

# Note del corso di Meccanica Analitica

Giuseppe Benfatto  
Università di Roma "Tor Vergata"

a. a. 2007-08

# Indice

<b>1</b>	<b>Moti unidimensionali</b>	<b>1</b>
1.1	Moti unidimensionali conservativi . . . . .	1
1.2	Isocronismo delle piccole oscillazioni e stime del periodo . . . . .	5
1.3	Moti unidimensionali in presenza di una forza conservativa ed un attrito lineare . . . . .	13
1.4	Un modello matematico di orologio . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Sistemi vincolati</b>	<b>24</b>
2.1	Equazioni di Lagrange . . . . .	24
2.2	Posizioni di equilibrio . . . . .	27
2.3	Linearizzazione . . . . .	28
2.4	Equazioni di Lagrange: esempi . . . . .	33
2.5	Esempio di vincolo approssimato ideale . . . . .	41
2.6	Teorema di Noether . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Cinematica relativa</b>	<b>49</b>
3.1	Cambiamenti di riferimento e trasformazioni ortogonali. . . . .	49
3.2	Relazione fra velocità ed accelerazioni nei due sistemi di rife- rimento. . . . .	56
<b>4</b>	<b>Corpo rigido con un punto fisso</b>	<b>61</b>
4.1	Vincolo di rigidità. . . . .	61
4.2	Cinematica del corpo rigido. . . . .	64
4.3	Moti del corpo rigido libero con un punto fisso. . . . .	67
4.4	La trottola pesante. . . . .	75
<b>5</b>	<b>Meccanica analitica</b>	<b>84</b>
5.1	Equazioni di Hamilton . . . . .	84
5.2	Principio di Hamilton . . . . .	87
5.3	Trasformazioni canoniche . . . . .	88
5.4	Parentesi di Poisson . . . . .	91
5.5	Funzioni generatrici . . . . .	92
5.6	L'equazione di Hamilton-Jacobi. . . . .	98
5.7	Il metodo di separazione delle variabili . . . . .	103
5.8	Le variabili azione-angolo . . . . .	104
5.9	Esempio 1: una particella in $\mathbb{R}^3$ soggetta ad una forza centrale	108
5.10	Esempio 2: una particella in $\mathbb{R}^2$ soggetta ad un campo di dipolo	113

# 1 Moti unidimensionali

## 1.1 Moti unidimensionali conservativi

Il sistema meccanico più semplice è quello costituito da un punto materiale che si muove su di una retta (di ascissa  $x$ ), sotto l'azione di una forza  $f(x)$  indipendente dal tempo  $t$ , di classe  $C^\infty$  per  $x \in \mathbb{R}$ . Il suo moto è descritto dall'equazione differenziale:

$$m\ddot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

Le soluzioni di questa equazione soddisfano un'importante condizione, detta la *conservazione dell'energia*. Sia  $V(x)$  una funzione (individuata a meno di una costante) tale che  $V'(x) = -f(x)$ ; questa funzione viene chiamata *energia potenziale*. Data una funzione  $x(t)$  regolare, si definisce *energia* del moto corrispondente la funzione del tempo:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V(x(t)) \quad (1.2)$$

È facile verificare che, se  $x(t)$  è una soluzione della (1.1),  $E(t)$  è costante; infatti:

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + V'(x)\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} - f(x)) = 0$$

La costanza di  $E(t)$  (il cui valore indicheremo pure con  $E$  nel seguito), permette di ricavare una notevole stima a priori nel caso in cui l'energia potenziale sia inferiormente limitata.

