

2 Sistemi vincolati

2.1 Equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema di N particelle soggetto ad un sistema di vincoli bilateri ideali indipendenti dal tempo.

Se $x(t) = (x_1(t), \dots, x_{3N}(t))$ individua la configurazione del sistema al tempo t , si ha:

$$m_i \ddot{x}_i(t) = F_i(x(t), \dot{x}(t)) + R_i(x(t), \dot{x}(t)) \quad (2.1)$$

dove F descrive le forze attive e R le reazioni vincolari. Supponiamo che il sistema di vincoli costringa il moto su di una superficie regolare $\Sigma \subset \mathbb{R}^{3N}$. Allora, fissato un qualunque istante t , esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^{3N}$ ed un intervallo aperto I contenente t , tali che $x(s) \in \Sigma \cap U$, $\forall s \in I$, ed un diffeomorfismo $\tilde{\Phi} : \Omega \rightarrow U$, tale che, indicando con α i punti di Ω ,

$$\tilde{\Phi}^{-1}(\Sigma \cap U) = \{\alpha \in \Omega : \alpha_1 = \dots = \alpha_{3N-l} = 0\}$$

se l è la dimensione della superficie.

Sia $V = \tilde{\Phi}^{-1}(\Sigma \cap U)$ e sia Φ la restrizione di $\tilde{\Phi}$ a V ; Φ è ovviamente un diffeomorfismo di $V \subset \mathbb{R}^l$ in $\Sigma \cap U$. Indichiamo con $q = (q_1, \dots, q_l)$ un punto di V ; le componenti di q si chiamano *coordinate lagrangiane*.

Sia ora \mathcal{M}_t l'insieme delle funzioni $\bar{q}(s)$, $s \in (t-1, t+1)$, tali che

$$\begin{aligned} i) \quad & \bar{q}(s) \in V \quad \forall s \\ ii) \quad & \Phi(\bar{q}(t)) = x(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

e poniamo inoltre, $\forall \bar{q}(s) \in \mathcal{M}_t$, $\xi(s) = \Phi(\bar{q}(s))$. $\xi(s)$ rappresenta un moto passante per $x(t)$ e compatibile con i vincoli. La definizione di vincolo ideale implica allora che:

$$\sum_{i=1}^{3N} R_i(x(t), \dot{x}(t)) \dot{\xi}_i(t) = 0 \quad \forall \bar{q}(s) \in \mathcal{M}_t \quad (2.3)$$

Dalle (2.1) e (2.3) si deduce che, $\forall \bar{q}(s) \in \mathcal{M}_t$:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i(t) \dot{\xi}_i(t) = \sum_{i=1}^{3N} F_i(x(t), \dot{x}(t)) \dot{\xi}_i(t) \quad (2.4)$$

Usando la definizione di $\xi(s)$, la (2.4) diventa:

$$\sum_{j=1}^l \left\{ \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(\bar{q}(t)) - \sum_{i=1}^{3N} F_i(x(t), \dot{x}(t)) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(\bar{q}(t)) \right\} \dot{q}_j(t) = 0 \quad (2.5)$$

È facile rendersi conto che l'arbitrarietà di $\bar{q}(s)$ in \mathcal{M}_t implica l'arbitrarietà del vettore $\dot{\bar{q}}(t)$ in \mathbb{R}^l . D'altra parte, per la (2.2), $\bar{q}(t)$ è costante al variare in \mathcal{M}_t della funzione $\bar{q}(s)$. La (2.5) è pertanto equivalente all'equazione:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(\bar{q}(t)) = \tilde{Q}_j(t) \quad j = 1, \dots, l \quad (2.6)$$

avendo definito

$$\tilde{Q}_j(t) = \sum_{i=1}^{3N} F_i(x(t), \dot{x}(t)) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(\bar{q}(t)) \quad (2.7)$$

$\tilde{Q}(t)$ è detta *forza lagrangiana*.

Indichiamo ora con $q(s) = \Phi^{-1}(x(s))$ la legge oraria del moto del sistema di particelle nelle coordinate lagrangiane. Questa funzione è ben definita finché $x(s) \in U$, il che avverrà certamente per un opportuno intervallo di tempo I tale che $t \in I$. Poichè il ragionamento precedente può ripetersi per ogni $s \in I$, la (2.6) implica che

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i(s) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q(s)) = \tilde{Q}_j(s) \quad , \quad s \in I \quad (2.8)$$

Cerchiamo ora di riscrivere la (2.8) come un sistema di equazioni differenziali nelle coordinate lagrangiane. Definiamo pertanto

$$T(\alpha, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[\sum_{j=1}^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q) \alpha_j \right]^2 \quad (2.9)$$

ed osserviamo che $T(\dot{q}(t), q(t))$ rappresenta l'energia cinetica, poichè

$$\dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt} \Phi_i(q(t)) = \sum_{j=1}^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q(t)) \dot{q}_j(t)$$

Notiamo ora che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha_k}(\dot{q}(t), q(t)) &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[\sum_{j=1}^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q(t)) \dot{q}_j(t) \right] \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}(q(t)) \right\} = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}(q(t)) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}(q(t)) + \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i(t) \sum_{j=1}^l \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_k \partial q_j}(q(t)) \dot{q}_j(t) \\ \frac{\partial T}{\partial q_k}(\dot{q}(t), q(t)) &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[\sum_{j=1}^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q(t)) \dot{q}_j(t) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^l \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_j \partial q_k}(q(t)) \dot{q}_j(t) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i(t) \sum_{j=1}^l \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_k \partial q_j}(q(t)) \dot{q}_j(t) \end{aligned}$$

Pertanto la (2.8) può risciversi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha_j}(\dot{q}(t), q(t)) - \frac{\partial T}{\partial q_j}(\dot{q}(t), q(t)) = Q_j(\dot{q}(t), q(t)) \quad (2.10)$$

avendo definito $Q(\alpha, q)$ così che $Q(\dot{q}(t), q(t)) = \tilde{Q}(t)$. Le (2.10) sono chiamate *equazioni di Lagrange*.

In realtà la validità della (2.10) si estende al caso di vincoli dipendenti dal tempo. In tal caso i moti compatibili con i vincoli si esprimono in termini delle variabili lagrangiane tramite funzioni che dipendono esplicitamente dal tempo:

$$x(s) = \Phi(q(s), s)$$

Ora, tuttavia, nella definizione di vincolo ideale non compaiono più moti di questo tipo, ma i cosiddetti *moti virtuali*. Fissato un istante t , un moto virtuale passante per $x(t)$ è una funzione $\xi(s)$, definita in un intorno di t , della forma

$$\xi(s) = \Phi(\bar{q}(s), t)$$

tale che $\xi(t) = x(t)$. Si tratta in sostanza di moti compatibili con i vincoli presenti all'istante t e supposti indipendenti dal tempo.

È immediato verificare che la (2.5), e quindi la (2.8), sono ancora valide. Ciò che cambia è invece la (2.9), che deve essere sostituita dalla

$$T(\alpha, q, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[\sum_{j=1}^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q, t) \alpha_j + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(q, t) \right]^2 \quad (2.11)$$

in modo da tenere conto della dipendenza esplicita dal tempo di $\Phi(q, t)$, cioè del contributo alla velocità del moto dei vincoli (quello che viene eliminato nella definizione di moto virtuale). La (2.10) rimane tuttavia inalterata, come è facile verificare.

