

4 Corpo rigido con un punto fisso

4.1 Vincolo di rigidità.

Si consideri un sistema Γ di $N \geq 2$ punti materiali distinti $P_1, \dots, P_N$ di masse $m_1, \dots, m_N$, soggetto al vincolo che le distanze fra tutte le coppie di punti hanno valori fissati; un tale sistema è chiamato *corpo rigido*. Se $q^{(i)} \in \mathbb{R}^3$ rappresenta le coordinate del punto P_i nel sistema di riferimento fisso $\mathcal{S}$ e l_{ij} è la distanza fra P_i e P_j , il vincolo si esprime mediante le $N(N-1)/2$ condizioni

$$\left(q^{(i)} - q^{(j)}\right)^2 - l_{ij}^2 = 0 \quad , \quad 1 \leq i < j \leq N . \quad (4.1)$$

Se $N = 2$, le configurazioni di Γ compatibili con le (4.1) sono tutte e sole quelle ottenute scegliendo arbitrariamente $q^{(1)}$ ed il versore della retta che congiunge P_1 con P_2 , orientato come $\overrightarrow{P_1 P_2}$; il sistema ha pertanto 5 gradi di libertà. Lo stesso risultato si ottiene se $N > 2$ e tutti i punti sono allineati; in tal caso, infatti, una volta fissata la posizione di P_1 e P_2 , la posizione di un qualunque altro punto è univocamente individuata dalla condizione che le sue distanze da P_1 e P_2 sono assegnate.

Se $N = 3$ e i punti sono non allineati, una volta assegnata la posizione di P_1 e P_2 , la posizione di P_3 è univocamente individuata fissando l'angolo che il piano (unico) passante per i tre punti forma con un piano assegnato passante per la retta che congiunge P_1 con P_2 ; il sistema ha pertanto 6 gradi di libertà.

Lo stesso risultato si ottiene se $N > 3$ ed esistono in Γ tre punti non allineati. In tal caso, infatti, una volta assegnata la posizione di 3 punti non allineati, quindi anche la giacitura dell'unico piano π che li contiene, la posizione di tutti gli altri punti è individuata a meno di una riflessione rispetto a π . Ciò significa che tutte le configurazioni di Γ compatibili con le (4.1) si possono ottenere come unione di due sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}^{3N}$, ognuno dei quali è localmente in corrispondenza biunivoca con un aperto di $\mathbb{R}^6$.

I moti del corpo rigido vengono studiati sotto l'ulteriore assunzione che il vincolo di rigidità sia un vincolo ideale. Si assume cioè, vedi §2.1, che, dato un qualunque moto $q(t) = (q^{(1)}(t), \dots, q^{(N)}(t))$ compatibile con i vincoli nell'intervallo di tempo I e dato comunque $t \in I$, ogni punto P_i di Γ è soggetto ad una reazione vincolare $R^{(i)}(q(t), \dot{q}(t))$, così che, dato un qualunque moto $\tilde{q}(s, t)$ compatibile con i vincoli, definito in un intervallo contenente $s = t$ e tale che $\tilde{q}(t, t) = q(t)$, sia valida la condizione

$$\sum_{i=1}^N R^{(i)} \cdot \dot{\tilde{q}}(t, t) = 0 . \quad (4.2)$$

Da un punto di vista geometrico, questa condizione significa che il vettore $R = (R^{(1)}, \dots, R^{(N)}) \in \mathbb{R}^{3N}$ è ortogonale al sottospazio lineare tangente alla

superficie Σ dei punti $q = (q^{(1)}, \dots, q^{(N)}) \in \mathbb{R}^{3N}$ che soddisfano i vincoli (4.1). Pertanto R deve appartenere ad un sottospazio lineare di dimensione $3N - 6$ o $3N - 5$, a seconda che ci siano o meno in Γ tre punti non allineati.

Consideriamo ora un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ fisso rispetto ad Γ , con origine in O' (che non deve necessariamente appartenere a Γ). Se $q_{O'}$ sono le coordinate in $\mathcal{S}$ di O' al tempo t , per la Prop. 3.3, $\dot{\tilde{q}}^{(i)}(t, t)$ è necessariamente della forma $\dot{\tilde{q}}^{(i)}(t, t) = v_0 + \omega \wedge (q^{(i)} - q_{O'})$. La (4.2) può pertanto scriversi, usando l'identità $a \cdot (b \wedge c) = b \cdot (c \wedge a)$, nella forma

$$v_0 \cdot \left[\sum_{i=1}^N R^{(i)} \right] + \omega \cdot \left[\sum_{i=1}^N (q^{(i)} - q_{O'}) \wedge R^{(i)} \right] = 0. \quad (4.3)$$

D'altra parte, al variare di $\tilde{q}(s, t)$, i vettori v_0 e ω possono assumere qualunque valore in $\mathbb{R}^3$; ne segue che le condizioni (4.3) sono equivalenti alle condizioni

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N R^{(i)} = 0 \quad , \quad \mathcal{M} = \left[\sum_{i=1}^N (q^{(i)} - q_{O'}) \wedge R^{(i)} \right] = 0, \quad (4.4)$$

che si esprimono di solito dicendo che il sistema di reazioni vincolari è un *sistema di forze equilibrato*. Si noti che $\mathcal{M}$, momento delle reazioni vincolari rispetto a O' , non dipende da O' , come è facile verificare usando il fatto che la risultante $\mathcal{R}$ è nulla. Pertanto le (4.4) impongono al più 6 condizioni indipendenti sul sistema di reazioni vincolari, in accordo con le osservazioni fatte precedentemente (dopo la (4.2)) sulla dimensione del sottospazio lineare cui deve appartenere il vettore R .

Un'altra caratterizzazione del sottospazio lineare cui appartiene R , tuttavia non valida in generale, si può ottenere notando che, se si definisce $\tilde{q}(s, t)$ come prima e si indica con $\varphi_{ij}(q)$ il primo membro della (4.1), si deve avere $\varphi_{ij}(\tilde{q}(s, t)) = 0$ per ogni s vicino a t ; derivando rispetto a s , si trova:

$$\partial \varphi_{ij}(q(t)) \cdot \dot{\tilde{q}}(t, t) = 0, \quad (4.5)$$

avendo indicato con $\partial = (\partial^{(1)}, \dots, \partial^{(N)})$ il gradiente in $\mathbb{R}^{3N}$ e con $\partial^{(i)}$ il gradiente rispetto alle sole coordinate della particella i -esima. Pertanto il vettore $\partial \varphi_{ij}(q) \in \mathbb{R}^{3N}$ appartiene, per ogni $q \in \Sigma$, al sottospazio ortogonale al sottospazio tangente a Σ in q . Poiché $N(N - 1)/2 > 3N - 6$ per $N > 4$, i vettori $\partial \varphi_{ij}(q)$, con $1 \leq i < j \leq N$, non possono essere in generale indipendenti; ciò è possibile solo se $N \leq 4$. È tuttavia da aspettarsi che, in generale, essi generino tutto il sottospazio ortogonale; se ciò succede, il vettore R può rappresentarsi (in modo sicuramente non unico per $N > 4$) nella forma

$$R(q(t), \dot{q}(t)) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \lambda_{ij}(q(t), \dot{q}(t)) \partial \varphi_{ij}(q(t)), \quad (4.6)$$

essendo $\lambda_{ij}(q(t), \dot{q}(t))$ delle costanti scalari opportune, dipendenti dal moto effettivo. Si noti ora che, per le (4.1),

$$\partial^{(r)}\varphi_{ij}(q) = 2\delta_{ri}(q^{(r)} - q^{(j)}) + 2\delta_{rj}(q^{(r)} - q^{(i)}) , \quad (4.7)$$

da cui segue facilmente che

$$\begin{aligned} R^{(r)} &= \sum_{r < j \leq N} 2\lambda_{rj}(q^{(r)} - q^{(j)}) + \sum_{1 \leq i < r} 2\lambda_{ir}(q^{(r)} - q^{(i)}) = \\ &= \sum_{j \neq r} 2\tilde{\lambda}_{rj}(q^{(r)} - q^{(i)}) , \end{aligned} \quad (4.8)$$

con $\tilde{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij}$, se $i < j$, e $\tilde{\lambda}_{ij} = \lambda_{ji}$, se $i > j$, così che $\tilde{\lambda}_{ij} = \tilde{\lambda}_{ji}$. Il sistema di reazioni vincolari è pertanto della stessa forma di un *sistema di forze interne*, cioè di un sistema di forze agente su di un sistema di N particelle, tale che la forza $F^{(i)}$ agente sulla particella i -esima è della forma $F^{(i)} = \sum_{j \neq i} f_{ij}(q^{(i)} - q^{(j)})$, con $f_{ij} = f_{ji}$. Rispetto all'usuale definizione di sistema di forze interne, manca tuttavia la proprietà che le funzioni scalari f_{ij} dipendono solo dalle posizioni e velocità delle particelle di indice i e j , in quanto esse dipendono in generale (fra l'altro in modo non unico, per $N > 4$) dalle posizioni e velocità di tutte le particelle.