**Proposizione 1.1** *Se  $V(x) \geq M$ , allora:*

$$|x(t)| \leq |x(0)| + |t|\sqrt{\frac{2}{m}(E - M)}$$

*e pertanto tutte le soluzioni sono definite per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Dim.** - Dalla (1.2) segue subito che, se  $x(t)$  è una soluzione della (1.1), allora, per tutti i valori di  $t$  del suo intervallo di definizione:

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \leq \sqrt{\frac{2}{m}[E - M]}$$

da cui segue facilmente l'asserto, usando la  $x(t) = x(0) + \int_0^t ds\dot{x}(s)$ . ■

Per proseguire nello studio qualitativo dell'equazione (1.1) è conveniente riscrivere la (1.1) come un sistema del primo ordine, assumendo  $v(t) = \dot{x}(t)$  come incognita, insieme a  $x(t)$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}f(x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Il sistema (1.3) è un sistema autonomo; pertanto per ogni punto  $(x_0, v_0)$  del piano  $(x, v)$ , detto *spazio delle fasi*, passa una ed una sola traiettoria (di cui la soluzione della (1.3) con condizioni iniziali  $(x_0, v_0)$  è una rappresentazione parametrica particolare). Il moto del punto materiale può essere utilmente rappresentato nello spazio delle fasi da un punto che si muove lungo la traiettoria, assumendo al tempo  $t$  la posizione  $(x(t), v(t))$ ; questo movimento deve avvenire in senso orario, in quanto  $\dot{x} = v$  (vedi la successiva Fig. 2). I punti dello spazio delle fasi saranno talora chiamati *stati* della particella.

Fra tutte le traiettorie possibili, un ruolo particolare hanno quelle costituite da un solo punto, dette *stati di equilibrio*; le soluzioni corrispondenti sono in tal caso soluzioni costanti. Gli stati di equilibrio possono essere situati esclusivamente sull'asse  $x$ ; infatti, se  $x(t)$  è costante,  $v(t) = \dot{x}(t) = 0$ . Inoltre, se  $(\bar{x}, 0)$  è uno stato di equilibrio,  $V'(\bar{x}) = 0$ .

La conservazione dell'energia implica che ogni traiettoria è interamente contenuta nel sottoinsieme dello spazio delle fasi:

$$D_E = \left\{ (x, v) : \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E \right\}$$

essendo  $E$  l'energia del moto corrispondente. Di qui segue subito in particolare che, se l'insieme  $D_E$  è un insieme limitato, tutte le soluzioni di energia  $E$  sono limitate e quindi globali (cioè sono definite per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ). In realtà questa stessa conclusione può raggiungerai anche se il punto iniziale  $(x_0, v_0)$  appartiene ad una componente connessa limitata di  $D_E$ ; infatti la traiettoria deve necessariamente appartenere tutta a tale componente, per continuità.

Un'altra rappresentazione conveniente del moto si può ottenere associando allo stato della particella un punto del piano, in modo che ascissa e ordinata rappresentino, rispettivamente, la posizione e l'energia della particella. Si noti però che non tutti i punti del piano  $(x, E)$  sono utilizzabili per questa rappresentazione, in quanto, per ogni  $x$ , deve essere  $E \geq V(x)$ ; pertanto solo i punti al di sopra del grafico di  $V(x)$  corrispondono a stati permessi. Risulta inoltre definita una trasformazione che associa ad ogni punto dello spazio delle fasi un punto del piano  $(x, E)$ , in modo che  $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ ; questa trasformazione non è invertibile, in quanto ci sono due punti dello spazio delle fasi, simmetrici rispetto all'asse  $x$ , corrispondenti ad uno stesso punto del piano  $(x, E)$ .

Esaminiamo ora le diverse caratteristiche che può assumere una traiettoria, considerando un esempio particolare, quello del potenziale

$$V(x) = x^2 e^{-x}$$

il cui grafico è rappresentato in Fig. 1 come il sottoinsieme dei punti del piano  $(x, E)$ , tali che  $E = V(x)$  (cioè i punti corrispondenti all'asse  $x$  dello spazio delle fasi).

