} \tag{2.9}$$

Inoltre, poiché $y^2 = r^2 \sin^2(\theta) = r^2[1-\cos(2\theta)]/2$, la (2.7) implica che

$$v(1,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big[ (a_n + b_n)\cos(n\theta) + (c_n + d_n)\sin(n\theta) \big] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/2 \\ a_2 + b_2 &= -1/2 \\ a_n + b_n &= 0 \,, \quad n \neq 0, 2 \\ c_n + d_n &= 0 \,, \quad \forall n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Notiamo ora che, per la (2.9),

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = \frac{b_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \big[ &n(a_n r^{n-1} - b_n r^{-n-1})\cos(n\theta) + \\ &+ n(c_n r^{n-1} - d_n r^{-n-1})\sin(n\theta) \big] \end{aligned}$$

La condizione (2.8) implica quindi che

$$\lim_{r\to\infty}\left[\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)-r\cos(2\theta)+r\sin(2\theta)\right]=$$

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[na_nr^{n-1}\cos(n\theta)+nc_nr^{n-1}\sin(n\theta)\right]-r\cos(2\theta)+r\sin(2\theta)\right\}=0$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}2a_2&=1\\2c_2&=-1\\a_n&=c_n=0\ ,\quad\forall n\neq 0,2\end{aligned}\tag{2.11}$$

Le (2.10) e (2.11) implicano che

$$a_0=1/2\ ,\quad a_2=1/2\ ,\quad b_2=-1\ ,\quad c_2=-1/2\ ,\quad d_2=1/2$$
$$a_n=c_n=b_n=d_n=0\ ,\quad\forall n\neq 0,2$$

La soluzione generale del problema è pertanto

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2}+c\log r+\frac{1}{2}\left(r^2-\frac{2}{r^2}\right)\cos(2\theta)-\frac{1}{2}\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\sin(2\theta)$$

dove $c$ è una costante arbitraria. ∎

## 2.2 Esercizi non risolti

**Esercizio 2.3** *Risolvere l'equazione*

$$\Delta u(x,y)=e^{x^2+y^2}\ ,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}<R$$

$$u(x,y)=y\ ,\quad r=R$$

*Suggerimento: risolvere l'equazione in coordinate polari, quindi riscrivere il risultato in coordinate cartesiane.*

**Esercizio 2.4** *Risolvere l'equazione*

$$\Delta u(x,y)=0\ ,\quad 0<r=\sqrt{x^2+y^2}<R$$

$$u(x,y)=\frac{x^2y^2}{R^3}\ ,\quad r=R$$

$$\lim_{r\to 0}r\,\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}=-\frac{q}{2\pi}\ ,\quad v(r,\theta)\equiv u(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

*2) Sia $0 < r < R$, $\theta \in \mathbb{R}$ e $v_R(r,\theta)$ la soluzione del problema precedente in coordinate polari. Calcolare $\lim_{R\to\infty} v_R(r,\theta)$ e $\lim_{R\to\infty} \frac{\partial v_R(r,\theta)}{\partial r}$ al variare di $q$, fissato indipendentemente da $R$.*

*3) Fissato $R$, calcolare la "carica" contenuta nel cerchio $B_r$ di raggio $r < R$ e centro nell'origine, definita dalla*

$$Q = -\int_{\partial B_r} ds\, \frac{\partial u}{\partial n}$$

*dove $ds$ è l'elemento di linea e $n$ indica la normale esterna alla circonferenza $\partial B_r$ di raggio $r$, che si considera orientata in senso antiorario.*

**Esercizio 2.5** *Risolvere l'equazione*

$$\Delta u(x,y) = a \ , \quad r = \sqrt{x^2+y^2} < R$$

$$u(x,y) = \frac{y^2}{R^2} \ , \quad r = R$$

*2) Sia $(x_0, y_0)$ un punto fissato del piano, $R > \sqrt{x_0^2+y_0^2}$ e $u_R(x_0,y_0)$ la soluzione del problema precedente in $(x_0,y_0)$. Calcolare $\lim_{R\to\infty} u_R(x_0,y_0)$ al variare di $a$, fissato indipendentemente da $R$.*