Le considerazioni precedenti mostrano che l'idea intuitiva di interpretare il vincolo di rigidità come dovuto ad una interazione additiva a due corpi fra le particelle, così da giustificare l'ipotesi di vincolo ideale (in quanto un sistema di forze interne soddisfa senz'altro le condizioni (4.4)), non è del tutto giustificata. Del resto, non è nemmeno vero in generale che R possa rappresentarsi nella forma (4.6), in quanto ciò è certamente falso se $N \geq 3$ e tutti i punti sono allineati. Per dimostrarlo, indichiamo con E_N l'insieme di vettori $\{\partial\varphi_{ij}, 1 \leq i < j \leq N\}$ e dimostriamo che ogni vettore di E_N può scriversi come combinazione lineare di $N - 1$ vettori, anch'essi appartenenti ad E_N , se $N \geq 3$ e se i punti sono tutti allineati. Da ciò segue subito che, nell'ipotesi precedente, E_N non può generare il sottospazio ortogonale, in quanto la sua dimensione è $3N - 5$ (il sistema ha 5 gradi di libertà) e $3N - 5 > N - 1$, se $N > 2$.

Per dimostrare l'affermazione precedente, consideriamo le prime tre particelle e supponiamo (il che non è restrittivo) che la retta che contiene i tre punti coincida con l'asse z e che $z_1 > z_2 > z_3$, avendo posto inoltre $q^{(i)} = (x_i, y_i, z_i)$. Usando la (4.7), si vede facilmente che

$$\begin{aligned} \partial\varphi_{12} &= (0, 0, 2l_{12}, 0, 0, -2l_{12}, 0, 0, 0, \underline{0}), \\ \partial\varphi_{13} &= (0, 0, 2l_{13}, 0, 0, 0, 0, 0, -2l_{13}, \underline{0}), \\ \partial\varphi_{23} &= (0, 0, 0, 0, 0, 2l_{23}, 0, 0, -2l_{23}, \underline{0}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

avendo indicato con $\underline{0}$ il vettore nullo con $3N - 9$ componenti. È facile verificare che i tre vettori (4.9) sono linearmente dipendenti e che uno qualunque

di essi può esprimersi come combinazione lineare degli altri due. Il ragionamento precedente può ovviamente applicarsi a qualunque terna di vettori $\partial\varphi_{ij}$; pertanto, se consideriamo l'insieme $\{\partial\varphi_{iN}, 1 \leq i \leq N-1\}$, ogni vettore di questo insieme può scriversi come combinazione lineare di $\partial\varphi_{1N}$ e $\partial\varphi_{1i}$. Poiché $\partial\varphi_{1i} \in E_{N-1}$, ne segue che, se ogni vettore di E_{N-1} può scriversi come combinazione lineare di $N-2$ suoi vettori, allora ogni vettore di E_N può scriversi come combinazione lineare di $N-1$ suoi vettori. Poiché l'affermazione precedente è vera per $N=3$, essa è vera per ogni $N \geq 3$.

Si possono fare facilmente altri esempi di sistemi di punti per cui la dimensione di E_N è inferiore a $3N-6$, anche se i punti non sono tutti allineati. Si supponga, per esempio, che $N = M+1$ e che i primi M punti sono allineati, senza essere allineati con l'ultimo. Poiché i vettori che appartengono a E_N , ma non a E_M , sono M , la dimensione di E_N può essere al più eguale a $(M-1) + M$, che è minore di $3(M+1)-6$, se $M > 2$. Sembra tuttavia complicato caratterizzare gli insiemi di punti per cui la dimensione di E_N è inferiore a $3N-6$.

4.2 Cinematica del corpo rigido.

Sia Γ un corpo rigido, costituito da N punti materiali distinti di masse $m_1, \dots, m_N$, e supponiamo che il vincolo di rigidità sia un vincolo ideale. Consideriamo inoltre un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ fisso rispetto a Γ con origine O' , non necessariamente appartenente a Γ . Vogliamo studiare la cinematica di Γ rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{S}$, con origine in O . Ovviamente il moto del corpo rigido è completamente determinato dal moto di $\mathcal{S}'$ rispetto ad $\mathcal{S}$, studiato nel §3, e può pertanto essere descritto, per esempio, in termini degli angoli di Eulero (vedi Fig. 19) e del moto di O' .

Consideriamo, per cominciare, l'energia cinetica $\mathcal{T}$ di Γ nel riferimento $\mathcal{S}$, indicando con P_i e $\vec{v}_i$ la posizione e la velocità del punto i -esimo. Indichiamo inoltre con $M = \sum_{i=1}^N m_i$ la *massa totale* di Γ e con G la posizione del *baricentro*, definito come l'unico punto tale che, dato un qualunque altro punto T dello spazio, valga l'identità

$$M \overrightarrow{TG} = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{TP_i}. \quad (4.10)$$

Poiché tutti i punti sono fermi rispetto ad $\mathcal{S}'$, usando la (3.21), la (3.22) e l'identità $\vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z}) = \vec{y} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{x})$, troviamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} M (\vec{v}_{O'})^2 + \vec{\omega} \cdot [\overrightarrow{O'G} \wedge (M \vec{v}_{O'})] + \mathcal{T}_{O'}, \\ \mathcal{T}_{O'} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P_i}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P_i}) = \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{O'P_i} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P_i}) . \quad (4.12)$$

Si noti che, se $O' = G$, il secondo termine nel membro di destra della (4.11) è nullo, per cui vale il *Teorema di König*

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \mathcal{T}_G , \quad (4.13)$$

che giustifica la definizione di $\mathcal{T}_G$ come *energia cinetica di rotazione intorno al baricentro*. Si noti infine che, se $\vec{v}_{O'} = 0$, $\mathcal{T}$ coincide con $\mathcal{T}_{O'}$.

Consideriamo ora il momento angolare $\vec{j}_T$ del sistema rispetto al polo T in $\mathcal{S}$; si ha

$$\vec{j}_T = \sum_{i=1}^N m_i , \overrightarrow{TP_i} \wedge \vec{v}_i = \overrightarrow{TO'} \wedge (M \vec{v}_G) + \overrightarrow{O'G} \wedge (M \vec{v}_{O'}) + \vec{j} , \quad (4.14)$$

$$\vec{j} \equiv \sum_{i=1}^N \overrightarrow{O'P_i} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P_i}) . \quad (4.15)$$

Si noti che, se $T = O' = G$, $\vec{j}_G = \vec{j}$.

La (4.12) e la (4.15) implicano che

$$\mathcal{T}_{O'} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2} (\Omega, J) , \quad (4.16)$$

dove Ω e J indicano gli elementi di $\mathbb{R}^3$, le cui componenti coincidono con le componenti in $\mathcal{S}'$ di $\vec{\omega}$ e $\vec{j}$, rispettivamente, e $(\cdot, \cdot)$ indica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$.

Usando l'identità $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ed indicando con $Q^{(i)} \in \mathbb{R}^3$ le componenti nel sistema $\mathcal{S}'$ di $\overrightarrow{O'P_i}$, la (4.15) può scriversi nella forma

$$J = \mathbb{I} \Omega , \quad (4.17)$$

dove $\mathbb{I}$ è la matrice con elementi

$$I_{rs} = \sum_{i=1}^N m_i \left[Q^{(i)2} \delta_{rs} - Q_r^{(i)} Q_s^{(i)} \right] . \quad (4.18)$$

Si noti che la matrice I , detta *matrice di inerzia*, dipende dalla geometria del corpo, nonché dalla scelta di $\mathcal{S}'$, ma è indipendente dal moto di $\mathcal{S}'$. Questa proprietà, che sarà cruciale nell'analisi dei moti del corpo rigido, non sarebbe vera, se si scrivesse la relazione (4.17) in termini delle componenti in un altro sistema di riferimento, per esempio $\mathcal{S}$.

Se si inserisce la (4.17) nella (4.16), si trova

$$\mathcal{T}_{O'} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2} (\Omega, \mathbb{I} \Omega) , \quad (4.19)$$

da cui segue, in particolare, che $\mathbb{I}$ è una matrice semidefinita positiva, poichè l'energia cinetica non può essere negativa. Poichè $\mathbb{I}$ è anche simmetrica, la si può diagonalizzare, si può cioè scegliere il sistema $\mathcal{S}'$ così che $I_{rs} = I_r \delta_{rs}$, con $I_r \geq 0, \forall r$. Se si opera una scelta di questo tipo, gli assi di $\mathcal{S}'$ sono detti *assi principali di inerzia*, $\mathbb{I}$ è detta *matrice principale di inerzia* ed i numeri I_r sono detti *momenti principali di inerzia*. Quest'ultima definizione dipende dal fatto che, per la (4.18), anche se $\mathbb{I}$ non è diagonale,

$$I_{rr} = \sum_{i=1}^N m_i \sum_{s \neq r} Q_s^{(i)2} = \sum_{i=1}^N m_i d_r^{(i)2}, \quad (4.20)$$

dove $d_r^{(i)}$ è la distanza di P_i dall'asse r -esimo di $\mathcal{S}'$, per cui I_{rr} coincide con il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse r -esimo. La (4.20) implica anche che al più uno dei momenti principali di inerzia può essere nullo e ciò può succedere solo se tutti i punti sono allineati e se O' è allineato con essi; in tal caso uno degli assi principali di inerzia, quello rispetto a cui il momento è nullo, è diretto come la retta contenente tutti i punti del sistema.

La matrice di inerzia permette di calcolare in modo molto semplice anche il momento di inerzia del corpo rigido rispetto a qualunque retta. Sia infatti n un elemento di $\mathbb{R}^3$ di modulo uno, che rappresenta il vettore $\vec{n}$ in $\mathcal{S}'$ e sia $\mathcal{C}$ una retta parallela a $\vec{n}$; per la (4.18), anche se $\mathbb{I}$ non è diagonale,

$$(n, \mathbb{I}n) = \sum_{i=1}^N m_i [(Q^{(i)}, Q^{(i)}) - (Q^{(i)}, n)^2] = \sum_{i=1}^N m_i d_{\mathcal{C}}^{(i)2}, \quad (4.21)$$

dove $d_{\mathcal{C}}^{(i)}$ è la distanza di P_i dalla retta $\mathcal{C}$. Pertanto $(n, \mathbb{I}n)$ è proprio il momento di inerzia del sistema rispetto alla retta $\mathcal{C}$.