Supponiamo ora che le forze attive siano conservative, cioè che esista una funzione $\tilde{\mathcal{V}}(x)$ tale che

$$F_i = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{V}}}{\partial x_i}(x(t))$$

La (2.7) diventa allora:

$$Q_j(t) = - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j}(q(t))$$

avendo definito

$$\mathcal{V}(q) = \tilde{\mathcal{V}}(\Phi(q)) \quad q \in V$$

In tal caso le (2.10) assumono la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_j}(\dot{q}(t), q(t)) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}(\dot{q}(t), q(t)) = 0$$

dove

$$\mathcal{L}(\alpha, q) = T(\alpha, q) - \mathcal{V}(q)$$

e vale inoltre la *conservazione dell'energia*:

$$T(\dot{q}(t), q(t)) + \mathcal{V}(q(t)) = \text{costante} \quad (2.12)$$

2.2 Posizioni di equilibrio

Una immediata conseguenza delle (2.10) è la seguente proposizione (*Principio dei lavori virtuali*).

Proposizione 2.1 *Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema si trovi in equilibrio nella posizione di coordinate lagrangiane q_0 è che*

$$Q_j(0, q_0) = 0 \quad (2.13)$$

Dim. - Riscriviamo la (2.9) nella forma:

$$T(\alpha, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l g_{ij}(q) \alpha_i \alpha_j$$

Dall'osservazione che l'energia cinetica è positiva, eccetto che nel caso in cui tutte le particelle hanno velocità nulla, segue subito che, $\forall q \in V$, $T(\alpha, q)$ è una forma quadratica definita positiva nelle variabili α . Pertanto la matrice $g_{ij}(q)$ è una matrice simmetrica e invertibile, $\forall q \in V$. Notiamo ora che:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_j}(\dot{q}(t), q(t)) = \sum_{i=1}^l g_{ji}(q(t)) \dot{q}_i(t) \quad (2.14)$$

Combinando la (2.10) con la (2.14), la (2.10) può essere riscritta nella forma:

$$\sum_{i=1}^l g_{ji}(q(t)) \ddot{q}_i(t) = G_j(\dot{q}(t), q(t)) \quad (2.15)$$

con

$$G_j(\alpha, q) = - \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l \frac{\partial g_{ji}}{\partial q_k} \alpha_k \alpha_i + \frac{\partial T}{\partial q_j}(\alpha, q) + Q_j(\alpha, q)$$

Poichè $g_{ij}(q)$ è invertibile, la (2.15) può risciversi come un'equazione differenziale ordinaria in forma normale (cioè risolta rispetto alle derivate di ordine massimo):

$$\ddot{q}_i(t) = \sum_{j=1}^l g_{ij}^{-1}(q(t)) G_j(\dot{q}(t), q(t)) \quad (2.16)$$

Alla (2.16) si può applicare il Teorema di unicità della soluzione con dato iniziale fissato. Ciò significa in particolare che c'è una ed una sola soluzione

tale che $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = 0$. È d'altra parte immediato verificare che, se è valida la (2.13), $q(t) = q_0$ è una soluzione della (2.10). Pertanto q_0 è una soluzione d'equilibrio. ■

È in generale importante sapere se una posizione di equilibrio è stabile o meno. L'idea intuitiva di stabilità è resa precisa in modo naturale dalla seguente definizione.

Definizione 2.1 *Una posizione di equilibrio q_0 si dice stabile se esiste $\varepsilon_0 > 0$ e due funzioni $\delta(\varepsilon)$ e $\rho(\varepsilon)$, definite per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e infinitesime per $\varepsilon \rightarrow 0$, tali che, se $T(\dot{q}(0), q(0)) \leq \varepsilon$ e $|q(0) - q_0| \leq \delta(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, allora*

$$|q(t) - q_0| \leq \rho(\varepsilon) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Passiamo ora a discutere una condizione di stabilità delle posizioni di equilibrio, valida nel caso in cui le forze attive siano conservative.

Proposizione 2.2 *(Teorema di Dirichlet) Se q_0 è un punto di minimo isolato del potenziale $\mathcal{V}(q)$, allora q_0 è una posizione di equilibrio stabile.*

Dim. - Poiché, al solito, $\mathcal{V}(q)$ è supposta di classe C^∞ e q_0 è un punto di minimo isolato, esiste un intorno chiuso U di q_0 , tale che

$$\mathcal{V}(q) > \mathcal{V}(q_0), \quad \forall q \in U, q \neq q_0 \quad (2.17)$$

Inoltre, se poniamo $\varepsilon_0 = \max_{q \in U} [\mathcal{V}(q) - \mathcal{V}(q_0)]$ e, dato $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $K_\varepsilon = \{q \in U : \mathcal{V}(q) - \mathcal{V}(q_0) \leq \varepsilon\}$, è facile dimostrare che

$$\rho(\varepsilon) = \max_{q \in K_\varepsilon} |q - q_0| \rightarrow 0 \quad , \quad \text{if } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.18)$$

Ciò segue dal fatto che, se questa proprietà non fosse vera, si potrebbe trovare una successione $q_n \in U$, tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathcal{V}(q_n) - \mathcal{V}(q_0)] \rightarrow 0$ e $|q_n - q_0| \geq \delta > 0$, per qualche δ , in contraddizione col fatto che il minimo di $\mathcal{V}(q) - \mathcal{V}(q_0)$ è strettamente positivo sull'insieme $\{q \in U : |q - q_0| \geq \delta\}$.

La continuità di $\mathcal{V}(q)$ implica poi che, dato ε , esiste $\delta(\varepsilon) \leq \rho(\varepsilon)$, tale che, se $|q - q_0| \leq \delta(\varepsilon)$, allora $\mathcal{V}(q) - \mathcal{V}(q_0) \leq \varepsilon$. Supponiamo allora che $T(\dot{q}(0), q(0)) \leq \varepsilon/2$ e $|q(0) - q_0| \leq \delta(\varepsilon/2)$, così che $T(\dot{q}(0), q(0)) + \mathcal{V}(q(0)) - \mathcal{V}(q_0) \leq \varepsilon$; la conservazione dell'energia e la positività di T implicano che $\mathcal{V}(q(t)) - \mathcal{V}(q_0) \leq \varepsilon$ e quindi che $|q(t) - q_0| \leq \rho(\varepsilon)$. ■

2.3 Linearizzazione

Consideriamo l'equazione differenziale normale del primo ordine

$$\dot{x} = F(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (2.19)$$

e supponiamo che \bar{x}_0 sia un punto di equilibrio, cioè che

$$F(\bar{x}_0) = 0$$

Possiamo allora scrivere (supponiamo $\bar{x}_0 = 0$ per comodità):

$$F(x) = Ax + R(x) \quad (2.20)$$

dove A è una matrice opportuna ($A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0)$) e

$$\sup_{|x| \leq \rho} |R(x)| \leq M_\rho |x|^2 \quad (2.21)$$

con M_ρ una funzione positiva di ρ , che possiamo supporre non decrescente.

Sia $x(t)$ la soluzione della (2.19) che soddisfa la condizione iniziale:

$$x(0) = x_0$$

Vogliamo confrontare $x(t)$ con la soluzione $y(t)$ dell'equazione *linearizzata*:

$$\dot{y} = Ay \quad (2.22)$$

che soddisfa la stessa condizione iniziale:

$$y(0) = x_0$$

Studieremo questo problema, facendo ricorso essenziale alla seguente proposizione, nota come *Lemma di Gronwall*.