*3) Dimostrare che, dato comunque $b \in \mathbb{R}$, è possibile scegliere $a$ in funzione di $R$, in modo che*

$$\lim_{R\to\infty} u_R(x_0,y_0) = b$$

**Esercizio 2.6** *Risolvere l'equazione*

$$\Delta u(x,y) = x \ , \quad r = \sqrt{x^2+y^2} < 2$$

$$u(x,y) = xy \ , \quad r = 2$$

*Suggerimento: risolvere l'equazione in coordinate polari, quindi riscrivere il risultato in coordinate cartesiane.*

**Esercizio 2.7** *Risolvere l'equazione*

$$\Delta u(x) = 0 \ , \quad x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ , \quad x_2 > 0$$

$$u(x_1,0) = g(x_1) = \begin{cases} 1-|x_1| & , \quad |x_1| \le 1 \\ 0 & , \quad |x_1| > 1 \end{cases}$$

*e calcolare*

$$\lim_{x_2 \to 0^+} \frac{\partial u}{\partial x_2}(0, x_2)$$

**Esercizio 2.8** *Si dimostri che, se $u(x, y)$ è una funzione armonica in $\mathbb{R}^2$ della forma*

$$u(x, y) = xyf(r) \ , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \ ,$$

*allora $f(r)$ è una funzione costante.*

*Suggerimento: scrivere $\Delta u(x, y)$ in funzione di $x$, $y$ e le derivate di $f(r)$ e sfruttare il fatto che $\Delta u(x, y) = 0$ per ogni scelta di $x$ e $y$.*

**Esercizio 2.9** *Si dimostri che l'equazione*

$$x^3 - 3xy^2 - 2x = 0$$

*non ha soluzioni <u>all'interno</u> del quadrato di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.*

*Suggerimento: sfruttare il fatto che la funzione di cui si cercano gli zeri è armonica, applicando il principio di massimo forte.*

**Esercizio 2.10** *Verificare che la funzione*

$$u(x, y) = 3x^2y - y^3 + x^2 - y^2 - 2(x + y)$$

*è armonica in $\mathbb{R}^2$ ed usare questa proprietà per calcolarne il massimo e il minimo nel triangolo con vertici nei punti $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.*

**Esercizio 2.11** *Risolvere l'equazione*

$$\Delta u(x, y) = 0 \ , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} > 2$$

$$u(x, y) = x^2 + y \ , \quad r = 2$$

$$\lim_{r \to \infty} r \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi}$$

*Suggerimento: risolvere l'equazione in coordinate polari, quindi riscrivere il risultato in coordinate cartesiane.*

*Calcolare la "carica" contenuta nel cerchio $B$ di raggio 2 e centro nell'origine, definita dalla*

$$Q = -\int_{\partial B} ds \, \frac{\partial u}{\partial n}$$

*dove $ds$ è l'elemento di linea e $n$ indica la normale esterna alla circonferenza $\partial B$ di raggio 2, che si considera orientata in senso antiorario.*

**Esercizio 2.12**
*1) Risolvere in coordinate polari l'equazione*

$$\Delta u(x,y) = \frac{2xy}{R^3}\ , \quad r = \sqrt{x^2+y^2} < R$$

$$u(x,y) = \frac{xy^2}{R^2}\ , \quad r = R$$

*e scrivere il risultato in coordinate cartesiane.*

*2) Sia* $(x_0, y_0)$ *un punto fissato del piano,* $R > \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ *e* $u_R(x_0, y_0)$ *la soluzione del problema precedente in* $(x_0, y_0)$*. Calcolare* $\lim_{R\to\infty} u_R(x_0, y_0)$*.*

**Esercizio 2.13** *Si calcolino gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni del Laplaciano nel rettangolo* $Q = [0, L_1] \times [0, L_2]$ *con condizioni di Dirichlet nulle al bordo, limitandosi alle autofunzioni che possono scriversi come prodotto di una funzione di* $x_1$ *per una funzione di* $x_2$*, se* $x = (x_1, x_2)$ *indica il generico elemento di* $Q$*. Bisogna cioè calcolare i numeri reali* $\lambda$ *e le funzioni* $u(x)$*, definite in* $Q$*, tali che*

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= \lambda u(x),\ , \quad x \in \operatorname{int} Q \\
u(0, x_2) &= u(L_1, x_2) = 0\ , \quad \forall x_2 \in [0, L_2] \\
u(x_1, 0) &= u(x_1, L_2) = 0\ , \quad \forall x_1 \in [0, L_1] \\
u(x) &= u_1(x_1) u_2(x_2)
\end{aligned}$$