Un'altra grandezza geometrica interessante associata con il corpo rigido è l'*ellissoide d'inerzia*, definito come l'insieme dei punti di $Q \in \mathcal{S}'$ tali che

$$(Q, \mathbb{I}Q) = 1. \quad (4.22)$$

L'ellissoide di inerzia dipende dalla scelta di O' , ma non dall'orientamento degli assi di $\mathcal{S}'$; i suoi assi coincidono con gli assi principali di inerzia. Inoltre la sua forma dà un'idea qualitativa della distribuzione dei punti in $\mathcal{S}'$, in quanto, se P è un suo punto di coordinate Q in $\mathcal{S}'$, la (4.22) implica che, posto $Q = |Q|n$ (così che $\vec{OP} = |\vec{OP}| \vec{n}$), deve essere $|\vec{OP}|^2 = 1/(n, \mathbb{I}n)$. Ne segue, in particolare, che, più l'ellissoide è allungato in una direzione, più la massa del corpo rigido è vicina alla retta passante per O' e parallela a quella direzione.

Due corpi rigidi diversi possono avere lo stesso ellissoide d'inerzia, che caratterizza completamente la cinematica. Pertanto, dal punto di vista cinematico, l'ellissoide d'inerzia può sostituire a tutti gli effetti il sistema di punti. Ciò non è in generale vero per la dinamica del corpo rigido, perchè

due sistemi di punti diversi con lo stesso ellissoide d'inerzia sono in generale soggetti a forze esterne diverse. Un caso importante in cui ciò non è vero è quello del corpo rigido in assenza di forze esterne; in tal caso il moto è determinato esclusivamente dall'ellissoide d'inerzia.

Il fatto che la cinematica del corpo rigido dipenda solo dalla matrice di inerzia permette inoltre di estendere in modo naturale il modello di corpo rigido ad un sistema continuo di punti, che occupa una regione compatta V dello spazio con densità $\rho(Q)$ assegnata. Basta utilizzare tutte le formule precedenti, definendo la matrice d'inerzia tramite l'equazione

$$I_{rs} = \int_V dQ \rho(Q) [Q^2 \delta_{rs} - Q_r Q_s] . \quad (4.23)$$

4.3 Moti del corpo rigido libero con un punto fisso.

Passiamo ora a studiare la dinamica del corpo rigido in alcuni casi particolari. Consideriamo per primo il caso più semplice, quello di un corpo rigido con un punto fisso in assenza di forze esterne. In tal caso possiamo scegliere le origini di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ ambedue coincidenti con il punto fisso; supporremo inoltre che gli assi di $\mathcal{S}'$ siano stati scelti in modo da diagonalizzare la matrice di inerzia e che il vincolo di punto fisso sia un vincolo ideale. Conviene distinguere tre casi in funzione dei valori dei momenti di inerzia principali.

a) $I_1 = I_2 = I_3 = I$.

In tal caso i vettori $\vec{j}$ e $\vec{\omega}$ sono paralleli, poichè, per la (4.17), $J_i = I\Omega_i$. D'altra parte, poichè il momento delle reazioni vincolari rispetto al punto fisso è nullo, grazie alla seconda delle (4.4), al fatto che il vincolo di punto fisso è realizzato con una reazione vincolare applicata in O ed all'assenza di altre forze, per la seconda equazione cardinale $\vec{j}$ è costante. Ne segue che anche $\vec{\omega}$ è costante, così che tutti i moti permessi sono rotazioni uniformi intorno ad un asse fissato.

b) $I_1 = I_2 = I, I_3 \neq I$.

In questo caso si dice che il corpo rigido è una *trottola* o un *giroscopio*. Se utilizziamo gli angoli di Eulero come variabili lagrangiane, la Lagrangiana del sistema si ottiene sostituendo nell'espressione (4.19) dell'energia cinetica le espressioni (3.28) delle componenti in $\mathcal{S}'$ di $\vec{\omega}$. Si trova

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 . \quad (4.24)$$

Poiché ψ e φ sono variabili cicliche, si hanno due leggi di conservazione

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = \text{cost} , \quad (4.25)$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{cost} . \quad (4.26)$$

La costanza di p_φ è strettamente legata alla conservazione del momento angolare (vedi punto a)). Infatti, p_φ può scriversi anche nella forma, valida anche se $I_1 \neq I_2$,

$$p_\varphi = \sum_{i=1}^3 I_i \Omega_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \Omega_1 \sin \theta \sin \psi + I_2 \Omega_2 \sin \theta \cos \psi + I_3 \Omega_3 \cos \theta . \quad (4.27)$$

Poiché le componenti di $\vec{e}_z$ in $\mathcal{S}'$ sono $(\sin \theta \sin \psi, \sin \theta \cos \psi, \cos \theta)$, come segue facilmente dalla Fig. 19, si vede subito, usando la (4.17), che $p_\varphi = \vec{j} \cdot \vec{e}_z$.

La costanza di $\vec{j}$ non è invece sufficiente a spiegare il fatto che $p_\psi = I_3 \Omega_3 = \vec{j} \cdot \vec{e}_\zeta$ è costante, in quanto il vettore $\vec{e}_\zeta$ non è in generale costante. In tal caso il fatto che $I_1 = I_2 = I$ è infatti essenziale, come mostra il calcolo seguente. Se indichiamo con $\vec{j}_\perp$ e $\vec{\omega}_\perp$ le proiezioni di $\vec{j}$ e $\vec{\omega}$ sul piano $(\xi\eta)$ di $\mathcal{S}'$, si ha

$$\vec{j}_\perp = I_1 \Omega_1 \vec{e}_\xi + I_2 \Omega_2 \vec{e}_\eta = I(\Omega_1 \vec{e}_\xi + \Omega_2 \vec{e}_\eta) = I \vec{\omega}_\perp , \quad (4.28)$$

$$\vec{j} = I \vec{\omega}_\perp(t) + I_3 \Omega_3 \vec{e}_\zeta(t) . \quad (4.29)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{j} \cdot \vec{e}_\zeta) &= \vec{j} \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{e}_\zeta \right) = \vec{j} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{e}_\zeta) = \\ &(\vec{j}_\perp + I_3 \Omega_3 \vec{e}_\zeta) \cdot [(\vec{\omega}_\perp + \Omega_3 \vec{e}_\zeta) \wedge \vec{e}_\zeta] = (I \vec{\omega}_\perp + I_3 \Omega_3 \vec{e}_\zeta) \cdot (\vec{\omega}_\perp \wedge \vec{e}_\zeta) = 0 . \end{aligned}$$

Le considerazioni precedenti valgono comunque si scelga il riferimento fisso $\mathcal{S}$. La conservazione del momento angolare suggerisce di scegliere la direzione dell'asse z di $\mathcal{S}$ coincidente con quella di $\vec{j}$. Questa scelta ha la conseguenza che $\mathcal{S}$ dipende dalle condizioni iniziali, ma permette di risolvere molto facilmente il problema di determinare i moti del sistema. Infatti, per la terza delle (3.28) e la (4.26), Ω_3 è una costante del moto; d'altra parte la scelta di $\mathcal{S}$ e la (4.17) implicano che $I_3 \Omega_3 = J_3 = \vec{j} \cdot \vec{e}_\zeta = |\vec{j}| \cos \theta$ (vedi Fig. 19). Ne segue, poiché anche $|\vec{j}|$ è costante, che θ è costante. Poiché, per le (4.25) e (4.26), $p_\varphi = I \dot{\varphi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta$, anche $\dot{\varphi}$ è allora costante, così come ψ , dato che $\dot{\psi} = p_\psi / I_3 - \dot{\varphi} \cos \theta$.

La discussione precedente si può riassumere dicendo che tutti i moti della trottola sono delle *precessioni regolari* intorno alla direzione del momento angolare, intendendo per precessione regolare intorno alla direzione di un asse dato r un moto tale che un asse r' , fisso rispetto al corpo, ruota con velocità angolare costante intorno a r , mentre il corpo ruota con velocità angolare costante intorno a r' . Nel caso della trottola l'asse r' è l'asse principale d'inerzia di momento I_3 .

Vediamo ora come si determina il moto della trottola in funzione delle condizioni iniziali, che ovviamente devono essere date rispetto ad un riferimento fisso $\mathcal{S}_0$, scelto in modo arbitrario una volta per tutte. Supponiamo pertanto che siano dati in $\mathcal{S}_0$ i versori di $\mathcal{S}'$ al tempo $t = 0$, insieme alla

velocità angolare $\vec{\omega}(0)$, e procediamo esplicitando la dipendenza dal tempo solo per le grandezze che non sono necessariamente costanti in base alla discussione precedente.

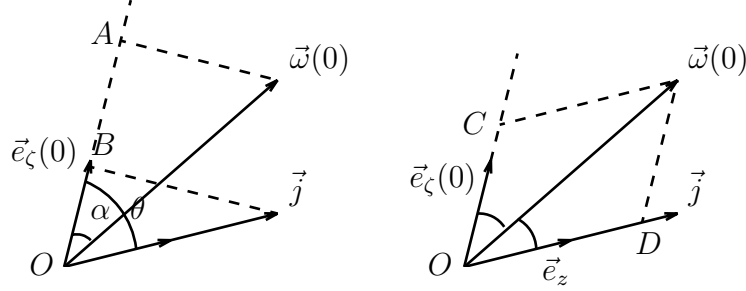


Figura 20: Decomposizioni di $\vec{\omega}(0)$.