Proposizione 2.3 *Se $\Phi(t)$, $t \in [0, T]$, è una funzione continua, tale che*

$$\Phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t ds \Phi(s) \quad , \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.23)$$

con α e β costanti reali, $\beta \geq 0$, allora

$$\Phi(t) \leq \alpha e^{\beta t} \quad , \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.24)$$

Dim. - Poniamo:

$$J(t) = \beta \int_0^t ds \Phi(s) \quad (2.25)$$

Usando la (2.23) e la positività di β , si ottiene:

$$\dot{J}(t) = \beta \Phi(t) \leq \alpha \beta + \beta J(t) \quad (2.26)$$

da cui segue:

$$e^{-\beta s} [\dot{J}(s) - \beta J(s)] \leq \alpha \beta e^{-\beta s} \quad (2.27)$$

La (2.27) può risciversi:

$$\frac{d}{ds}[e^{-\beta s} J(s)] \leq \alpha \beta e^{-\beta s} \quad (2.28)$$

Questa diseuguaglianza, integrata fra 0 e t , dà, usando il fatto che $J(0) = 0$:

$$e^{-\beta t} J(t) \leq \alpha \beta \int_0^t e^{-\beta s} ds = \alpha(1 - e^{-\beta t}) \quad (2.29)$$

cioè

$$J(t) \leq \alpha e^{\beta t} - \alpha \quad (2.30)$$

da cui segue la (2.24), usando la (2.23) e la (2.25). ■

Siamo ora in grado di dimostrare la proposizione seguente.

Proposizione 2.4 *Dati $T > 0$ e $0 \leq \eta < 1$, esiste $\delta(\eta, T) > 0$, tale che, se $|x_0| < \delta$, allora $x(t)$ e $y(t)$ sono definite per $t \in [0, T]$ e*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)| \leq \delta^{1+\eta} \quad (2.31)$$

Dim. - La soluzione della (2.19) può scriversi nella forma:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t ds [Ax(s) + R(x(s))] \quad (2.32)$$

Supponiamo ora che $|x_0| \leq 1/2$ e definiamo:

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 : |x(t)| \geq 1\} \quad (2.33)$$

T_1 rappresenta il tempo necessario perchè la traiettoria raggiunga il bordo della sfera unitaria centrata nel punto di equilibrio (se questo non avviene, $T_1 = +\infty$). Vogliamo far vedere che, se $|x_0|$ è abbastanza piccolo, $T_1 \geq T$; ciò assicura, fra l'altro, che una soluzione con dato iniziale vicino al punto di equilibrio ha un intervallo di definizione comprendente $[0, T]$. La (2.32) e la (2.21) implicano che, se $t \in [0, T_1]$:

$$|x(t)| \leq |x_0| + c \int_0^t ds |x(s)| + M_1 \int_0^t ds |x(s)|^2 \quad (2.34)$$

dove c è una costante opportuna dipendente dalla matrice A e si è usato il fatto che $|x(s)| \leq 1$ per $s \in [0, T_1]$. Questa osservazione implica anche che $|x(s)|^2 \leq |x(s)|$, per $s \in [0, T_1]$. Pertanto:

$$|x(t)| \leq |x_0| + (c + M_1) \int_0^t ds |x(s)| \quad (2.35)$$

Usando il Lemma di Gronwall, si ha:

$$|x(t)| \leq |x_0|e^{(c+M_1)t} \quad , \quad 0 \leq t \leq T_1 \quad (2.36)$$

La (2.36) e la definizione di T_1 implicano subito che $T_1 \geq T$, purchè:

$$|x_0|e^{(c+M_1)T} < 1 \quad (2.37)$$

Consideriamo ora la soluzione della (2.22). Si ha:

$$y(t) = x_0 + \int_0^t ds Ay(s) \quad (2.38)$$

Pertanto

$$|y(t)| \leq |x_0| + c \int_0^t ds |y(s)|$$

e dal Lemma di Gronwall segue che $|y(t)| \leq |x_0|e^{ct}$ e quindi anche che $y(t)$ è definita per ogni valore di t .

La (2.32), la (2.38) e la (2.37) implicano che, se $t \in [0, T]$:

$$|x(t) - y(t)| \leq c \int_0^t ds |x(s) - y(s)| + M_1 T \sup_{0 \leq s \leq T} |x(s)|^2 \quad (2.39)$$

Per il Lemma di Gronwall e la (2.36):

$$|x(t) - y(t)| \leq M_1 T |x_0|^2 e^{2(c+M_1)T+cT} \quad , \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.40)$$

Supponiamo ora che $|x_0| < \delta$. Perchè la (2.31) sia soddisfatta basta che:

$$M_1 T \delta^2 e^{(3c+2M_1)T} \leq \delta^{1+\eta}$$

cioè che

$$\delta \leq \left[\frac{1}{M_1 T} e^{-(3c+2M_1)T} \right]^{\frac{1}{1-\eta}} \equiv \delta_1(\eta, T)$$

La (2.31) è allora dimostrata, pur di definire:

$$\delta(\eta, T) = \min \left\{ \frac{1}{2}, e^{-(c+M_1)T}, \delta_1(\eta, T) \right\} \quad (2.41)$$

■

In generale le proprietà asintotiche delle soluzioni della (2.19) e della sua linearizzazione (2.22) sono diverse. C'è tuttavia un caso notevole in cui ciò non succede, cioè quello in cui gli autovalori della matrice A hanno tutti parte reale negativa.

Supponiamo, per semplicità, che gli autovalori di A , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, siano a due a due distinti ed indichiamo con $\psi^{(i)}$ una scelta qualunque degli autovettori corrispondenti:

$$A\psi^{(i)} = \lambda_i\psi^{(i)} \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

La soluzione della (2.23) può allora scriversi:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} c_i \psi^{(i)} \quad (2.42)$$

le costanti c_i essendo esprimibili in funzione di $y(0)$ tramite una trasformazione lineare.

Supponiamo ora che, $\forall i$:

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\mu \quad , \quad \mu > 0 \quad (2.43)$$

Dalla (2.42) segue allora immediatamente che esiste una costante $\gamma > 0$ tale che

$$|y(t)| \leq \gamma e^{-\mu t} |y(0)| \quad (2.44)$$

Vogliamo dimostrare che la stessa proprietà vale per le soluzioni della (2.19) con condizione iniziale vicina al punto di equilibrio.

Per farlo ci sarà comodo utilizzare una rappresentazione delle soluzioni della (2.22) diversa dalla (2.42).

Data una matrice quadrata B di ordine n , si definisce esponenziale di B la matrice

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n \quad , \quad B^0 \equiv I \quad (2.45)$$

Usando la (2.45) è molto facile dimostrare che

$$y(t) = e^{tA} x_0 \quad (2.46)$$

è la soluzione della (2.23) con dato iniziale $y(0) = x_0$. Infatti è facile provare che la serie a secondo membro della (2.45) è derivabile termine a termine e pertanto

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n x_0 \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} B^n x_0 = B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n x_0$$

Di qui segue, per verifica diretta, che la soluzione della (2.19) con condizione iniziale $x(0) = x_0$ soddisfa l'equazione integrale:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t ds e^{(t-s)A} R(x(s)) \quad (2.47)$$

Definizione 2.2 Un punto di equilibrio \bar{x}_0 si dice stabile se, $\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$, dipendente solo da ε , così che $\sup_{t \geq 0} |x(t) - x_0| < \varepsilon$, se $|x(0) - x_0| < \delta$. Un punto di equilibrio \bar{x}_0 si dice attrattivo se esiste un intorno U di x_0 tale che, se $x(0) \in U$, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$$

. Un punto di equilibrio \bar{x}_0 si dice asintoticamente stabile se è stabile ed attrattivo.

Siamo finalmente in grado di formulare la seguente proposizione, nota come *Teorema di Lyapounov*.

Proposizione 2.5 Se gli autovalori della matrice A della (2.20) hanno tutti parte reale negativa, allora lo 0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per l'equazione (2.19).