**Esercizio 2.14** *Trovare tutte le soluzioni dell'equazione*

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= x^2\ , \quad r = \sqrt{x^2+y^2} > 1 \\
u(x,y) &= y\ , \quad r = 1 \\
\lim_{r\to\infty} \frac{u}{r^5} &= 0
\end{aligned}$$

**Esercizio 2.15** *Calcolare il massimo ed il minimo della funzione*

$$u(x,y) = \Re(z^4 + z^2)\ , \quad z = x + iy$$

*nel cerchio di raggio* $1$*.*

**Esercizio 2.16** *Si consideri l'equazione*

$$\Delta u(x,y) = y^2 \qquad\qquad r = \sqrt{x^2+y^2} < 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = x^2 + a y^2 \qquad\qquad r = 2$$

*Trovare il valore di a per cui esiste una soluzione, definita a meno di una costante, e calcolare la soluzione stessa.*

**Esercizio 2.17** *Calcolare il massimo ed il minimo della funzione*

$$u(x,y) = \Re(z^3 + z) \ , \quad z = x + iy$$

*nel cerchio* $x^2 + y^2 \le R^2$.

**Esercizio 2.18** *Risolvere l'equazione*

$$\Delta u(x) = 0 \ , \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ , \quad x_2 > 0$$

$$u(x_1, 0) = \begin{cases} 1 - x_1^2 & , \quad |x_1| \le 1 \\ 0 & , \quad |x_1| > 1 \end{cases}$$

*e calcolare*

$$\lim_{x_2 \to 0^+} \frac{\partial u}{\partial x_2}(1, x_2)$$

# 3 Esercizi sull'equazione delle onde

## 3.1 Esercizi risolti

**Esercizio 3.1** *Calcolare la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + m^2 u(x,t) = 0 \ , \quad x \in (0, L) \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \ , \quad \forall t \ge 0$$

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

**Soluzione -** Poiché i dati iniziali sono la restrizione all'intervallo $[0, L]$ di due funzioni dispari, $C^\infty$ e periodiche di periodo $2L$, la soluzione, come sappiamo, può scriversi come una serie, derivabile infinite volte termine a termine, della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(k_n x) \ , \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{3.1}$$

con i coefficienti $c_n(t)$ soluzioni dell'equazione

$$\ddot{c}_n + \omega_n^2 c_n = 0 \ , \quad \omega_n = \sqrt{k_n^2 + m^2}$$

la cui soluzione generale è della forma

$$c_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \tag{3.2}$$

con

$$a_n = c_n(0) \ , \quad \omega_n b_n = \dot{c}_n(0) \tag{3.3}$$

Le condizioni iniziali su $u(x,t)$ implicano che

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin(k_n x) = \sin(k_2 x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \dot{c}_n(0) \sin(k_n x) = \sin^3(k_1 x) \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\sin^3(k_1 x) = \frac{(e^{ik_1 x} - e^{-ik_1 x})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3ik_1 x} - 3e^{ik_1 x} + 3e^{-ik_1 x} - e^{-3ik_1 x}}{(2i)^3} =$$
$$= \frac{3}{4} \sin(k_1 x) - \frac{1}{4} \sin(k_3 x)$$

Ne segue subito che

$$c_n(0) = \delta_{n,2} \ , \quad \dot{c}_n(0) = \frac{3}{4}\delta_{n,1} - \frac{1}{4}\delta_{n,3} \tag{3.4}$$

Mettendo insieme le (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4), vediamo allora che

$$u(x,t) = \frac{3}{4\omega_1} \sin(k_1 x) \sin(\omega_1 t) + \sin(k_2 x) \cos(\omega_2 t) - \frac{1}{4\omega_3} \sin(k_3 x) \sin(\omega_3 t)$$

∎

**Esercizio 3.2** *Sia $u_\varepsilon(x,t)$, $\varepsilon > 0$, la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \delta_\varepsilon(x) \equiv \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}$$

*Calcolare*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x,3)$$

**Soluzione -** Usando la formula di D'Alembert, la soluzione può scriversi nella forma

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} dy\ \delta_\varepsilon(y) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\ I_{[x-2t,x+2t]}(y)\delta_\varepsilon(y)$$

avendo indicato con $I_{[a,b]}(y)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$, cioè la funzione eguale a 1 in $[a,b]$ e 0 altrove.