La (4.29) implica che i vettori $\vec{j}$, $\vec{\omega}(t)$ e $\vec{e}_\zeta(t)$ sono complanari per ogni t e che il vettore costante $\vec{j}$ può essere determinato in funzione dei dati iniziali, usando la (4.29) con $t = 0$, cioè $\vec{j} = I\vec{\omega}_\perp(0) + I_3\Omega_3\vec{e}_\zeta(0)$; in particolare l'angolo θ , costante nel tempo, fra $\vec{j}$ e $\vec{e}_\zeta(t)$ è calcolabile in funzione dell'angolo α fra $\vec{\omega}(0)$ e $\vec{e}_\zeta(0)$ tramite l'equazione

$$\tan \theta = \frac{I}{I_3} \tan \alpha , \quad (4.30)$$

vedi il disegno nella parte sinistra di Fig. 20 (valido per $I > I_3$, altrimenti il vettore $\vec{j}$ sarebbe compreso fra $\vec{\omega}(0)$ e l'asse ζ), dove $|\vec{OA}| = \Omega_3$, $|\vec{OB}| = J_3 = I_3\Omega_3$.

Possiamo ora scegliere l'asse z diretto come $\vec{j}$, così che, in base alla discussione precedente, $\dot{\theta} = 0$, mentre $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ sono costanti del moto, i cui valori possono essere determinati usando la (3.27). Si ha

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\psi}\vec{e}_\zeta(t) . \quad (4.31)$$

Pertanto $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ sono le componenti di $\vec{\omega}(0)$ rispettivamente lungo l'asse z e l'asse ζ , vedi parte destra di Fig. 20, dove $\vec{OD} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$ e $\vec{OC} = \dot{\psi}\vec{e}_\zeta$. Usando il Teorema dei Seni, si trova facilmente che

$$\dot{\varphi} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} |\vec{\omega}(0)| , \quad \dot{\psi} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} |\vec{\omega}(0)| . \quad (4.32)$$

c) $I_1 < I_2 < I_3$.

In tal caso, come è facile controllare usando le (3.28), la Lagrangiana dipende esplicitamente, oltre che da θ , anche da ψ , per cui l'unica variabile ciclica è φ , cui corrisponde la legge di conservazione $p_\varphi = \text{cost}$. Non è pertanto più vero che p_ψ è costante e le equazioni di Lagrange non sono di

grande aiuto per determinare i moti del sistema. Come vedremo, risulta invece molto semplice raggiungere questo risultato, studiando preliminarmente le funzioni $J_i(t) = I_i \Omega_i(t)$.

Cominciamo con l'osservare che queste tre funzioni soddisfano due leggi di conservazione. La prima discende dalla conservazione dell'energia E (coincidente con l'energia cinetica), la quale implica, per la (4.19) e la (4.17), che

$$\sum_{i=1}^3 \frac{J_i^2}{a_i^2} = 1 \quad , \quad a_i = \sqrt{2EI_i} . \quad (4.33)$$

La seconda legge di conservazione segue dalla conservazione del modulo A del momento angolare, la quale implica che

$$\sum_{i=1}^3 J_i^2 = A^2 . \quad (4.34)$$

Ne segue che ogni moto del sistema è tale che, in $\mathcal{S}'$, il punto di coordinate $J(t)$ appartiene all'intersezione dell'ellissoide (4.33) e della sfera (4.34). Poiché questa intersezione non può essere vuota, le costanti E e A devono soddisfare la condizione

$$2EI_1 \leq A^2 \leq 2EI_3 . \quad (4.35)$$

Facciamo ora vedere che le componenti di $J(t)$ soddisfano un sistema relativamente semplice di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Se indichiamo con $R(t)$ la trasformazione ortogonale che fa passare dalle coordinate in $\mathcal{S}'$ alle coordinate in $\mathcal{S}$ di un vettore qualunque (vedi (3.16)) e con $j = (j_1, j_2, j_3)$ le componenti in $\mathcal{S}$ di $\vec{J}$, si ha, usando la (3.29)

$$0 = \frac{dj}{dt} = \frac{d}{dt}(RJ) = \dot{R}J + R\dot{J} = \omega \wedge j + R\dot{J} . \quad (4.36)$$

D'altra parte, per la (3.18), $\omega \wedge j = (R\Omega) \wedge (RJ) = R(\Omega \wedge J)$; pertanto $R(\Omega \wedge J + \dot{J}) = 0$ e quindi $\Omega \wedge J + \dot{J} = 0$, poiché R è invertibile. Usando anche la (4.17), si arriva finalmente alle equazioni, dette *equazioni di Eulero*,

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= (I_3^{-1} - I_2^{-1})J_2J_3 \\ \dot{J}_2 &= (I_1^{-1} - I_3^{-1})J_3J_1 \\ \dot{J}_3 &= (I_2^{-1} - I_1^{-1})J_1J_2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Le (4.37) permettono di calcolare immediatamente tutte le soluzioni costanti: esse si ottengono annullando almeno due delle componenti di J . In altre parole, $J(t) = J(0)$ se e solo se $J(0)$ appartiene ad uno degli assi coordinati di $\mathcal{S}'$. D'altra parte, se $\dot{J} = 0$, è anche $\dot{\Omega} = 0$, per cui

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}(R\Omega) = \dot{R}\Omega = \omega \wedge \omega = 0 . \quad (4.38)$$

Ne segue che le soluzioni costanti delle (4.37) corrispondono a moti rotatori uniformi intorno ad uno degli assi di inerzia principali del sistema (gli assi coordinati di $\mathcal{S}'$); infatti $\vec{\omega}$ è costante e coincide con la sua proiezione su uno degli assi coordinati di $\mathcal{S}'$, essendo nulle le proiezioni sugli altri due assi.

Se $J(0)$ non appartiene ad uno degli assi coordinati di $\mathcal{S}'$, la traiettoria di $J(t)$ si può determinare facilmente usando l'osservazione, fatta precedentemente, che essa è contenuta necessariamente nell'intersezione dell'ellissoide (4.33) e della sfera (4.34). Conviene distinguere tre casi differenti.

i) $2EI_1 < A^2 < 2EI_2$.

In tal caso il raggio della sfera è compreso fra il semiasse minore e quello intermedio dell'ellissoide, per cui l'intersezione è costituita da due curve chiuse, che girano (sulla superficie dell'ellissoide) intorno all'asse ξ , vedi Fig. 21.

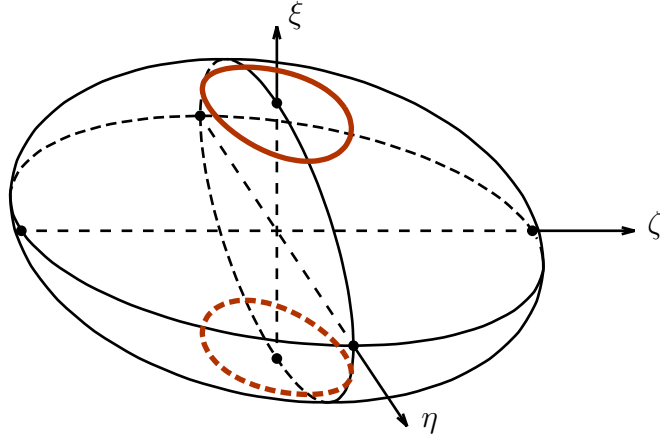


Figura 21: Traiettorie nel caso $2EI_1 < A^2 < 2EI_2$.

Poiché nessuna delle due curve contiene stati di equilibrio del sistema (4.37), ragionando come nel §1.1 si può concludere immediatamente che, se $J(0)$ appartiene ad una di queste curve, la traiettoria coincide con essa e la funzione $J(t)$ è periodica. Per determinare la legge oraria, si procede nel modo seguente.

Consideriamo le soluzioni la cui traiettoria coincide con la curva superiore, caratterizzata dal fatto che $J_1(t) > 0$, per ogni t ; le altre si studiamo in modo del tutto analogo. Poiché il sistema (4.37) è autonomo, tutte queste soluzioni si ottengono con una traslazione dell'origine dei tempi da quella con $J_3(0) = 0$ e $J_2(0) < 0$; supporremo pertanto che anche queste due condizioni siano soddisfatte. Usando le (4.33) e (4.34), si vede facilmente che

$$J_1^2\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) = (2EI_3 - A^2) - J_2^2\left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right), \quad (4.39)$$

$$J_3^2(1 - \frac{I_1}{I_3}) = (A^2 - 2EI_1) - J_2^2(1 - \frac{I_1}{I_2}). \quad (4.40)$$

Poiché $J_1(t) > 0$, la (4.39) può risolversi univocamente rispetto a J_1 nella forma $J_1 = \sqrt{\alpha_1 - \beta_1 J_2^2}$, con α_1 e β_1 costanti positive opportune. La (4.40) permette invece di esprimere J_3 in funzione di J_2 nella forma $J_3 = \pm \sqrt{\alpha_3 - \beta_3 J_2^2}$, con α_3 e β_3 positivi e $\alpha_3/\beta_3 < \alpha_1/\beta_1$; per la seconda delle (4.37) il segno di J_3 è positivo nei punti in cui $\dot{J}_2 > 0$, negativo in quelli in cui $\dot{J}_2 < 0$ (pertanto la traiettoria è percorsa in senso orario). Sostituendo nella seconda delle (4.37) le espressioni trovate per J_1 e J_3 , si trova che la funzione $J_2(t)$ deve soddisfare, nel tratto di curva in cui $J_3 > 0$, l'equazione differenziale

$$\dot{J}_2 = (I_1^{-1} - I_3^{-1}) \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1 J_2^2)(\alpha_3 - \beta_3 J_2^2)}, \quad (4.41)$$

e che, se T è il periodo del moto, $J_2(t)$ passa, nell'intervallo di tempo $[0, T/2]$, dal valore minimo $-\sqrt{\alpha_3/\beta_3} = J_2(0)$ al valore massimo $\sqrt{\alpha_3/\beta_3} = J_2(T/2)$. La legge oraria (o meglio la sua inversa) ed il periodo del moto si ricavano dalla (4.41) come nel caso dei moti unidimensionali conservativi, risolvendo l'equazione per separazione delle variabili, nella forma $t = t(J_2)$.

ii) $2EI_2 < A^2 < 2EI_3$.