Dim. - Sia $|x_0| \leq \varepsilon/2$, con $\varepsilon < 1$, e sia $T = \inf\{t \geq 0 : |x(t)| \geq \varepsilon\}$; T è ovviamente diverso da zero. Dalle (2.21), (2.44) e (2.47) segue che, se $t \in [0, T]$:

$$|x(t)| \leq \gamma e^{-\mu t} |x_0| + M_1 \gamma \int_0^t ds e^{-\mu(t-s)} |x(s)|^2$$

Se poniamo $z(t) = |x(t)|e^{\mu t}$ ed usiamo il fatto che $|x(s)| \leq \varepsilon$, possiamo scrivere

$$z(t) \leq \gamma |x_0| + \varepsilon M_1 \gamma \int_0^t ds z(s)$$

Questa diseuguaglianza implica, per il Lemma di Gronwall e la definizione di $z(t)$, che

$$|x(t)| \leq \gamma |x_0| e^{-(\mu - \varepsilon M_1 \gamma)t} \quad (2.48)$$

Se si sceglie ε così che $\varepsilon M_1 \gamma < \mu/2$, si ha:

$$|x(t)| \leq \gamma |x(0)| e^{-\mu t/2} \quad (2.49)$$

Di qui segue subito che, se $|x(0)|$ è sufficientemente piccolo, $|x(t)| < \varepsilon$ per ogni $t \in [0, T]$; ciò è possibile solo se $T = \infty$. La (2.49) implica allora che $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$. ■

2.4 Equazioni di Lagrange: esempi

Esempio 2.1 Si consideri il sistema (normalmente chiamato *bipendolo*) costituito da due sbarrette rigide OA e AB , di lunghezza rispettivamente l_1 e l_2 ed incernierate in A , vincolato a muoversi in un piano verticale con il punto O fisso (vedi figura). Le due sbarrette, di massa rispettivamente m_1 e m_2 , sono supposte omogenee e le sole forze attive che agiscono sul sistema sono le forze gravitazionali; i vincoli sono supposti ideali.

- a) Scrivere le equazioni di Lagrange.
 b) Studiare le posizioni di equilibrio.
 c) Studiare i modi normali del sistema linearizzato intorno all'unica posizione di equilibrio stabile.

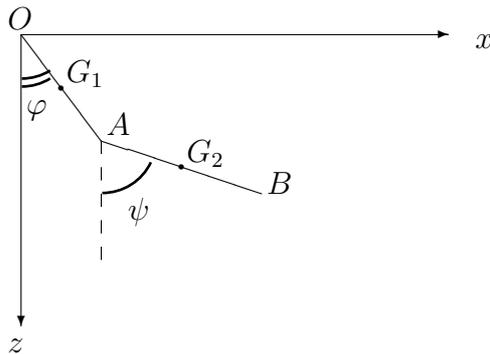


Figura 13: Coordinate lagrangiane per il bipendolo.

Soluzione - Indichiamo con l_1 e l_2 le lunghezze delle due sbarrette, con m_1 e m_2 le rispettive masse. Siano inoltre I_1 il momento di inerzia di OA rispetto a O e I_2 quello di AB rispetto al suo baricentro G_2 .

Scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli φ e ψ . L'energia cinetica della sbarretta OA (dovuta al moto rotatorio intorno ad O) è allora:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2$$

e l'energia cinetica della sbarretta AB è (si usa il Teorema di König):

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{G_2}^2 + \dot{z}_{G_2}^2)$$

con

$$x_{G_2} = l_1 \sin \varphi + \frac{l_2}{2} \sin \psi$$

$$z_{G_2} = l_1 \cos \varphi + \frac{l_2}{2} \cos \psi$$

Pertanto

$$\dot{x}_{G_2} = l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{l_2}{2} \dot{\psi} \cos \psi$$

$$\dot{z}_{G_2} = -l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - \frac{l_2}{2} \dot{\psi} \sin \psi$$

da cui segue:

$$T_2 = \frac{1}{2}(I_2 + m_2 \frac{l_2^2}{4})\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos(\varphi - \psi)$$

Per l'energia cinetica totale del sistema si ha allora l'espressione:

$$T = \frac{1}{2}(I_2 + m_2 \frac{l_2^2}{4})\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(I_1 + m_2 l_1^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos(\varphi - \psi) \quad (2.50)$$

L'energia potenziale è data dall'espressione:

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g z_{G_1} - m_2 g z_{G_2} = \\ &= -g(m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 l_1) \cos \varphi - g m_2 \frac{l_2}{2} \cos \psi \end{aligned} \quad (2.51)$$

a) Equazioni di Lagrange.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= (I_1 + m_2 l_1^2)\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\psi} \cos(\varphi - \psi) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= (I_2 + m_2 \frac{l_2^2}{4})\dot{\psi} + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \psi) \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial T}{\partial \psi} = -\frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin(\varphi - \psi) \end{aligned}$$

Se si inseriscono queste espressioni nelle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \quad , \quad q = \varphi, \psi$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} g_{11}\ddot{\varphi} + g_{12}\ddot{\psi} \cos(\varphi - \psi) + g_{12}\dot{\psi}^2 \sin(\varphi - \psi) &= -k_1 \sin \varphi \\ g_{22}\ddot{\psi} + g_{12}\ddot{\varphi} \cos(\varphi - \psi) - g_{12}\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \psi) &= -k_2 \sin \psi \end{aligned} \quad (2.52)$$

dove

$$\begin{cases} g_{11} = I_1 + m_2 l_1^2 \\ g_{12} = \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \\ g_{22} = I_2 + \frac{1}{4}m_2 l_2^2 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = g(\frac{1}{2}m_1 l_1 + m_2 l_1) \\ k_2 = \frac{1}{2}g m_2 l_2 \end{cases} \quad (2.53)$$

b) Posizioni di equilibrio.

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \sin \varphi = \sin \psi = 0$$

Ci sono pertanto quattro posizioni di equilibrio, corrispondenti ai seguenti valori della coppia (φ, ψ) :

$$(0, 0) \quad , \quad (\pi, 0) \quad , \quad (0, \pi) \quad , \quad (\pi, \pi)$$

Per studiarne la stabilità, calcoliamo la matrice hessiana $H_V(\varphi, \psi)$ di $V(\varphi, \psi)$. Si trova:

$$H_V(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} k_1 \cos \varphi & 0 \\ 0 & k_2 \cos \psi \end{pmatrix}$$

L'unico punto in cui H_V sia definita positiva è $(0, 0)$, che è pertanto un punto di equilibrio stabile. Tutti gli altri punti di equilibrio sono instabili, in quanto almeno un autovalore di H_V è negativo.

c) Linearizzazione intorno a $(0, 0)$.

La linearizzazione delle equazioni (2.52) si ottiene sostituendo nelle equazioni di Lagrange T e V con i corrispondenti sviluppi di Taylor troncati al secondo ordine nelle variabili $\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$. Se indichiamo con \tilde{T} e \tilde{V} i suddetti sviluppi di Taylor, si trova, trascurando una costante additiva inessenziale in \tilde{V} :

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, G \dot{\mathbf{q}} \rangle \quad , \quad \tilde{V} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, K \mathbf{q} \rangle$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare usuale, \mathbf{q} rappresenta il vettore (φ, ψ) e le due matrici G e K sono definite in termini delle costanti introdotte nella (2.53) nel modo seguente:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Per diagonalizzare la lagrangiana, dobbiamo risolvere il problema agli autovalori:

$$K \mathbf{h} = \lambda G \mathbf{h}$$

Gli autovalori si ottengono risolvendo l'equazione del secondo ordine

$$\det(K - \lambda G) = (k_1 - \lambda g_{11})(k_2 - \lambda g_{22}) - \lambda^2 g_{12}^2 = 0$$

Indichiamo con λ_1 e λ_2 le due soluzioni di questa equazione, che sono certamente reali e strettamente positive, in quanto le due matrici K e G sono definite positive; indichiamo inoltre con \mathbf{h}^1 e \mathbf{h}^2 una scelta qualunque degli autovettori corrispondenti, fatta in modo che essi siano reali. Poichè $\lambda_1 \neq \lambda_2$, come è facile verificare, \mathbf{h}^1 e \mathbf{h}^2 sono una base in \mathbb{R}^2 ; è pertanto possibile associare in modo univoco ad ogni vettore \mathbf{q} un vettore $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$, così che:

$$\mathbf{q} = Q_1 \mathbf{h}^1 + Q_2 \mathbf{h}^2 = S \mathbf{Q} \quad (2.54)$$

dove S è la matrice di elementi $S_{ij} = \mathbf{h}_i^j$.