D'altra parte, poiché $\delta_\varepsilon(y)$ è una "delta approssimata", sappiamo che, se $\varphi(y)$ è una funzione limitata e continua in $y=0$, allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\ \varphi(y)\delta_\varepsilon(y) = \varphi(0)$$

Dati $x$ e $t>0$, la funzione $I_{[x-2t,x+2t]}(y)$ è continua in $y=0$ se e solo se $x\neq \pm 2t$ e, in tal caso, $I_{[x-2t,x+2t]}(0)=1$, se $x-2t<0<x+2t$, altrimenti $I_{[x-2t,x+2t]}(0)=0$. Ne segue che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 1/4 & if \quad x\in(-2t,2t) \\ 0 & if \quad |x|>2t \end{cases}$$

Se $x=\pm 2t$, dobbiamo calcolare direttamente il limite. Se, per esempio, $x=2t$,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(2t,t) &= \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{4t} dy\, \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{2t/\sqrt{\varepsilon}} du\, e^{-u^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\int_{-2t/\sqrt{\varepsilon}}^{2t/\sqrt{\varepsilon}} du\, e^{-u^2} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, e^{-u^2} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Lo stesso risultato si ottiene per $x=-2t$. Ne segue che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,3) = \begin{cases} 1/4 & if \quad |x|<6 \\ 1/8 & if \quad |x|=6 \\ 0 & if \quad |x|>6 \end{cases}$$

∎

**Esercizio 3.3** *Risolvere l'equazione*

$$\begin{aligned}&u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\sin x\ , \quad x\in\mathbb{R}, t>0 \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0\end{aligned}$$

*dove $c$ e $\varepsilon$ sono costanti positive, e calcolarne il limite per $\varepsilon\to 0$.*

**Soluzione -** Usando il metodo di Duhamel, la soluzione può scriversi nella forma

$$u(x,t) = \int_0^t ds\, w(x, t-s, s)$$

dove $w(x, t-s, s)$ è la soluzione del problema

$$w_{tt}(x, t-s, s) - c^2 w_{xx}(x, t-s, s) = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R}, t > s$$
$$w(x, 0, s) = 0 \ , \quad w_t(x, 0, s) = \frac{e^{-\frac{s^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \sin x$$

Usando la Formula di D'Alembert, si ha allora

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t ds\, \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} dy\, \frac{e^{-\frac{s^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \sin y = \frac{1}{2c} \int_0^t ds\, \frac{e^{-\frac{s^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} dy\, \sin y \\ &= \frac{1}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^{t/\sqrt{\varepsilon}} d\lambda\, e^{-\lambda^2} \int_{x-c(t-\lambda\sqrt{\varepsilon})}^{x+c(t-\lambda\sqrt{\varepsilon})} dy\, \sin y \\ &\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{1}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\lambda\, e^{-\lambda^2} \int_{x-ct}^{x+ct} dy\, \sin y = \frac{1}{4c}[\cos(x-ct) - \cos(x+ct)] \\ &= \frac{1}{2c} \sin x \sin(ct) \end{aligned}$$

Si noti che $\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t)$ coincide con la soluzione dell'equazione omogenea con condizioni iniziali $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \frac{1}{2}\sin x$. ∎

## 3.2 Esercizi non risolti

**Esercizio 3.4** *Scrivere la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ , \quad x \in (0,\infty) \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x)$$

*dove $\varphi(x)$ è una funzione continua, tale che $\varphi(x) \neq 0$, se e solo se $x \in (0,1)$.*

*Determinare il supporto della funzione $u(x,t)$, al variare di $t$.*

**Esercizio 3.5** *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ , \quad x > 0\ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

*e dire per quali valori di $t$, $u(2,t) \neq 0$.*

**Esercizio 3.6** *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \cos(\omega t)\cos^2(\pi x/L)\ , \quad x \in (0,L),\ t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

*Si scriva la soluzione e si dimostri che esiste $\bar{\omega}$, tale che, se $\omega > 0$ e $\omega \neq \bar{\omega}$, la soluzione è limitata per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

**Esercizio 3.7** *Calcolare la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ , \quad x \in (0,\infty)\ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0\ , \quad \forall t \ge 0$$

$$u(x,0) = xe^{-x}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{x}{1+x}$$