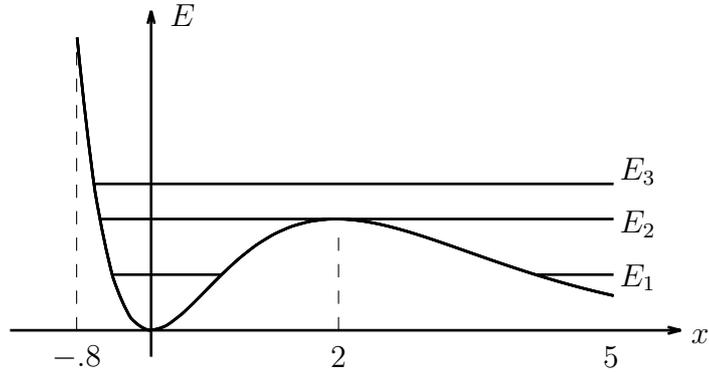


Figura 1: Esempi di traiettorie nel piano  $(x, E)$ .

Si noti che ad ogni insieme  $D_{E_0}$  dello spazio delle fasi corrisponde, nel piano  $(x, E)$ , l'intersezione della retta  $E = E_0$  con la regione  $\{(x, E) : E \geq V(x)\}$ . In Fig. 2 sono disegnati gli insiemi  $D_E$  corrispondenti a tre valori  $E_1, E_2, E_3$  dell'energia ed in Fig. 1 sono disegnate le immagini corrispondenti.

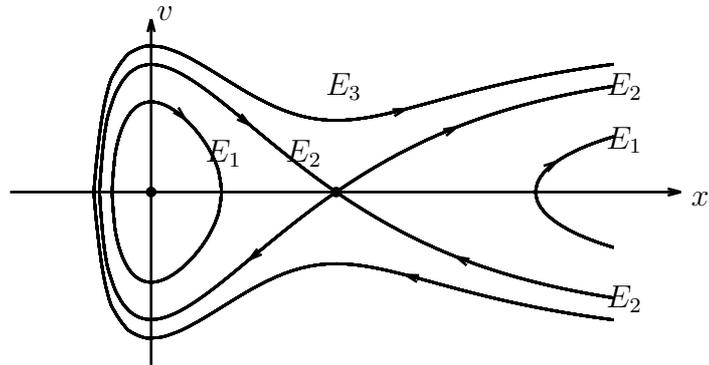


Figura 2: Esempi di traiettorie nello spazio delle fasi.

I punti  $(0, 0)$  e  $(2, 0)$  sono gli unici stati di equilibrio; le traiettorie per questi due punti coincidono pertanto con i punti stessi. Tutte le altre traiettorie sono invece delle curve regolari nello spazio delle fasi, che devono essere contenute completamente in un sottoinsieme  $D_E$ , come abbiamo già osservato. Si possono presentare solo tre casi con caratteristiche qualitativamente differenti, caratterizzati dal fatto che l'energia del moto sia minore, uguale o maggiore al valore del potenziale nel suo punto di massimo relativo,  $E_2 = V(2) = 4e^{-2}$ .

Cominciamo con il considerare il caso  $E < E_2$ ; è questa la situazione per l'energia  $E_1$  di Fig. 2. In tal caso si presentano due situazioni differenti, a

seconda che la traiettoria sia contenuta nella componente limitata di  $D_{E_1}$  o in quella illimitata, che indicheremo rispettivamente con  $D_{E_1}^1$  e  $D_{E_1}^2$ . Facciamo vedere che ambedue questi insiemi contengono una sola traiettoria.

Se la traiettoria è contenuta in  $D_{E_1}^1$ , che è un insieme limitato, l'intervallo di definizione del moto corrispondente coincide con  $\mathbb{R}$ , come abbiamo già visto. È inoltre facile vedere che la traiettoria coincide necessariamente con  $D_{E_1}^1$ . Infatti, se così non fosse, esisterebbe un punto  $(\bar{x}, \bar{v})$  appartenente a  $D_{E_1}^1$  ma non alla traiettoria, tale che  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), v(t)) = (\bar{x}, \bar{v})$ . Ciò è tuttavia impossibile, in quanto la traiettoria corrispondente alla soluzione con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{v})$ , non potendo coincidere con  $(\bar{x}, \bar{v})$  (su  $D_{E_1}^1$  non ci sono stati di equilibrio), deve contenere  $(\bar{x}, \bar{v})$  al suo interno e deve pertanto intersecare la traiettoria precedente.