Q_1 e Q_2 possono essere assunte come nuove variabili lagrangiane e le equazioni del moto corrispondenti si scrivono:

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i \quad , \quad i = 1, 2$$

Le soluzioni sono delle sinusoidi di pulsazione $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, di ampiezza e fase dipendenti nel modo ben noto dalle condizioni iniziali sulle variabili Q_i ; queste ultime si ottengono facilmente da $\mathbf{q}(0)$ e $\dot{\mathbf{q}}(0)$ invertendo le (2.54).

Esempio 2.2 Tre punti materiali A, B, C di massa m sono vincolati a muoversi in un piano verticale Π di origine O in modo che le distanze OA, OB, BC, AC siano fisse e tutte eguali a l . Il piano Π può solo ruotare intorno all'asse z ed il punto C è vincolato all'asse z . Tutti i vincoli sono da supporre ideali.

- Scrivere la lagrangiana del sistema, usando come variabili lagrangiane l'angolo θ che il segmento OA forma con l'asse z e l'angolo ψ che il piano Π forma con l'asse x .
- Scrivere l'integrale primo corrispondente alla variabile ciclica presente nella lagrangiana, nel seguito chiamato J , e far vedere che esso corrisponde al momento della quantità di moto rispetto all'asse z .
- Usando il risultato del punto b) e la conservazione dell'energia, far vedere che, se $J \neq 0$, la funzione $\theta(t)$ è in generale periodica e, per un particolare valore dell'energia dipendente da J , addirittura costante; scrivere inoltre l'espressione integrale del periodo.

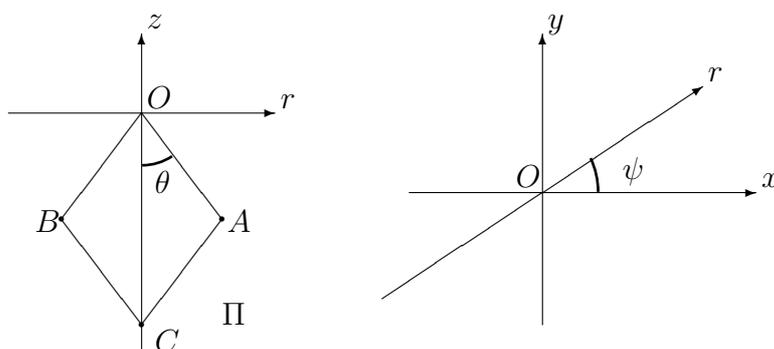


Figura 14: Coordinate lagrangiane del sistema.

Soluzione

a) Se indichiamo con $\vec{r}_P = (x_P, y_P, z_P)$ la posizione del generico punto P , dalla Fig. 14 segue facilmente che

$$x_A = -x_B = r \cos \psi = l \sin \theta \cos \psi$$

$$\begin{aligned}
y_A = -y_B &= r \sin \psi = l \sin \theta \sin \psi \\
z_A = z_B &= -l \cos \theta \\
x_C = y_C &= 0 \\
z_C &= -2l \cos \theta
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Si noti che, per $\theta = \pi/2$, queste condizioni non sono equivalenti ai vincoli enunciati, che potrebbero essere tutti soddisfatti anche se i punti A e B non sono alla stessa altezza; in tale configurazione, infatti, C coincide con O e appartiene alla retta passante per A e B , che potrebbe formare un angolo arbitrario con la retta r . Tuttavia è evidente che nessun moto continuo potrebbe passare per la configurazione corrispondente a $\theta = \pi/2$, violando la condizione $z_A = z_B$. Pertanto non è restrittivo immaginare che i vincoli siano definiti in generale dalle condizioni (2.55).

Prima di proseguire, è utile osservare che le configurazioni delle particelle A , B e C che soddisfano le condizioni (2.55) non sono in corrispondenza biunivoca con nessun aperto nelle variabili θ e ψ , che contenga punti con $\theta = 0$; ciò segue dal fatto che, se tutte e tre le particelle sono sull'asse z , l'angolo ψ non è definito in termini delle sole posizioni dei tre punti. Sembrerebbe quindi che θ e ψ non possano essere assunte come variabili lagrangiane nell'intorno di qualunque configurazione del sistema compatibile con i vincoli. Tuttavia, il sistema che vogliamo qui considerare è uno in cui tutti i punti sono vincolati ad un piano assegnato, libero di ruotare intorno all'asse z ; pertanto l'angolo ψ è definito indipendentemente da θ ed i due angoli sono sicuramente delle buone variabili lagrangiana nell'intorno di qualunque punto del toro bidimensionale. Per risolvere l'apparente paradosso, bisognerebbe aggiungere all'insieme di punti un punto qualunque D del piano Π che non sia sull'asse z ed allargare il sistema di condizioni (4.37), aggiungendo le due condizioni che fissano la posizione di D su Π e, per esempio, la condizione di complanareità di A , B e D . Tuttavia, poiché il punto D è privo di massa, questa modifica non porterebbe alcun cambiamento nei calcoli successivi.

Le (4.37) implicano che

$$\begin{aligned}
\dot{x}_A = -\dot{x}_B &= l\dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - l\dot{\psi} \sin \theta \sin \psi \\
\dot{y}_A = -\dot{y}_B &= l\dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + l\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi \\
\dot{z}_A = \dot{z}_B &= l\dot{\theta} \sin \theta \\
\dot{x}_C = \dot{y}_C &= 0 \\
\dot{z}_C &= 2l\dot{\theta} \sin \theta
\end{aligned} \tag{2.56}$$

L'energia cinetica T del sistema è allora data dall'espressione:

$$T = ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 + ml^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 \tag{2.57}$$

Per l'energia potenziale V si trova:

$$V = mg(z_A + z_B + z_C) = -4mgl \cos \theta \tag{2.58}$$

La lagrangiana \mathcal{L} del sistema è pertanto data dalla:

$$\mathcal{L} = ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + ml^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 + 4mgl \cos \theta \quad (2.59)$$

b) Poichè \mathcal{L} non dipende esplicitamente da ψ , dalla (2.59) segue che

$$J \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = 2ml^2 \sin^2 \theta \dot{\psi} \quad (2.60)$$

è una costante del moto.