**Esercizio 3.8** *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ , \quad x > 0 \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(x,0) = \frac{x}{1+x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

*e calcolare esplicitamente il valore della soluzione nel punto $x = 2$ al tempo $t = 1/2$ e al tempo $t = 3/2$.*

**Esercizio 3.9** *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \ , \quad x \in (0,\pi) \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \sin x \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(3x) \ , \quad x \in [0,\pi]$$

**Esercizio 3.10** *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \ , \quad x > 0 \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \ , \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \sin x \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = xe^{-x^2} \ , \quad x \geq 0$$

**Esercizio 3.11** *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \ , \quad x > 0 \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \ , \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases} \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = xe^{-x^2} \ , \quad x \geq 0$$

**Esercizio 3.12** *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \ , \quad x \in [-1,+1] \ , \quad t > 0$$

$$u(-1,t) = u(+1,t) = 0 \ , \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x) + 2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{3.5}$$

**Esercizio 3.13** *Si consideri la seguente equazione (modello di una corda di lunghezza $L$, vibrante trasversalmente in un piano verticale, con gli estremi fissi, soggetta ad attrito lineare ed al campo gravitazionale):*

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \tau\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \lambda\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \rho g \ , \quad x \in (0,L) \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$$

*dove $\rho$ è la densità lineare della corda, $\tau$ la tensione, $\lambda$ il coefficiente di attrito e $g$ l'accelerazione di gravità. Infine $f(x)$ e $h(x)$ sono le restrizioni all'intervallo $[0,L]$ di funzioni dispari definite su tutto l'asse reale, regolari e periodiche di periodo $2L$.*

*Si scriva la soluzione generale dell'equazione e si dimostri che esiste una funzione $\bar{u}(x)$, tale che, per ogni scelta dei dati iniziali,*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \bar{u}(x)$$

**Esercizio 3.14** *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ , \quad x > 0 \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(x,0) = \frac{x}{1+x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

*e calcolare $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$, per ogni $x > 0$ fissato.*

**Esercizio 3.15** *Si consideri l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{r},t) = 2\Delta u(\vec{r},t) \ , \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \ , \quad t > 0$$

$$u(\vec{r},0) = f(\vec{r}) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{r},0) = 0$$

*dove $f(\vec{r})$ indica una funzione regolare con supporto nella sfera di raggio 1 con centro nell'origine, strettamente positiva nei punti interni di tale sfera. Si dica per quali valori di $t$ la funzione $u(\vec{r},t)$ è diversa da 0 nel punto $\vec{r} = (2,1,1)$.*

**Esercizio 3.16** *Scrivere la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ , \quad x \in (0,\infty) \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

*dove $\varphi(x)$ è una funzione regolare, tale che $\varphi(x) \neq 0$, se e solo se $x \in (0,1)$.*

*Determinare il supporto della funzione $u(x,t)$, al variare di $t$.*

**Esercizio 3.17** *Calcolare la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 3u(x,t) = \cos x \ , \quad x \in (-\pi/2, \pi/2) \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$u(-\pi/2,t) = u(\pi/2,t) = 0 \ , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$u(x,0) = \sin(2x) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

**Esercizio 3.18** *Scrivere la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ , \quad x \in (0,\infty) \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x)$$

*dove* $\varphi(x)$ *è una funzione continua, tale che* $\varphi(x) \geq 0$ *and* $\varphi(x) \neq 0$*, se e solo se* $x \in (1, 2)$*.*

*Determinare il supporto della funzione* $u(x, t)$*, al variare di* $t$*.*

**Esercizio 3.19** *Calcolare la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ , \quad x \in (0,\infty) \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = \frac{x}{1+x^2} \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{x}{1+x}$$

*Calcolare quindi, dati* $x_0 > 0$ *e* $t_0 > 0$*,*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x_0, t) \ , \quad \lim_{x\to+\infty} u(x, t_0)$$

**Esercizio 3.20** *Calcolare la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - 4u(x,t) = e^{-t}\sin x \ , \quad x \in (0,\pi) \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$u(x,0) = \sin(2x) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin^3 x$$

**Esercizio 3.21** *Risolvere l'equazione*

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \tau\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -g \ , \quad x \in (0,\pi) \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \quad \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = \bar{u}(x) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin^3 x$$

*dove* $\bar{u}(x)$ *è la soluzione stazionaria dell'equazione.*

**Esercizio 3.22** *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 3\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sin(2x)\ , \quad x \in (0,\pi)\ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ , \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \sin^3 x\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\ , \quad x \in [0,\pi]$$

*e calcolare* $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

**Esercizio 3.23** *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ , \quad x > 0\ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0\ , \quad u(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

*e dire per quali valori di* $x$, $u(x,1) \neq 0$.