In tal caso il raggio della sfera è compreso fra il semiasse maggiore e quello intermedio dell'ellissoide, per cui l'intersezione è costituita da due curve chiuse, che girano (sulla superficie dell'ellissoide) intorno all'asse ζ , vedi Fig. 22.

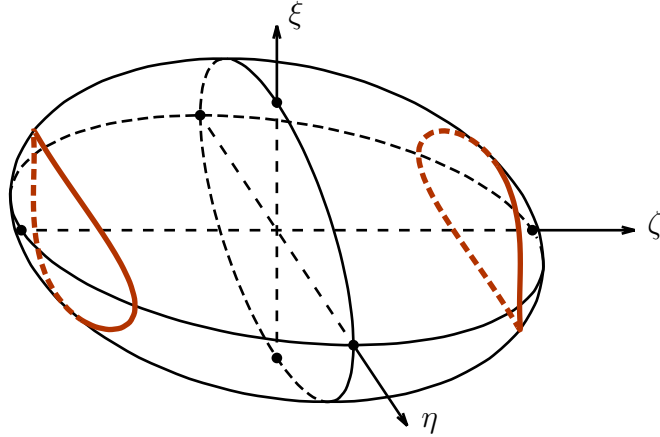


Figura 22: Traiettorie nel caso $2EI_2 < J^2 < 2EI_3$.

Procedendo come al punto i), si dimostra che le due curve corrispondono a moti periodici, di cui è possibile determinare la legge oraria ed il periodo, usando ancora la (4.41), che differisce solo per i valori delle costanti α_i e β_i .

Si noti che, in accordo con il fatto che ora è J_3 ad avere segno fissato sulle traiettorie, queste costanti soddisfano in questo caso la condizione $\alpha_1/\beta_1 < \alpha_3/\beta_3$

iii) $A^2 = 2EI_2$.

In tal caso il raggio della sfera è uguale al semiasse intermedio dell'ellissoide, per cui l'intersezione è costituita da due curve chiuse, che si intersecano nei due punti dell'ellissoide che stanno sull'asse η , vedi Fig. 23.

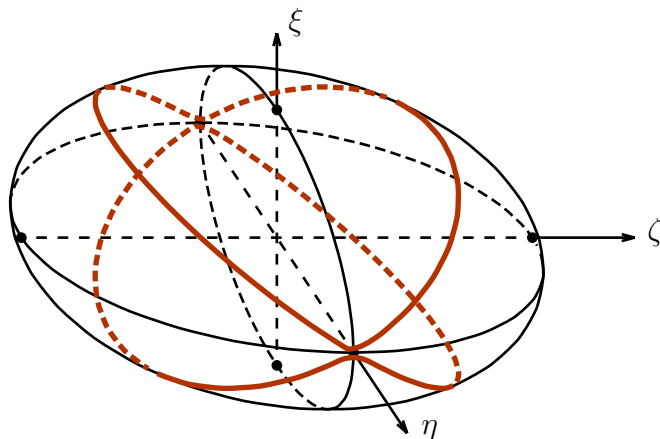


Figura 23: Traiettorie nel caso $A^2 = 2EI_2$.

Poiché questi due punti corrispondono a stati di equilibrio, ragionando come nel §1.1 si dimostra che l'intersezione contiene, oltre ai punti di equilibrio, quattro traiettorie diverse, che corrispondono ad altrettante classi di moti (individuati a meno di una traslazione temporale) che tendono asintoticamente, nel passato e nel futuro, ai due stati di equilibrio. È facile dedurre dalla figura che, su queste traiettorie, $J_1(t)$ e $J_3(t)$ hanno segno costante, al pari di $\dot{J}_2(t)$ e che $J_2(t)$ è determinata dall'equazione differenziale (4.41), dove però le costanti α_i e β_i soddisfano la condizione $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_3/\beta_3$. Con un pò di semplice algebra, si può anzi provare che

$$\dot{J}_2 = \gamma(A^2 - J_2^2) \quad , \quad \gamma = \sqrt{(I_2^{-1} - I_3^{-1})(I_1^{-1} - I_2^{-1})} . \quad (4.42)$$

Questa equazione si risolve facilmente in modo esplicito per separazione delle variabili. La soluzione con $J_2(0) = 0$ è data da

$$J_2(t) = A \tanh(\gamma At) . \quad (4.43)$$

Passiamo ora alla discussione di come la soluzione delle equazioni di Eulero possa essere utilizzata per determinare i moti del corpo rigido Γ in funzione

dei dati iniziali. Supponiamo pertanto che sia fissato un riferimento $\bar{\mathcal{S}}$ e che, all'istante $t = 0$, sia data la trasformazione ortogonale $\bar{R}$ che individua la posizione del riferimento solidale $\mathcal{S}'$ in $\bar{\mathcal{S}}$, insieme alla velocità angolare $\vec{\omega}(0)$. Se $\vec{\omega}(0)$ è diretto come uno degli assi coordinati di $\mathcal{S}'$, sappiamo dalla discussione precedente che $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(0)$; pertanto il moto è una rotazione uniforme di velocità angolare $\vec{\omega}(0)$.

Supponiamo ora che $\vec{\omega}(0)$ non sia diretto come uno degli assi coordinati di $\mathcal{S}'$, cioè che $\vec{\omega}(0)$ abbia componenti non nulle lungo due degli assi. Poiché $J_i(0) = I_i\Omega_i(0)$, nemmeno $\vec{j}$ è diretto come uno degli assi coordinati di $\mathcal{S}'$ ed è quindi possibile, almeno in un intorno di $t = 0$, descrivere il moto del sistema tramite gli angoli di Eulero in un riferimento fisso $\mathcal{S}$, il cui asse z è diretto come $\vec{j}$. Il vantaggio di questa scelta è nelle seguenti relazioni fra gli angoli di Eulero e le funzioni $J(t)$, che si ottengono proiettando $\vec{j}$ sugli assi di $\mathcal{S}'$.

$$\begin{aligned} J_1(t) &= A \sin \theta(t) \sin \psi(t) , \\ J_2(t) &= A \sin \theta(t) \cos \psi(t) , \\ J_3(t) &= A \cos \theta(t) . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Per dimostrare queste relazioni basta osservare la Fig. 19 e notare che la proiezione di $\vec{j}$ sul piano $(\xi\eta)$ ha modulo $A \sin \theta$ e forma un angolo $\pi/2 - \psi$ con l'asse ξ , mentre la proiezione sull'asse ζ è uguale a $A \cos \theta$.

Poiché, come abbiamo mostrato precedentemente, $|J_3(t)|/A < 1$ per ogni t , la terza delle (4.44) implica che $\sin \theta(t) > 0$ per ogni t ; pertanto gli angoli di Eulero sono ben definiti sempre e $\theta(t) = \arccos J_3(t)/A$ è una funzione periodica, dello stesso periodo di $J(t)$. La funzione $\psi(t)$ può essere calcolata usando le prime due delle (4.44), che implicano la relazione

$$\tan \psi(t) = \frac{J_1(t)}{J_2(t)} . \quad (4.45)$$

Se $J_1(t) \neq 0$ per ogni t , come succede per esempio nelle soluzioni delle (4.37) studiate al punto i), allora $\psi(t)$ è la funzione regolare che si ottiene risolvendo la (4.3) in modo che $\sin \theta(t)$ abbia lo stesso segno di $J_1(t)$; ne segue che $\psi(t)$ è una funzione periodica, dello stesso periodo di $J(t)$. Se invece $J_1(t)$ non ha segno costante, come nelle soluzioni studiate al punto ii), la (4.3) deve essere risolta in modo che $\psi(t)$ sia una funzione regolare che si incrementa di 2π in un periodo delle funzioni $J(t)$. Poiché ψ è un angolo, anche in questo caso $\psi(t)$ è di fatto una funzione periodica dello stesso periodo di $J(t)$.

Rimane da studiare la funzione $\varphi(t)$. Poiché non esiste alcuna relazione che mette in relazione direttamente φ con gli altri angoli di Eulero e con J , facciamo ricorso alle (3.28) per esprimere $\dot{\varphi}(t)$ in funzione delle grandezze già calcolate. Si ha:

$$\dot{\varphi} = \frac{\sin \psi \Omega_1 + \cos \psi \Omega_2}{\sin \theta} = A \frac{I_1^{-1} J_1^2 + I_2^{-1} J_2^2}{J_1^2 + J_2^2} , \quad (4.46)$$

avendo usato nel secondo passaggio anche le (4.44). Pertanto $\dot{\varphi}(t)$ è una funzione periodica dello stesso periodo di $J(t)$, positiva per ogni t . Ne segue, ragionando come nell'esempio 2.2 del par. 2.4, che la trasformazione ortogonale $R(t)$, che descrive il moto di Γ , è una funzione quasiperiodica con due periodi, uno eguale al periodo T della soluzione delle (4.37), l'altro dato dall'equazione

$$\frac{2\pi}{T_2} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \dot{\varphi}(t). \quad (4.47)$$

4.4 La trottola pesante.

Un altro problema che può risolversi completamente è quello dei moti della trottola ($I_1 = I_2 = I \neq I_3$) con un punto fisso diverso dal baricentro, soggetta alla forza peso. In tal caso il momento angolare non è conservato, ma esiste una direzione privilegiata, quella della verticale, per cui è naturale impostare il problema, usando come variabili lagrangiane gli angoli di Eulero rispetto ad un riferimento fisso $\mathcal{S}$, il cui asse z è diretto come la verticale, vedi Fig. 24.