Sia M_z il momento della quantità di moto rispetto all'asse z . Poichè $\dot{\vec{r}}_C$ è diretto come l'asse z , usando le (2.56) si trova, se \vec{e}_3 è il versore dell'asse z :

$$\begin{aligned} M_z &= m(\vec{r}_A \wedge \dot{\vec{r}}_A + \vec{r}_B \wedge \dot{\vec{r}}_B) \cdot \vec{e}_3 = 2m(\vec{r}_A \wedge \dot{\vec{r}}_A) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= 2m(x_A \dot{y}_A - y_A \dot{x}_A) = 2ml^2 \sin^2 \theta \dot{\psi} = J \end{aligned}$$

c) Detta E l'energia del sistema, si ha, usando la (2.57) e la (2.58):

$$ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta) = E \quad (2.61)$$

dove

$$V_{eff}(\theta) = \frac{J^2}{4ml^2 \sin^2 \theta} - 4mg \cos \theta \quad (2.62)$$

La funzione $\theta(t)$ soddisfa pertanto un integrale primo dello stesso tipo di quello che si trova nello studio dei moti unidimensionali conservativi; l'unica differenza è che il coefficiente di $\dot{\theta}^2$ non è costante, ma dipende esplicitamente da θ . Si noti tuttavia che

$$0 < 1 \leq 1 + 2 \sin^2 \theta \leq 3$$

per cui questa differenza non ha alcuna rilevanza nell'analisi qualitativa dei moti, che si può pertanto effettuare come nel caso dei moti unidimensionali conservativi. In realtà c'è da verificare un'altra proprietà, che è essenziale in questa analisi; ci riferiamo alla proprietà per cui, se all'istante \bar{t} si ha che

$$\theta(\bar{t}) = \bar{\theta} \quad , \quad V_{eff}(\bar{\theta}) = E \quad , \quad \frac{\partial V_{eff}}{\partial \theta}(\bar{\theta}) \neq 0$$

allora, oltre alla $\dot{\theta}(\bar{t}) = 0$, è verificata anche la $\ddot{\theta}(\bar{t}) \neq 0$. Ciò tuttavia segue subito dall'equazione di Lagrange per $\theta(t)$, che è della forma:

$$ml^2(2 + 4 \sin^2 \theta) \ddot{\theta} + 2ml^2 \sin(2\theta) \dot{\theta}^2 = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial \theta}(\theta)$$

L'analisi qualitativa della funzione $\theta(t)$ si riduce pertanto a studiare il grafico della funzione $V_{eff}(\theta)$.

Se $J \neq 0$, $V_{eff}(\theta) \rightarrow +\infty$ se $\theta \rightarrow 0^+$ oppure $\theta \rightarrow \pi^-$; ciò implica innanzi tutto che, per ogni valore dell'energia, esistono $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 < \pi$, tali che, per ogni t :

$$\theta_1 < \theta(t) < \theta_2$$

Inoltre

$$V'_{eff}(\theta) = -\frac{J^2 \cos \theta}{2ml^2 \sin^3 \theta} + 4mg \sin \theta = 0$$

implica che

$$\tan \theta = \frac{J^2}{8ml^2 g \sin^3 \theta}$$

Se si disegnano i grafici dei due membri di questa equazione nell'intervallo $(0, \pi)$, si vede subito che essi possono intersecarsi solo in un punto, la cui ascissa indicheremo con θ_0 ; inoltre $0 < \theta_0 < \pi/2$. Ne segue immediatamente che il grafico di $V_{eff}(\theta)$ è del tipo di quello disegnato in Fig. 15; pertanto tutti i moti sono periodici rispetto alla variabile θ .

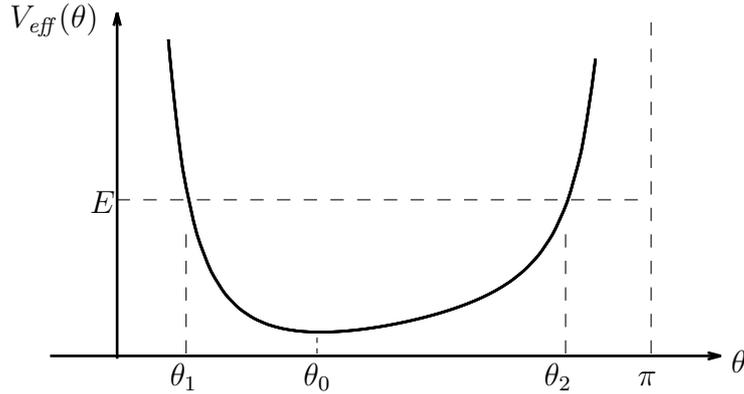


Figura 15: Grafico del potenziale efficace.

Se $E = V_{eff}(\theta_0)$, si ha addirittura:

$$\theta(t) = \theta_0 \quad \forall t$$

Dalla (2.60) si ha allora:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{J}{2ml^2 \sin^2 \theta_0} \quad \forall t$$

per cui il sistema ruota rigidamente (poichè θ è costante) intorno all'asse z con velocità angolare costante.

Se $E > V_{eff}(\theta_0)$, il moto del sistema è invece in generale solo quasiperiodico e consiste in una oscillazione nel piano Π , di periodo

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{\frac{ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta)}{E - V_{eff}(\theta)}} \quad (2.63)$$

accompagnata da una rotazione non uniforme intorno all'asse z di velocità angolare

$$\dot{\psi}(t) = \frac{J}{2ml^2 \sin^2 \theta(t)} \quad (2.64)$$

Il secondo periodo del moto quasiperiodico può essere dedotto dalla (2.64) come nel caso del problema dei due corpi ed è eguale a:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \quad , \quad \omega_2 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} dt \dot{\psi}(t) \quad (2.65)$$

Infatti la soluzione della (2.64) si può scrivere nella forma:

$$\psi(t) = \psi(0) + \omega_2 t + S(t)$$

dove

$$S(t) = \int_0^t ds \left[\frac{J}{2ml^2 \sin^2 \theta(s)} - \omega_2 \right]$$

è una funzione periodica di periodo T_1 , in quanto primitiva di una funzione periodica a media nulla.

Si consideri allora, ad esempio, la variabile x_A ; la sua variazione temporale è espressa dalla funzione

$$x_A(t) = l \sin \theta(t) \cos \psi(t) = F(\omega_1 t, \omega_2 t)$$

con

$$F(\alpha, \beta) = l \sin \left[\theta \left(\frac{\alpha}{\omega_1} \right) \right] \cos \left[\psi(0) + \beta + S \left(\frac{\alpha}{\omega_1} \right) \right]$$

che è evidentemente una funzione delle due variabili indipendenti α e β , periodica di periodo 2π sia in α che in β .

2.5 Esempio di vincolo approssimato ideale

Sia dato un arco di curva regolare \mathcal{C} nel piano xy , di classe C^∞ , passante per l'origine O ; se si sceglie l'ascissa curvilinea s (riferita all'origine) come parametro, la curva è descritta da equazioni parametriche del tipo

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s) \, , \\ y &= \psi(s) \, , \end{aligned} \quad (2.66)$$

con $\varphi(s)$ e $\psi(s)$ funzioni regolari tali che

$$\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2 = 1 \, , \quad (2.67)$$

definite in un intervallo I , che non è restrittivo supporre della forma $I = [-L, L]$.

Sia ora $U_R = I \times [-R, R]$ e consideriamo l'applicazione Φ di U_R nel piano xy definita dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s) - r\psi'(s) , \\ y &= \psi(s) + r\varphi'(s) . \end{aligned} \quad (2.68)$$

Vogliamo far vedere che questa applicazione, la cui immagine $\Phi(U_R)$ contiene la curva \mathcal{C} , è invertibile, se R è abbastanza piccolo.

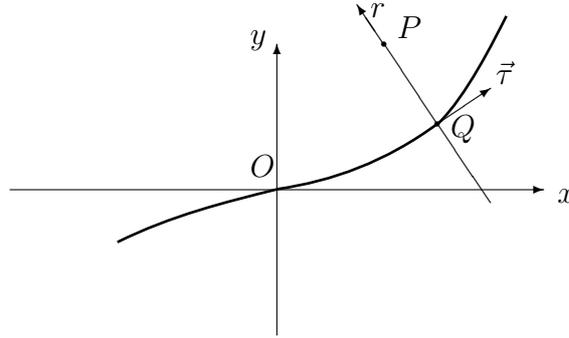


Figura 16: Asse dell'ascissa r .