Il ragionamento precedente implica anche che la curva chiusa  $D_{E_1}^1$  è percorsa completamente in un tempo finito; la soluzione della (1.3) è pertanto una soluzione periodica.

Passiamo a considerare il caso  $E = E_2$ . Ora l'insieme  $D_{E_2}$  contiene uno stato di equilibrio ed è facile rendersi conto, con argomenti simili a quelli usati precedentemente, che tale insieme contiene, oltre lo stato di equilibrio, tre altre traiettorie (vedi Fig. 2). La prima di queste traiettorie descrive un moto limitato, che si svolge nell'intervallo  $(x_-, 2)$ , essendo  $x_-$  il valore negativo di  $x$  tale che  $V(x) = E_2$ ; la traiettoria tende al punto  $(2, 0)$  sia per  $t \rightarrow +\infty$  che per  $t \rightarrow -\infty$ . Le altre due traiettorie descrivono due moti illimitati che si svolgono nell'intervallo  $(2, +\infty)$ ; quella situata nel semipiano  $v > 0$  tende al punto  $(2, 0)$  per  $t \rightarrow -\infty$ , mentre l'altra tende verso lo stesso punto per  $t \rightarrow +\infty$ .

Anche il caso  $E = E_3$  si analizza con lo stesso tipo di argomenti e si arriva alla conclusione che  $D_{E_3}$  contiene una sola traiettoria, corrispondente ad un moto  $x(t)$  che tende a  $+\infty$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ , la cui velocità cambia segno nell'unico punto  $\bar{x}$  tale che  $V(\bar{x}) = E_3$ .

La traiettoria limitata di energia  $E_2$  è un esempio di *separatrice*, cioè di una traiettoria che separa una regione dello spazio delle fasi in cui i moti sono periodici da un'altra in cui ciò non è vero.

La conservazione dell'energia permette di ottenere in modo molto semplice anche informazioni quantitative sulle soluzioni della (1.1). Basta osservare che la (1.2) può risolversi rispetto a  $\dot{x}(t)$ :

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \quad (1.4)$$

dove va scelto il segno  $+$  nei tratti di traiettoria contenuti nel semipiano  $v \geq 0$ , il segno  $-$  altrimenti. Pertanto, in ogni intervallo di tempo corrispondente a tratti di traiettoria con segno costante di  $v(t)$  si può integrare la (1.4) per separazione delle variabili.

Consideriamo, per esempio, la traiettoria periodica di energia  $E_1$ , indichiamo con  $x_-$  e  $x_+$  le sue intersezioni con l'asse  $x$  e supponiamo che l'origine dei tempi (la si può fissare arbitrariamente, perchè il sistema (1.3) è autonomo) sia scelta così che  $x(0) = x_-$ . Allora, detto  $T_+$  il tempo necessario a percorrere il tratto di traiettoria situato nel semipiano superiore, si ha, se  $t \leq T_+$ :

$$\int_{x_-}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = t \quad (1.5)$$

Poiché l'integrale a primo membro della (1.5) è una funzione crescente del suo estremo superiore, la (1.5) è certamente solubile rispetto a  $x(t)$ , che quindi è definita implicitamente in tutto l'intervallo  $[0, T_+]$ . In modo analogo si ottiene la soluzione corrispondente al tratto di traiettoria situato nel semipiano inferiore, definita per  $t \in [T_+, T]$ , dove  $T$  è il periodo del moto; si ha:

$$\int_{x(t)}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = t - T_+ \quad (1.6)$$

La (1.5) e la (1.6) implicano immediatamente che i tempi di percorrenza dei due tratti di traiettoria sono eguali e che il periodo del moto è dato dall'espressione:

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} \quad (1.7)$$

## 1.2 Isocronismo delle piccole oscillazioni e stime del periodo

Se  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + bx + c$ , con  $k > 0$ , la (1.7) permette di calcolare esplicitamente  $T$  ed il risultato dipende solo da  $k$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.8)$$

Ritroviamo così il risultato ben noto che tutti i moti unidimensionali che si svolgono sotto la sola azione di una forza di richiamo elastica sono periodici, di un periodo che non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni.