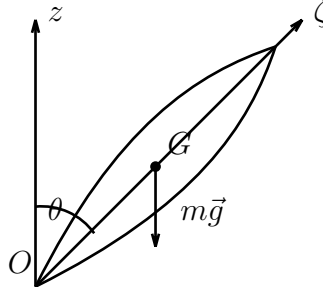


Figura 24: Trottola pesante.

La Lagrangiana del sistema si ottiene aggiungendo all'espressione (4.24) dell'energia cinetica l'energia potenziale, che coincide con l'energia potenziale di una particella di massa eguale alla massa m del corpo rigido Γ , posta nel baricentro G di Γ . Si ha pertanto

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta, \quad (4.48)$$

se l indica la distanza di G da O .

Si noti che le variabili ψ e ϕ sono variabili cicliche, come nel caso della trottola priva di peso; pertanto i momenti coniugati p_ψ e p_ϕ definiti in (4.26) e (4.25) sono ancora delle costanti del moto. Se $\sin \theta(0) \neq 0$, possiamo allora esprimere $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ in funzione di p_ψ e p_ϕ , almeno finché $\sin \theta(t) \neq 0$, e sostituire

le espressioni trovate nell'equazione che esprime la conservazione dell'energia, ottenendo l'equazione

$$E' \equiv E - \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I_3} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{I \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta . \quad (4.49)$$

Poiché E' , al pari di E , è una costante del moto, ci siamo ridotti ad un problema unidimensionale conservativo nella variabile θ , che può essere studiato con i metodi sviluppati nel par. 1.1. Pertanto, se $\sin \theta(0) \neq 0$, la funzione $\theta(t)$ si determina studiando la funzione

$$V_{eff}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{I \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta , \quad (4.50)$$

il *potenziale efficace* del nostro problema. Bisogna distinguere due casi, $|p_\psi| \neq |p_\phi|$ e $|p_\psi| = |p_\phi|$.

a) $|p_\psi| \neq |p_\phi|$.

In tal caso, poiché $V_{eff}(\theta)$ diverge per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, i valori di $\theta(t)$ devono essere contenuti in un intervallo $[\theta_1, \theta_2] \subset (0, \pi)$, individuato dalla condizione che $E' - V_{eff}(\theta)$ è positivo all'interno dell'intervallo ed è nullo negli estremi; ciò implica in particolare che gli angoli di Eulero sono ben definiti per ogni t . Facciamo vedere che l'intervallo $[\theta_1, \theta_2]$ è univocamente individuato, cioè che l'equazione $E' - V_{eff}(\theta) = 0$ ammette al più due soluzioni in $(0, \pi)$. Per dimostrarlo è sufficiente notare che, se si pone $u = \cos \theta$, $u_i = \cos \theta_i$, l'intervallo $[\theta_1, \theta_2]$ è in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[u_2, u_1] \subset (-1, +1)$, essendo u_1 e u_2 soluzioni dell'equazione

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (b - au)^2 = 0 , \quad (4.51)$$

con

$$\alpha = \frac{2E'}{I} , \quad \beta = \frac{2mgl}{I} , \quad a = \frac{p_\psi}{I} , \quad b = \frac{p_\phi}{I} . \quad (4.52)$$

La (4.51) è un'equazione algebrica di terzo grado a coefficienti reali, pertanto ha almeno una e al più tre soluzioni reali differenti. Inoltre, $f(u) \rightarrow \pm\infty$ per $u \rightarrow \pm\infty$, poiché $\beta > 0$, e $f(\pm 1) = -(b \mp a)^2 < 0$; ne segue che una soluzione è certamente maggiore di 1 e non c'è nessuna soluzione con $u < -1$. D'altra parte, c'è sicuramente una soluzione reale in $(-1, 1)$, poiché, se $u_0 = \cos \theta(0)$, la (4.49) implica che $f(u_0) = (1 - u_0^2)\dot{\theta}(0)^2 \geq 0$. Si può pertanto concludere che ci sono solo due soluzioni reali, eventualmente coincidenti, $u_2 \leq u_1$ nell'intervallo $(-1, 1)$, vedi Fig. 25

Ne segue che $V_{eff}(\theta)$ ha un solo punto di stazionarietà θ_0 nell'intervallo $(0, \pi)$, che è anche un punto di minimo assoluto. Pertanto la funzione $\theta(t)$ è una funzione periodica per ogni valore di $E' > V_{eff}(\theta_0)$, di periodo

$$T_0 = 2 \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} , \quad (4.53)$$

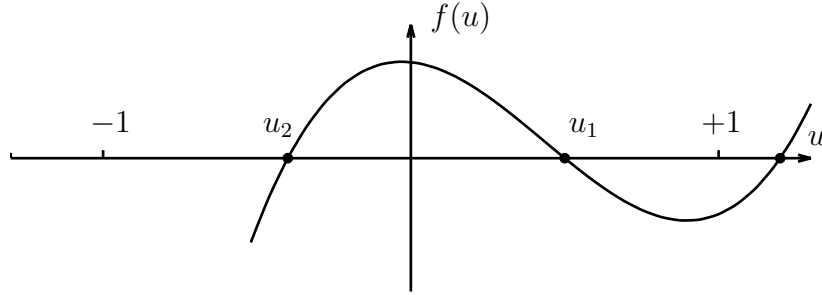


Figura 25: Grafico di $f(u)$.

mentre è costante (con valore θ_0), se $E' = V_{eff}(\theta_0)$.

Per completare la descrizione del moto, dobbiamo determinare le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$. Usando le (4.26) e (4.25), insieme alla (4.52), è facile vedere che

$$\dot{\varphi} = \frac{b - au}{1 - u^2} \quad , \quad \dot{\psi} = \frac{I}{I_3}a - u\dot{\varphi} . \quad (4.54)$$

Pertanto $\dot{\varphi}(t)$ e $\dot{\psi}(t)$ sono anch'esse funzioni periodiche di periodo T_0 , se $E' > V_{eff}(\theta_0)$, o funzioni costanti se $E' = V_{eff}(\theta_0)$. Ne segue, ragionando come nell'esempio 2.2 del par. 2.4, che

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega_1 t + S_1(t) \quad , \quad \psi(t) = \psi(0) + \omega_2 t + S_2(t) , \quad (4.55)$$

$S_1(t)$ e $S_2(t)$ essendo due funzioni periodiche di periodo T_0 a media nulla e nulle in $t = 0$, mentre ω_1 e ω_2 sono i valori medi di $\dot{\varphi}(t)$ e $\dot{\psi}(t)$ nell'intervallo $[0, T_0]$. Poiché la matrice ortogonale $R(t)$ che descrive il moto della trottole è periodica negli angoli di Eulero, i suoi elementi di matrice sono funzioni quasiperiodiche di t , con periodi T_0 , $T_1 = 2\pi/\omega_1$ e $T_2 = 2\pi/\omega_2$.

Si noti che, se $E' = V_{eff}(\theta_0)$, $S_1(t) = S_2(t) = 0$, poiché $\dot{\varphi}(t)$ e $\dot{\psi}(t)$ sono costanti, e che $\omega_1 \neq 0$. Quest'ultima affermazione si dimostra nel modo seguente. Innanzi tutto, se $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, $u_0 = \cos \theta_0$ è uno zero doppio di $f(u)$, pertanto $f'(u_0) = 0$. D'altra parte, se $\dot{\varphi}(t) = 0$, la prima delle (4.54) implica che $b = au_0$; questa condizione, insieme alla $f(u_0) = 0$, implica (tramite un facile calcolo) che $\alpha = \beta u_0$. Ne segue che $f'(u_0) = -\beta(1 - u_0)^2 < 0$, che è incompatibile con l'ipotesi di partenza.

I risultati precedenti possono descriversi geometricamente in modo molto semplice in termini dell'intersezione $\mathcal{C}$ dell'asse di simmetria dell'ellissoide d'inerzia della trottole (l'asse ζ del sistema solidale) con la sfera Σ di raggio 1 e centro 0 del sistema fisso $\mathcal{S}$. Questa intersezione è una curva che si avvolge intorno all'asse z , compresa fra i "paralleli" $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$. Bisogna distinguere tre casi, a secondo che, posto $u^* = b/a$, $u^* \notin [u_2, u_1]$, $u^* \in (u_2, u_1)$ oppure $u^* \in \{u_1, u_2\}$.