Indichiamo con $Q(s)$ il punto della curva di ascissa curvilinea s ed osserviamo che, essendo

$$\vec{\tau}(s) = (\varphi'(s), \psi'(s)) ,$$

il versore della tangente alla curva nel punto $Q(s)$, il vettore

$$\vec{n}(s) = (-\psi'(s), \varphi'(s))$$

è il versore della normale in $Q(s)$ orientata verso il semipiano superiore. Dati s ed r , le (2.68) sono allora le coordinate di un punto P della normale, di ascissa r (vedi figura).

Perchè le (2.68) siano invertibili in U_R con inversa regolare, è sufficiente che il loro Jacobiano $J(r, s)$ sia diverso da zero in tutto U_R ; si ha:

$$\begin{aligned} J(r, s) &= (\varphi' - r\psi'')\varphi' + \psi'(\psi' + r\varphi'') = 1 + r(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi') \\ &\geq 1 - RM_1 , \end{aligned} \quad (2.69)$$

dove M_1 è una stima delle derivate prime e seconde di φ e ψ in $[-L, L]$. Basta allora scegliere

$$R < \frac{1}{M_1} ,$$

perchè sia $J(r, s) > 0$ in U_R .

Possiamo pertanto utilizzare s e r come coordinate lagrangiane per descrivere i moti che si svolgono in $\Phi(U_R)$ di una particella puntiforme di massa m . Dalle (2.68) segue che, per un moto generico,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\varphi' - r\psi'')\dot{s} - \psi'\dot{r} , \\ \dot{y} &= (\psi' + r\varphi'')\dot{s} + \varphi'\dot{r} .\end{aligned}\tag{2.70}$$

Pertanto l'energia cinetica, espressa in funzione di s, r, \dot{s}, \dot{r} , assume la forma:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2[1 + ra(r, s)] + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 ,\tag{2.71}$$

avendo utilizzato il fatto che, per la (2.67),

$$\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\varphi'^2 + \psi'^2) = 0$$

ed avendo definito:

$$a(r, s) = 2\varphi''(s)\psi'(s) - 2\varphi'(s)\psi''(s) + r[\psi''(s)^2 + \varphi''(s)^2] .\tag{2.72}$$

Ovviamente esiste $M_2 > 0$ tale che, se $(s, r) \in U_R$,

$$|a(r, s)| \leq M_2 .\tag{2.73}$$

Supponiamo che la particella sia vincolata a muoversi lungo la curva \mathcal{C} in assenza di attrito, sotto l'azione di una forza attiva conservativa di potenziale $\mathcal{V}_0(r, s)$, regolare in U_R . Il suo moto è allora descritto dalla funzione $s_0(t)$ che soddisfa l'equazione di Lagrange associata alla lagrangiana

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \mathcal{V}_0(0, s)$$

Si ha pertanto:

$$m\ddot{s}_0 = -\frac{\partial\mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s) .\tag{2.74}$$

Supponiamo ora che non sia presente alcun vincolo, ma che la particella sia soggetta ad una forza conservativa di potenziale

$$\mathcal{V}_\lambda(r, s) = \mathcal{V}_0(r, s) + \lambda W(r) ,\tag{2.75}$$

dove $W(r)$ è una funzione non negativa, che ha in $r = 0$ un minimo in senso stretto, con

$$W(0) = 0 .$$

Il moto è allora descritto dalle funzioni $r_\lambda(t)$ e $s_\lambda(t)$ che soddisfano le equazioni di Lagrange associate alla lagrangiana

$$\mathcal{L}(r, s, \dot{r}, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2[1 + ra(r, s)] + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \mathcal{V}_0(r, s) - \lambda W(r) .\tag{2.76}$$

Ci proponiamo di dimostrare che la terna $(\mathcal{C}, W, \lambda)$ è un *modello di vincolo approssimato ideale*, secondo la definizione introdotta nel cap. 3 del testo di Gallavotti. Ciò segue dalla proposizione seguente:

Proposizione 2.6 Siano $r_\lambda(t)$ e $s_\lambda(t)$, $t \in [0, T_\lambda]$, le soluzioni delle equazioni di Lagrange associate alla lagrangiana (2.76), con condizioni iniziali:

$$r_\lambda(0) = 0 \quad , \quad \dot{r}_\lambda(0) = \eta \quad , \quad s_\lambda(0) = \bar{s} \quad , \quad \dot{s}_\lambda(0) = \alpha . \quad (2.77)$$

Le condizioni iniziali e T_λ si suppongono scelti in modo che $(r_\lambda(t), s_\lambda(t)) \in U_R$. Esiste allora $\bar{\lambda} > 0$, tale che, se $\lambda \geq \bar{\lambda}$:

- a) È possibile scegliere T_λ così che $T_\lambda = T > 0$;
- b) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} r_\lambda(t) = 0$;
- c) se $s_0(t)$ è la soluzione della (2.74) con condizioni iniziali

$$s_0(0) = \bar{s} \quad , \quad \dot{s}_0(0) = \alpha ,$$

allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (|s_\lambda(t) - s_0(t)| + |\dot{s}_\lambda(t) - \dot{s}_0(t)|) = 0 .$$

Dim. - Per la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \dot{s}^2 [1 + ra(r, s)] + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{V}_0(r, s) + \lambda W(r) = \\ &= \frac{1}{2} m (\alpha^2 + \eta^2) + \mathcal{V}_0(0, \bar{s}) . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Pertanto

$$\lambda W(r) \leq E + M_3 \quad , \quad M_3 \equiv - \min_{U_R} \mathcal{V}_0(r, s) .$$

Poichè E è indipendente da λ (grazie al fatto che $r_\lambda(0) = 0$) e la funzione regolare $W(r)$ ha in $r = 0$ un minimo in senso stretto, esistono $\bar{\lambda} > 0$ ed una funzione positiva $\delta(\lambda)$, infinitesima per $\lambda \rightarrow \infty$, tali che

$$|r_\lambda(t)| \leq \delta(\lambda) \leq R \quad , \quad \lambda \geq \bar{\lambda} . \quad (2.79)$$

Ciò prova il punto b).

Dalla (2.78) segue pure che

$$\frac{1}{2} m \dot{s}_\lambda^2 [1 + r_\lambda a(r_\lambda, s_\lambda)] \leq E + M_3 . \quad (2.80)$$

D'altra parte, usando la positività dell'energia cinetica, si può mostrare che, se $(r, s) \in U_R$,

$$1 + ra(r, s) \geq M_4 > 0 . \quad (2.81)$$

Infatti, per la (2.70) e la (2.71),

$$1 + ra(r, s) = (\varphi' - r\psi'')^2 + (\psi' + r\varphi'')^2 \geq 0$$

ed il segno = può valere solo se $\varphi' = r\psi''$ e $\psi' = -r\varphi''$, cioè se

$$r^2(\varphi''^2 + \psi''^2) = \varphi'^2 + \psi'^2 = 1 .$$

In tal caso tuttavia, usando la (2.69) e la (2.72), si ha:

$$1 + ra(r, s) = 1 + 2[J(r, s) - 1] + r^2(\varphi''^2 + \psi''^2) = 2J(r, s) > 0 ,$$

in contrasto con l'ipotesi che $1 + ra(r, s) = 0$.