Questa osservazione suggerisce delle stime molto semplici, anche se in generale molto grossolane, di  $T$ .

Supponiamo di aver trovato due polinomi di secondo grado  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$  tali che (vedi Fig. 3):

$$\begin{aligned} V_1(x) &\leq V(x) \leq V_2(x) & x_- \leq x \leq x_+ \\ V_1(x_{\pm}) &= V(x_{\pm}) = V_2(x_{\pm}) = E \end{aligned} \quad (1.9)$$

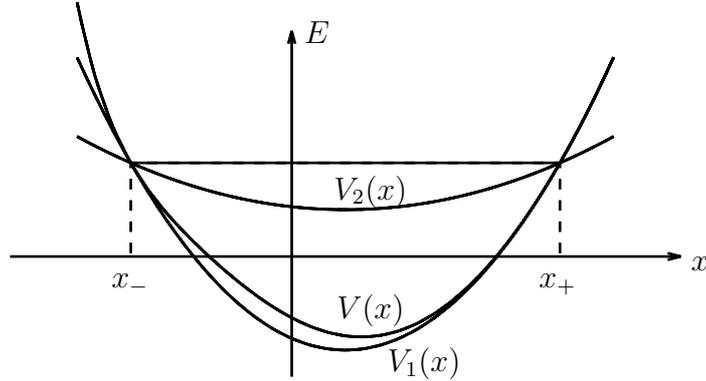


Figura 3: Rappresentazione grafica delle relazioni (1.9).

Allora:

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = T_1 \leq T \leq T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} \quad (1.10)$$

$$k_i = V_i'' \quad i = 1, 2 \quad (1.11)$$

Questa semplice osservazione ha alcune interessanti conseguenze. Supponiamo che:

$$0 < k_2 \leq V''(x) \leq k_1 \quad x_- \leq x \leq x_+ \quad (1.12)$$

Vogliamo provare che esistono due polinomi di secondo grado  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$  che soddisfano le (1.9), tali che

$$V_2'' = k_2 \quad V_1'' = k_1 \quad (1.13)$$

Ciò segue dalla seguente proposizione e dall'osservazione che, dati due punti del piano e  $k > 0$ , esiste certamente una parabola passante per essi di prefissata curvatura  $k$ .

**Proposizione 1.2** *Se le funzioni  $V(x)$ ,  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$  soddisfano le condizioni*

- (i)  $V_1(x_{\pm}) = V(x_{\pm}) = V_2(x_{\pm})$
- (ii)  $V_2''(x) \leq V''(x) \leq V_1''(x) \quad x_- \leq x \leq x_+$

*allora*

$$V_1(x) \leq V(x) \leq V_2(x)$$

**Dim.** - Dimostriamo che  $V_2(x) \geq V(x)$ . Poniamo pertanto  $\varphi(x) = V_2(x) - V(x)$  ed osserviamo che, per la (i),

$$\varphi(x_-) = \varphi(x_+) = 0$$

Inoltre, per la (ii),  $\varphi''(x) \leq 0$ , il che implica che  $\varphi'(x)$  è non crescente. Supponiamo ora che esista  $\bar{x}$  tale che  $\varphi(\bar{x}) < 0$  e  $x_- < \bar{x} < x_+$ . Per il teorema di Lagrange esisterebbero allora due punti  $x_1$  e  $x_2$  tali che:

$$x_- \leq x_1 \leq \bar{x} \leq x_2 \leq x_+$$

$$\varphi'(x_1) = \frac{\varphi(\bar{x}) - \varphi(x_-)}{\bar{x} - x_-} < 0 \quad ; \quad \varphi'(x_2) = \frac{\varphi(x_+) - \varphi(\bar{x})}{x_+ - \bar{x}} > 0$$

in contraddizione con il fatto che  $\varphi'(x)$  è non crescente. Pertanto  $\varphi(x) \geq 0, \forall x \in [x_-, x_+]$ .