Se $u^* \notin [u_2, u_1]$, la prima delle (4.54) implica che $\dot{\varphi}(t)$ ha segno costante, per cui un tratto abbastanza lungo della curva $\mathcal{C}$ appare come nel grafico di sinistra di Fig. 26. Si ha un moto di precessione dell'asse ζ intorno all'asse z con velocità angolare variabile ma di segno costante, accompagnato da un moto di *nutazione*, come viene chiamata la variazione dell'angolo θ . Si noti che tale moto non è in generale periodico, pertanto la curva $\mathcal{C}$ non è in generale chiusa. Perché ciò avvenga è infatti necessario che esista un tempo T tale che $\theta(T) = \theta(0)$ e $\dot{\theta}(T) = \dot{\theta}(0)$ e $\varphi(T) = \varphi(0) + 2\pi n_1$, con n_1 intero. La prima condizione implica che $T = n_0 T_0$, con n_0 intero, mentre la seconda, usando la (4.55) e notando che $S_1(n_0 T_0) = S_1(0) = 0$, implica che $T = n_1 T_1$. Ne segue che il moto dell'asse è periodico se e solo se T_1/T_0 è un numero razionale. Se ciò non succede, si può dimostrare che la curva $\mathcal{C}$ è addirittura densa nella regione compresa fra i paralleli $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$.

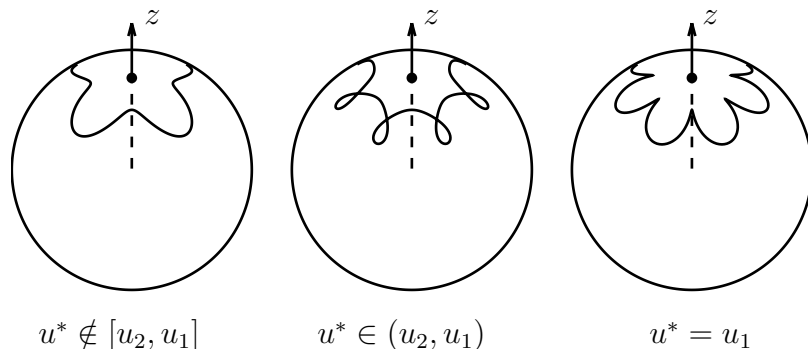


Figura 26: Moto dell'intersezione dell'asse ζ con la sfera unitaria di $\mathcal{S}$.

Se $u^* \in (u_2, u_1)$, $\dot{\varphi}(t)$ si annulla quando $\cos \theta(t) = u^*$ e si ha la situazione descritta nel disegno centrale di Fig. 26, caratterizzata dal fatto che la curva $\mathcal{C}$ forma dei nodi, uno in ogni intervallo di tempo di lunghezza T_0 , dovuti al fatto che l'angolo $\varphi(t)$ è una funzione crescente di t , quando $\cos \theta(t) < u^*$, mentre è decrescente quando $\cos \theta(t) > u^*$. Si noti tuttavia che, se $\omega_1 \neq 0$ (come si è supposto in figura), $\varphi(t)$ si incrementa di una quantità $\omega_1 T_0 \neq 0$ nel tempo T_0 , per cui l'asse ζ ha comunque un moto medio di precessione intorno all'asse z .

Se infine $u^* = u_1$ o $u^* = u_2$, il segno di $\dot{\varphi}(t)$ è costante, ma $\dot{\varphi}(t)$ si annulla quando $\theta(t) = \theta_1$ o $\theta(t) = \theta_2$, rispettivamente. La curva $\mathcal{C}$ è della forma indicata (nel caso $u^* = u_1$) nel disegno di destra di Fig. 26.

L'ultimo caso si presenta in particolare quando si studia il problema della *trottola veloce*, quando si studia cioè il moto di una trottola posta inizialmente in rotazione veloce intorno al suo asse di simmetria, che forma un angolo piccolo ma maggiore di zero con l'asse z . Le condizioni iniziali di questo problema sono, escluse quelle su $\varphi(0)$ e $\psi(0)$, che non hanno ovviamente

alcun ruolo nel determinare le proprietà qualitative del moto,

$$\theta(0) = \theta_0 > 0 \quad , \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0 \quad , \quad \dot{\psi}(0) = \gamma \quad , \quad (4.56)$$

e si è interessati al comportamento della soluzione per $\gamma \rightarrow \infty$.

Usando le (4.25), (4.26), (4.49) e (4.52), è facile vedere che

$$a = \frac{I_3}{I_1} \gamma \quad , \quad b = a \cos \theta_0 \quad , \quad \alpha = \beta \cos \theta_0 \quad , \quad (4.57)$$

così che $f(u)$ assume la forma

$$f(u) = \beta(u_0 - u)[1 - u^2 - \lambda(u_0 - u)] \quad , \quad \lambda = \frac{a^2}{\beta} \quad , \quad (4.58)$$

la quale implica in particolare che u_0 è uno degli estremi dell'intervallo $[u_2, u_1]$ cui appartiene $u(t) = \cos \theta(t)$, vedi Fig. 25. D'altra parte è evidente che inizialmente $\theta(t)$ deve diminuire (la trottola tende a cadere sotto la forza di gravità), per cui $u_0 = u_1$ ed u_2 è la radice più piccola dell'equazione di secondo grado $1 - u^2 - \lambda(u_0 - u) = 0$; un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned} u_0 - u_2 &= \frac{1}{2} \left[-(\lambda - 2u_0) + \sqrt{(\lambda - 2u_0)^2 + 4(1 - u_0^2)} \right] = \\ &= \frac{2(1 - u_0^2)}{(\lambda - 2u_0) + \sqrt{(\lambda - 2u_0)^2 + 4(1 - u_0^2)}} \quad . \end{aligned} \quad (4.59)$$

Quindi l'ampiezza dell'oscillazione di $u(t)$, che è eguale a $u_0 - u_2$, tende a zero per $\lambda \rightarrow \infty$, quindi anche per $\gamma \rightarrow \infty$, e si vede subito che $u_0 - u_2 = \sin^2 \theta_0 / \lambda + O(\lambda^{-2})$. Pertanto anche l'ampiezza $\delta = \theta_2 - \theta_1$ del moto di nutazione tende a zero per $\lambda \rightarrow \infty$; poiché $u_0 - u_2 = \cos \theta_1 - \cos \theta_2 = \cos \theta_0 - \cos(\theta_0 + \delta) = \delta \sin \theta_0 + O(\delta^2)$, si ha, più precisamente,

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\sin \theta_0}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{\beta I_1^2}{I_3^2} \frac{1}{\gamma^2} \sin \theta_0 + O\left(\frac{1}{\gamma^4}\right) \quad . \quad (4.60)$$

Per quel che riguarda il periodo T_0 del moto, si noti che esso è eguale al periodo della funzione $x(t) = u_0 - u(t)$, che soddisfa, come è facile verificare, l'equazione

$$\dot{x}^2 = -V(x) \quad , \quad V(x) = \beta x[x^2 + x(\lambda - 2u_0) - (1 - u_0^2)] \quad . \quad (4.61)$$

T_0 è pertanto eguale al periodo del moto di una particella di massa $m = 2$ ed energia $E = 0$, che si muove sotto l'azione di una forza di energia potenziale $V(x)$. Tale moto si svolge nell'intervallo $[0, x_2 = u_0 - u_2]$; pertanto, usando la (1.10) ed il ragionamento impiegato nella dimostrazione della Prop. 1.3, si ottiene la stima

$$2\pi \sqrt{\frac{2}{\max_{0 \leq x \leq x_2} V''(x)}} \leq T_0 \leq \sqrt{\frac{2}{\min_{0 \leq x \leq x_2} V''(x)}} \quad . \quad (4.62)$$

D'altra parte $V''(x) = 6\beta x + 2\beta(\lambda - 2u_0)$; ne segue facilmente che

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\beta\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)} = \frac{I_1}{I_3} \frac{1}{\gamma} + O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}\right). \quad (4.63)$$

Infine, usando le (4.54), si trova che $\dot{\varphi}(t)$ ha lo stesso segno di γ e che, per $\gamma \rightarrow \infty$,

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |\dot{\varphi}(t)| = O\left(\frac{1}{|\gamma|}\right), \quad \dot{\psi}(t) = \gamma + O\left(\frac{1}{|\gamma|}\right). \quad (4.64)$$

I risultati precedenti possono descriversi dicendo che, se γ è molto grande, l'asse di simmetria della trottola gira molto lentamente intorno all'asse z , con un moto di nutazione di ampiezza molto piccola, mentre la trottola gira molto velocemente intorno ad esso. Si tratta di un fenomeno ben noto a chiunque abbia giocato con una ... trottola.

b) $|p_\varphi| = |p_\psi|$.

Sotto questa ipotesi il potenziale efficace (4.50) diverge solo in $\theta = \pi$, se $p_\varphi = p_\psi$, o in $\theta = 0$, se $p_\varphi = -p_\psi$. Consideriamo in dettaglio il caso $p_\varphi = p_\psi$; l'altro caso si tratta in modo simile. Il potenziale efficace assume allora, come è facile verificare, la forma

$$V_{eff}(\theta) = \frac{1}{2} I_1 a^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} + mgl \cos \theta, \quad (4.65)$$

avendo definito a come prima. Ne segue che i valori dell'angolo θ non sono più ristretti all'intervallo $(0, \pi)$, come richiesto dalla definizione degli angoli di Eulero, bensì all'intervallo $(-\pi, \pi)$, se $a \neq 0$, o a tutto l'asse reale, se $a = 0$. Per continuare nell'analisi dei moti del sistema, bisogna pertanto determinare le funzioni $\theta(t)$, $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ come funzioni regolari di t , eliminando ogni restrizione sui loro valori; essendo la matrice $R(t)$, che individua la posizione della trottola in $\mathcal{S}$, una funzione regolare degli angoli di Eulero, si otterrà in questo modo la legge del moto corretta. In altre parole, la definizione degli angoli di Eulero deve essere opportunamente modificata quando $\theta(t)$ passa per il valore $\theta = 0$, in modo che $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ siano delle funzioni continue; ciò implica in particolare che i valori di φ e ψ sono definiti univocamente anche nelle configurazioni con $\theta = 0$.