Dalle (2.80) e (2.81) segue che

$$|\dot{s}_\lambda(t)| \leq \sqrt{\frac{2(E + M_3)}{mM_4}} \equiv M_5$$

e quindi che

$$|s_\lambda(t) - \bar{s}| = \left| \int_0^t d\tau \dot{s}_\lambda(\tau) \right| \leq |t|M_5 \leq L - |\bar{s}| , \quad (2.82)$$

cioè che $s_\lambda(t) \in I$, purchè sia

$$|t| \leq T = \frac{L - |\bar{s}|}{M_5} .$$

La (2.79) e la (2.82) provano il punto a).

Consideriamo ora l'equazione di Lagrange per la funzione $s_\lambda(t)$. Usando la (2.76), si ha:

$$\frac{d}{dt}[m\dot{s}_\lambda(1 + r_\lambda a)] = \frac{1}{2}m\dot{s}_\lambda^2 r_\lambda \frac{\partial a}{\partial s} - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s} . \quad (2.83)$$

Integrando ambedue i membri della (2.83) fra 0 e t , si trova, dopo qualche passaggio,

$$\dot{s}_\lambda(t) - \dot{s}_\lambda(0) = A(t) - \frac{1}{m} \int_0^t d\tau \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_\lambda(\tau)) , \quad (2.84)$$

avendo definito:

$$\begin{aligned} A(t) = & -\dot{s}_\lambda(t)r_\lambda(t)a(r_\lambda(t), s_\lambda(t)) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \dot{s}_\lambda^2(\tau)r_\lambda(\tau) \frac{\partial a}{\partial s}(r_\lambda(\tau), s_\lambda(\tau)) - \\ & - \frac{1}{m} \int_0^t d\tau \left[\frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(r_\lambda(\tau), s_\lambda(\tau)) - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_\lambda(\tau)) \right] . \end{aligned} \quad (2.85)$$

D'altra parte, per la regolarità di \mathcal{V}_0 , esiste una costante $M_6 > 0$ tale che, se $(r, s) \in U_R$,

$$\left| \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(r, s) - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s) \right| \leq M_6 r .$$

Mettendo insieme le varie stime precedenti è molto facile verificare che esiste una costante $M_7 > 0$ tale che, se $|t| \leq T$,

$$|A(t)| \leq M_7 \delta(\lambda) . \quad (2.86)$$

Notiamo ora che la funzione $s_0(t)$ soddisfa, per la (2.74), l'equazione

$$\dot{s}_0(t) - \dot{s}_0(0) = -\frac{1}{m} \int_0^t d\tau \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_0(\tau)) . \quad (2.87)$$

Sottraendo la (2.87) dalla (2.84), si trova, usando il fatto che $\dot{s}_\lambda(0) = \dot{s}_0(0)$,

$$\dot{s}_\lambda(t) - \dot{s}_0(t) = A(t) - \frac{1}{m} \int_0^t d\tau \left[\frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_\lambda(\tau)) - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_0(\tau)) \right] . \quad (2.88)$$

D'altra parte, per la regolarità del potenziale, esiste $M_8 > 0$ tale che, se $s_1, s_2 \in I$,

$$\frac{1}{m} \left| \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_1) - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_2) \right| \leq M_8 |s_1 - s_2| .$$

Questa diseuguaglianza, insieme alla (2.86) e alla (2.88), implicano che

$$|\dot{s}_\lambda(t) - \dot{s}_0(t)| \leq M_7 \delta(\lambda) + M_8 \int_0^t d\tau |s_\lambda(\tau) - s_0(\tau)| . \quad (2.89)$$

Inoltre

$$|s_\lambda(t) - s_0(t)| = \left| \int_0^t d\tau [\dot{s}_\lambda(\tau) - \dot{s}_0(\tau)] \right| \leq \int_0^t |\dot{s}_\lambda(\tau) - \dot{s}_0(\tau)| , \quad (2.90)$$

per cui, posto

$$z(t) = |s_\lambda(t) - s_0(t)| + |\dot{s}_\lambda(t) - \dot{s}_0(t)| ,$$

si ha, usando la (2.89) e la (2.90),

$$z(t) \leq M_7 \delta(\lambda) + (M_8 + 1) \int_0^t d\tau z(\tau) .$$

Il lemma di Gronwall (vedi Prop. 2.3) implica allora che

$$z(t) \leq M_7 \delta(\lambda) e^{(M_8+1)T} ,$$

da cui segue immediatamente il punto c). ■

2.6 Teorema di Noether

Se $Q = F(q)$ è un diffeomorfismo regolare fra aperti di \mathbb{R}^l e $Q(t)$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange di Lagrangiana $\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t)$, allora $q(t) = F^{-1}(Q(t))$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange con Lagrangiana

$$\tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(F(q), DF(q)\dot{q}, t) \quad (2.91)$$

Questa affermazione può essere verificata facilmente con un calcolo diretto e non dipende dal fatto che le equazioni di Lagrange siano associate ad un

sistema meccanico. Essa si enuncia talora dicendo che le equazioni di Lagrange sono invarianti nella forma rispetto a una trasformazione arbitraria delle variabili lagrangiane.

In presenza di particolari simmetrie può succedere che la Lagrangiana sia addirittura invariante rispetto a particolari cambiamenti di variabili. Vogliamo far vedere che, in tal caso, è possibile individuare degli integrali primi per le equazioni di Lagrange.

Definizione 2.3 *Si consideri un gruppo a un parametro di trasformazioni fra aperti di \mathbb{R}^l , cioè una famiglia di diffeomorfismi indicizzata da un parametro $s \in \mathbb{R}$, $Q = F(q, s)$, tale che*

$$i) F(q, 0) = q$$

$$ii) F^{-1}(Q, s) = F(Q, -s)$$

$$iii) F(F(q, s_1), s_2) = F(q, s_1 + s_2)$$

La Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ si dice invariante rispetto al gruppo di trasformazioni $Q = F(q, s)$, se, detta $DF(q, s)$ la matrice Jacobiana di $F(q, s)$, si ha

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(F(q, s), DF(q, s)\dot{q}) \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.92)$$

Una prima conseguenza di questa definizione è che, se $\bar{q}(t)$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange con Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, invariante rispetto al gruppo di trasformazioni $F(q, s)$, allora esiste una famiglia ad un parametro di soluzioni, data da $q(t, s) = F(\bar{q}(t), s)$. Ciò segue subito dalla (2.92) e dall'osservazione che $q(t, s)$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange con Lagrangiana $\mathcal{L}(F(q, -s), DF(q, -s)\dot{q})$, per quanto detto all'inizio del paragrafo.

Ancora più interessante è tuttavia il fatto che, associato con ogni gruppo ad un parametro di trasformazioni che lasciano invariante la Lagrangiana, esiste un integrale primo, come descritto nel teorema seguente, detto *Teorema di Noether*.

Teorema 2.1 *Se $F(q, s)$ è un gruppo ad un parametro di trasformazioni che lasciano invariante la Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, allora la funzione*

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) \frac{\partial F_i(q, s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \quad (2.93)$$

è una costante del moto.

Dim. - Sia $q(t)$ una soluzione delle equazioni di Lagrange. La (2.92) implica che

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L} \left(F(q(t), s), \frac{\partial F(q(t), s)}{\partial t} \right) \Big|_{s=0} = 0 \quad (2.94)$$

per cui

$$\sum_{i=1}^l \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{\partial F_i(q(t), s)}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{d}{dt} \frac{\partial F_i(q(t), s)}{\partial s} \right] \Big|_{s=0} \quad (2.95)$$

Se si usano le equazioni di Lagrange e la definizione (2.93), è allora immediato verificare che

$$\frac{d}{dt} I(q(t), \dot{q}(t)) = 0 \quad (2.96)$$

■