Analogamente si mostra che  $V_1(x) \leq V(x)$  ■

Da questa proposizione segue un importante corollario.

**Proposizione 1.3** *Se  $V(x)$  ha un minimo nel punto  $\bar{x}$  e  $V''(\bar{x}) = k > 0$ , allora, se  $E - V(\bar{x})$  è abbastanza piccolo e  $x(0)$  è abbastanza vicino a  $\bar{x}$ , il moto è periodico ed inoltre, detto  $T(E)$  il suo periodo:*

$$\lim_{E \rightarrow V(\bar{x})} T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

**Dim.** - Le ipotesi fatte garantiscono che esiste un intorno  $I$  di  $\bar{x}$ , in cui  $V(x)$  è strettamente decrescente a sinistra di  $\bar{x}$  e strettamente crescente a destra; si può quindi applicare l'analisi della sezione 1.1 e concludere che esiste un intorno dello stato di equilibrio  $(\bar{x}, 0)$  nello spazio delle fasi, in cui le traiettorie sono curve chiuse corrispondenti a moti periodici di energia  $E \geq E_0 = V(\bar{x})$ . È inoltre facile provare con argomenti di continuità che, dato comunque  $\delta > 0$ , questi moti si svolgono all'interno dell'intervallo  $I_\delta = [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ , se  $E - E_0$  è abbastanza piccolo. In questo intervallo, vale la stima:

$$\min_{x \in I_\delta} V''(x) = k_{2\delta} \leq V''(x) \leq k_{1\delta} = \max_{x \in I_\delta} V''(x)$$

con  $k_{1\delta}$  e  $k_{2\delta}$  che tendono a  $k$  per  $\delta \rightarrow 0$ . La Prop. 1.2 e la (1.10) implicano allora che  $\lim_{E \rightarrow E_0} T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ . ■

Questa proposizione dice in sostanza che i moti periodici che si svolgono nelle vicinanze dello stato di equilibrio (le *piccole oscillazioni* della particella) hanno, a meno di un piccolo errore, lo stesso periodo, che è esattamente quello dei moti che si svolgerebbero sotto l'effetto di una forza elastica di costante di richiamo  $k$ . È questo il fenomeno detto *isocronismo delle piccole oscillazioni*.

Passiamo ora a presentare alcuni esempi di applicazione delle considerazioni precedenti alla stima effettiva del periodo di particolari moti periodici.

**Esempio 1.1** *Si stimi inferiormente e superiormente il periodo del moto che soddisfa l'equazione*

$$\ddot{x} = -\frac{x}{1+x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{2}$$

**Soluzione -** Si noti che:

$$V(x) = \int_0^x du \frac{u}{1+u} = x - \ln |1+x|$$

$$E = \frac{1}{8} \quad m = 1$$

$$V''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

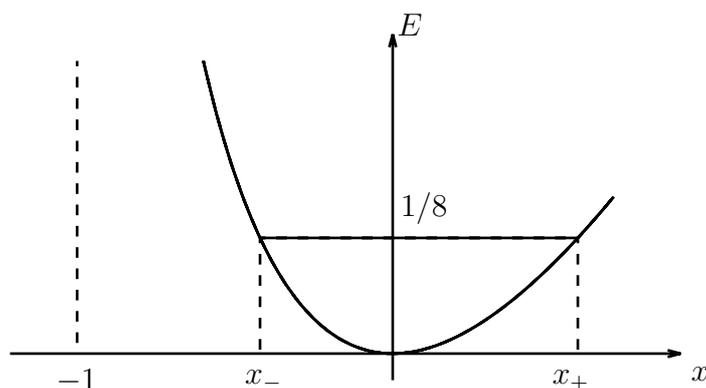


Figura 4: Traiettoria del moto nel piano  $(x, E)$ .