**Esercizio 3.24** *Calcolare la soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t) = t\cos x\ , \quad x \in (-\pi/2,\pi/2)\ , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$u(-\pi/2,t) = u(\pi/2,t) = 0\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$u(x,0) = \sin(2x)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\cos x$$

**Esercizio 3.25** *Risolvere l'equazione*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - 4u_{xx} = \cos(2t)\sin^3 x\ , \quad 0 < x < \pi\ , \quad t > 0 \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ &u(x,0) = \sin x\ \cos^2 x\ , \quad u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

# 4 Esercizi sulla trasformata di Fourier

## 4.1 Esercizi risolti

**Esercizio 4.1** *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = x\, e^{-\lambda|x|} \,, \quad \lambda > 0 \tag{4.1}$$

*ed usare il risultato per dimostrare che*

$$x\, e^{-\lambda|x|} = \frac{2\lambda}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} \frac{k}{(\lambda^2 + k^2)^2} \tag{4.2}$$

**Soluzione -** La trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$ è data dalla funzione

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} x e^{-\lambda|x|} = F(k) - F(-k) \tag{4.3}$$

con

$$F(k) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} x e^{-\lambda x} = -\frac{1}{\lambda + ik} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} x \frac{d}{dx} e^{-(\lambda+ik)x}$$

Poiché $x\, e^{-(\lambda+ik)x}$ è nulla in $x = 0$ e tende a 0 per $x \to +\infty$, integrando per parti, otteniamo

$$F(k) = \frac{1}{\lambda + ik} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\lambda+ik)x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\lambda + ik)^2}$$

Dalla (4.3) segue allora che

$$\sqrt{2\pi} \hat{f}(k) = \frac{1}{(\lambda + ik)^2} - \frac{1}{(\lambda - ik)^2} = \frac{-4i\lambda k}{(\lambda^2 + k^2)^2}$$

D'altra parte, $f(x) \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}) \bigcap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$; pertanto possiamo scrivere $f(x)$ come l'anti-trasformata di $\hat{f}(k)$ e otteniamo

$$x e^{-\lambda|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \hat{f}(k) = \frac{2\lambda}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \frac{k}{(\lambda^2 + k^2)^2}$$

∎

## 4.2 Esercizi non risolti

**Esercizio 4.2** *Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione*

$$f(x) = \sqrt{a} e^{-ax^2} \cos x \,, \quad a > 0$$

*ed il limite di $\hat{f}(k)$ per $a \to 0^+$, al variare di $k$.*

**Esercizio 4.3** *Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cosh x$$

*Si ricorda che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-(x+\alpha)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

**Esercizio 4.4** *Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione*

$$f(x) = \sqrt{a} e^{-ax^2} \sin(2x) \,, \quad a > 0$$

*ed il limite di $\hat{f}(k)$ per $a \to 0^+$.*

**Esercizio 4.5** *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = x \, e^{-\lambda x^2} \,, \quad \lambda > 0$$

*e dimostrare che*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} 2\lambda\sqrt{e} \, \max_{k \in \mathbb{R}} |\hat{f}(k)| = 1$$

**Esercizio 4.6** *Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione*

$$f(x) = \frac{x^2}{\varepsilon^{3/2}} \, e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} \,, \quad \varepsilon > 0$$

*e $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \hat{f}(k)$.*

**Esercizio 4.7** *Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione*

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \, e^{-\frac{x^2}{\lambda}} \cos^2 x \,, \quad \lambda > 0$$

*ed il limite di $\hat{f}(k)$ per $\lambda \to +\infty$.*

**Esercizio 4.8** *Sia $\hat{f}(k)$ la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & |x| \geq 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$$

*Si dimostri che $\hat{f}(k)$ non appartiene a $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$.*

Suggerimento*: fare vedere, tramite delle integrazioni per parti, che, per $|k| \to \infty$,*

$$\hat{f}(k) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin k}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$