Il caso $a = 0$ è banale. Infatti, se $p_\varphi = p_\psi = 0$, le (4.25) e (4.26) implicano che

$$\dot{\varphi} \sin^2 \theta = 0, \quad \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = 0. \quad (4.66)$$

Poichè, per ipotesi, $\sin \theta(0) \neq 0$, le (4.66) implicano che $\dot{\varphi}(t) = \dot{\psi}(t) = 0$; quindi la trottola non ruota intorno al suo asse e questo si muove in un piano fisso, determinato dal valore di $\varphi(0)$. Si hanno insomma gli stessi moti di un pendolo vincolato a muoversi in un piano, visto che $V_{eff}(\theta) = mgl \cos \theta$.

Passiamo ora a considerare il caso $a \neq 0$, escludendo le soluzioni tali che $\theta(t) = 0$ per ogni t (che verranno discusse alla fine di questa sezione). Poiché

$V_{eff}(\theta)$ diverge per $\theta \rightarrow \pm\pi$, la forma di $V_{eff}(\theta)$ è determinata dal numero e dalla posizione dei suoi punti di stazionarietà. Si ha

$$V'_{eff}(\theta) = \frac{1}{4}I_1a^2 \sin \theta \left[\frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \lambda \right] \quad , \quad \lambda = \frac{4mgl}{I_1a^2} . \quad (4.67)$$

Ne segue che, se $\lambda \leq 1$, esiste un solo punto di stazionarietà, che è necessariamente un punto di minimo, in $\theta = 0$. Se invece $\lambda > 1$, oltre a $\theta = 0$, ci sono altri due punti di stazionarietà in $\theta = \pm\theta^*$, con $\theta^* = \arccos \lambda^{-1/4}$; $\theta = 0$ deve allora essere un punto di massimo, mentre gli altri due punti sono punti di minimo, vedi Fig. 27.

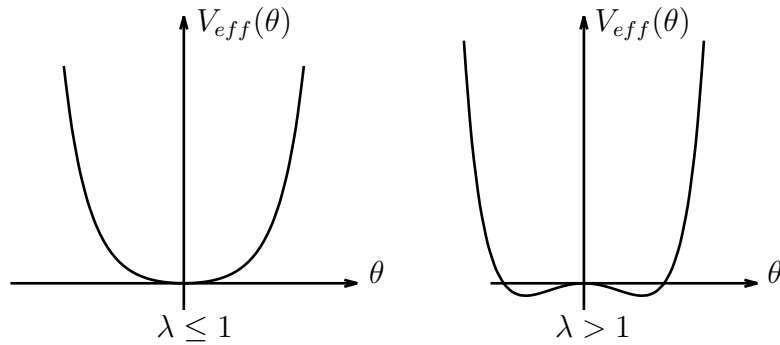


Figura 27: Grafico di $V_{eff}(\theta) - V_{eff}(0)$ al variare di λ .

La teoria dei moti unidimensionali conservativi ci permette di concludere che, se $\lambda \leq 1$, $\theta(t)$ è sempre una funzione periodica. Se invece $\lambda > 1$, ci sono, oltre alle soluzioni periodiche, due soluzioni costanti, $\theta(t) = \theta^*$ e $\theta(t) = -\theta^*$, e due famiglie di soluzioni non periodiche, tali che $E' = V_{eff}(0)$ e $\theta(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$. Si noti che, se $E' \leq V_{eff}(0)$, le soluzioni per cui $\theta(t) \in [-\pi, 0]$ descrivono gli stessi moti di quelle con $\theta(t) \in [0, \pi]$, ma con una diversa definizione degli angoli di Eulero.

Le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ si determinano come prima, usando le (4.54), che, se $a = b = p_\psi/I$, diventano (con alcuni semplici passaggi)

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\psi}{2I \cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad , \quad \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I} \left(\frac{I}{I_3} - \frac{1}{2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) , \quad (4.68)$$

per cui i moti sono tutti quasi periodici, eccetto quelli con $\lambda > 1$ e $E' = V_{eff}(0)$, caratterizzati dal fatto che, per $t \rightarrow \pm\infty$, mentre l'asse della trottola tende ad allinearsi con l'asse z , $\dot{\varphi}(t)$ e $\dot{\psi}(t)$ tendono a dei valori asintotici

$$\dot{\varphi}_\infty = \frac{p_\psi}{2I} \quad , \quad \dot{\psi}_\infty = \frac{p_\psi}{I} \left(\frac{I}{I_3} - \frac{1}{2} \right) . \quad (4.69)$$

Questi sono naturalmente anche i valori che devono assumere $\dot{\varphi}(t)$ e $\dot{\psi}(t)$ negli istanti in cui $\theta(t) = 0$, nel caso dei moti quasiperiodici.

Si noti ora che il problema unidimensionale per $\theta(t)$ ammette anche, per ogni valore di λ , la soluzione costante $\theta(t) = 0$. Questa soluzione dovrebbe essere scartata, perché incompatibile con l'ipotesi fatta finora che $\sin \theta(0) \neq 0$. Tuttavia tali moti, così come quelli in cui $\theta(t) = \pi$, sono ovviamente possibili; essi descrivono una situazione in cui l'asse ζ mantiene la stessa direzione dell'asse z per tutti i tempi, con il verso concorde o discorde. In tal caso, gli angoli φ e ψ non sono univocamente definiti, ma si può procedere, per esempio, come nello studio dei moti per il corpo rigido con un punto fisso in assenza di forze, descrivendo il moto tramite le componenti del momento angolare nel sistema solidale. Le equazioni di Eulero (4.37) si modificano per la presenza a secondo membro di un termine connesso al momento della forza peso rispetto al punto fisso. Tuttavia, poiché tale termine è nullo per i moti con $J_1 = J_2 = 0$, esiste ancora una soluzione costante corrispondente a rotazioni uniformi intorno all'asse z , con velocità angolare Ω_3 costante.

Può tuttavia essere utile descrivere questi moti nello schema precedente, definendo opportunamente le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$. Ciò può essere fatto ponendo $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_\infty$ e $\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_\infty$, con $\Omega_3 = p_\psi/I_3$. Questa scelta garantisce, per l'osservazione che segue la (4.69), che, quando $\lambda \leq 1$, le leggi orari degli angoli di Eulero convergono, per $E' - V_{eff}(0) \rightarrow 0$, a quelle del moto con $\theta(t) = 0$. Ci si può allora porre il problema della stabilità di questo moto, ci si può cioè chiedere come varia il moto della trottola se si perturbano le condizioni iniziali; questo problema è di solito indicato come il problema della *trottola dormiente*.

Nel caso $\lambda > 1$ la risposta è molto facile: il moto con $\theta(t) = 0$ è instabile, in quanto ciò è vero già per il problema unidimensionale nella variabile θ , quando ci si limita a perturbazioni che preservano la condizione $p_\varphi = p_\psi$. Se invece $\lambda < 1$, il problema posto è più sottile, in quanto è essenziale tenere conto del fatto che la forma del potenziale efficace dipende dai dati iniziali. Se ci si limita a perturbazioni che conservano la condizione $p_\varphi = p_\psi$, il potenziale varia poco e mantiene la stessa forma, con un minimo in $\theta = 0$; pertanto il moto con $\theta(t) = 0$ appare stabile per il problema unidimensionale relativo a θ ed è facile vedere che ciò vale anche se si tiene conto delle variazioni degli altri due angoli. È tuttavia possibile perturbare i dati iniziali così che $p_\varphi - p_\psi$ è piccolo ma diverso da 0. In tal caso, la forma del potenziale efficace si modifica radicalmente, in quanto nasce una singolarità in $\theta = 0$, vedi Fig. 28, ed il grafico del potenziale si sdoppia in due curve con minimo in $\theta = \pm\theta^*$. La curva di destra è ovviamente della stessa forma di quella considerata nel punto a), mentre quella di sinistra, riflessa della prima rispetto all'asse delle ordinate, è quella che si otterrebbe se si definisse l'angolo θ con valori in $(-\pi, 0)$. Pertanto il moto perturbato si svolge nell'intorno di θ^* ed è facile convincersi che $\theta^* \rightarrow 0$ se la perturbazione tende a 0, mentre $\dot{\varphi}(t) \rightarrow \dot{\varphi}_\infty$ e $\dot{\psi}(t) \rightarrow \dot{\psi}_\infty$. Quindi il moto con $\theta(t) = 0$ è stabile.

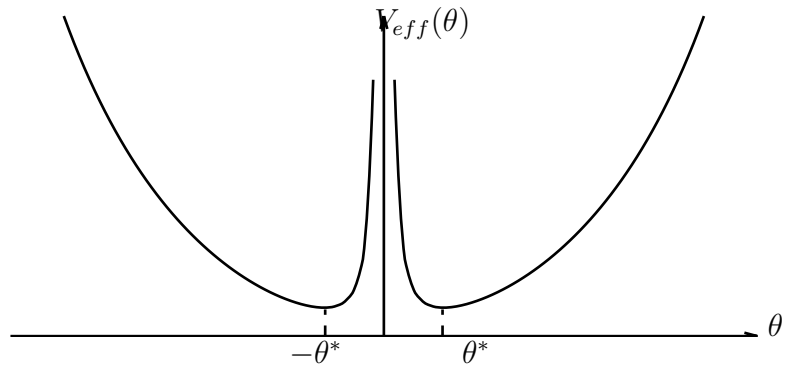


Figura 28: Grafico di $V_{eff}(\theta)$ per $p_\varphi - p_\psi$ piccolo ma non nullo.