Si può quindi applicare il metodo appena discusso. Poiché  $V''(x)$  è monotona

$$\frac{1}{(1+x_+)^2} \leq V''(x) \leq \frac{1}{(1+x_-)^2} \quad x_- \leq x \leq x_+$$

Tuttavia, poiché  $x_+$  e  $x_-$  non sono calcolabili esplicitamente, per avere delle stime concrete bisogna trovare una stima inferiore per  $x_-$  ed una stima superiore per  $x_+$ . Ciò può farsi banalmente per tentativi (è inutile cercare di ottenere stime molto precise di  $x_-$  e  $x_+$ , dato l'errore notevole introdotto dal metodo usato per la stima di  $T$ ). Si può verificare, ad esempio, che

$$V(0.59) - \frac{1}{8} > 0.001 > 0$$

$$V(-0.43) - \frac{1}{8} > 0.007 > 0$$

Pertanto

$$0.39 < \frac{1}{(1+0.59)^2} \leq V''(x) \leq \frac{1}{(1-0.43)^2} < 3.08$$

$$3.58 < \frac{2\pi}{\sqrt{3.08}} \leq T \leq \frac{2\pi}{\sqrt{0.39}} < 10.1$$

Si può quindi affermare che

$$T = 6.84 \pm 3.26$$

il che implica una precisione solo del 50% nella stima di  $T$ .

Se i valori di  $x_-$  e  $x_+$  sono calcolabili esplicitamente, si può procedere talora direttamente al calcolo di  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$ , come mostra l'esempio seguente.

**Esempio 1.2** *Si stimi inferiormente e superiormente il periodo del moto che soddisfa l'equazione*

$$\ddot{x} = -2x - 4x^3, \quad x(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \dot{x}(0) = 0$$

**Soluzione -** Si noti che

$$V(x) = x^2 + x^4 \quad E = \frac{3}{4}$$

$$V(x_{\pm}) = E \Rightarrow x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

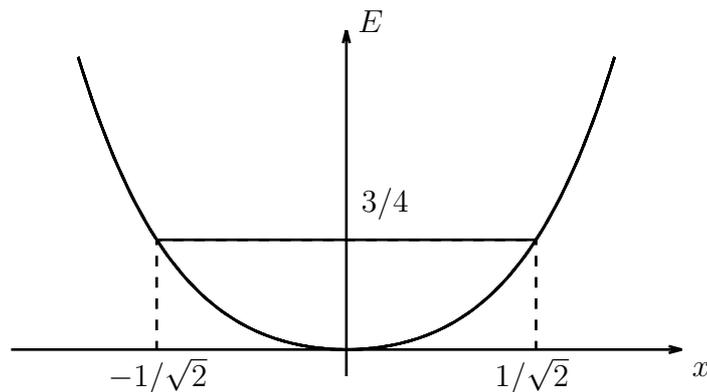


Figura 5: Traiettoria del moto nel piano  $(x, E)$ .

$V_1(x)$  e  $V_2(x)$  sono ovviamente due funzioni pari. Poniamo

$$V_i(x) = \frac{1}{2}k_i x^2 + c_i, \quad i = 1, 2$$

e osserviamo che deve essere verificata la disuguaglianza:

$$\frac{1}{2}k_1 x^2 + c_1 \leq x^2 + x^4, \quad x^2 \leq \frac{1}{2}$$

Inoltre:

$$V_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}k_1 + c_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow c_1 = \frac{3 - k_1}{4}$$

$k_1$  deve pertanto essere scelto come il più piccolo numero reale che soddisfa la disuguaglianza:

$$p(t) \equiv t^2 + t\left(1 - \frac{k_1}{2}\right) + \frac{k_1 - 3}{4} \geq 0 \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Ponendo  $t = 0$ , si vede che deve essere  $k_1 \geq 3$ . D'altra parte  $p(t) \geq 0$  se  $t \notin [t_-, t_+]$ , dove

$$t_{\pm} = \frac{k_1}{4} - \frac{1}{2} \pm \left| \frac{k_1}{4} - 1 \right|$$

Pertanto

$$k_1 \leq 4 \Rightarrow [t_-, t_+] = \left[\frac{k_1 - 3}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$k_1 > 4 \Rightarrow [t_-, t_+] = \left[\frac{1}{2}, \frac{k_1 - 3}{2}\right]$$

Perchè  $[0, \frac{1}{2}]$  sia contenuto nella regione in cui  $p(t) \geq 0$ , deve allora essere  $k_1 \geq 4$ ; si sceglie ovviamente  $k_1 = 4$ .

Ragionando in modo simile, si trova che la scelta ottimale per  $V_2(x)$  è quella per cui  $k_2 = 3$ . Pertanto:

$$\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{4}} \leq T \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3}} < 1.16\pi$$

$$T = (1.08 \pm .08)\pi$$

Un altro metodo di carattere abbastanza generale per trovare due polinomi di secondo grado che verificano le (1.9), senza conoscere  $x_-$  e  $x_+$ , è utilizzato nell'esempio seguente.

**Esempio 1.3** *Si stimi inferiormente e superiormente il periodo del moto che soddisfa l'equazione*

$$\ddot{x} = x(x - 1), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{2}$$

**Soluzione -** Si noti che

$$V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad E = \frac{1}{8}$$

$$E - V(x) = \frac{1}{8} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}(x - x_-)(x_+ - x)(x_3 - x)$$

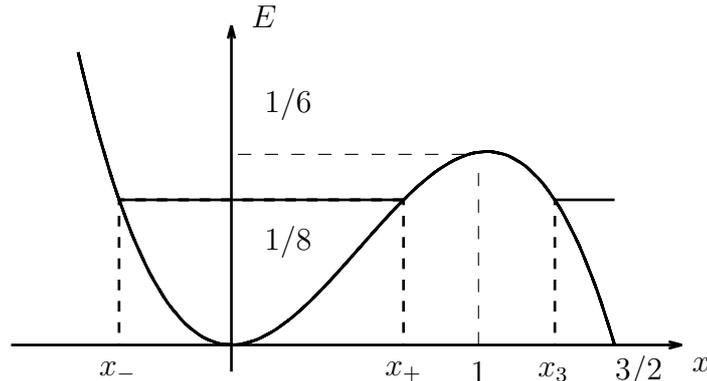


Figura 6: Traiettoria del moto nel piano  $(x, E)$ .

Il calcolo di  $x_-, x_+, x_3$  sarebbe possibile ma laborioso. Lo si può evitare (perdendo ben poco in precisione, dato che la stima di  $T$  è in ogni caso grossolana), osservando che

$$\frac{x_3 - x_+}{3}(x - x_-)(x_+ - x) \leq E - V(x) \leq \frac{x_3 - x_-}{3}(x - x_-)(x_+ - x)$$

da cui segue:

$$T_1 \equiv \sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{x_3 - x_-}{3}(x - x_-)(x_+ - x)}} \leq T$$

$$T \leq \sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{x_3 - x_+}{3}(x - x_-)(x_+ - x)}} \equiv T_2$$

Per l'osservazione fatta all'inizio del paragrafo, i valori di  $T_1$  e  $T_2$  dipendono solo dal coefficiente di  $x^2$ ; infatti gli integrandi sono della forma  $[E_i - V_i(x)]^{-1/2}$ , con  $E_i - V_i(x_{\pm}) = 0$ . Pertanto

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}(x_3 - x_-)}} \leq T \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}(x_3 - x_+)}}$$

Per tentativi si può verificare che:

$$x_- > -0.45; \quad x_+ < 0.68; \quad 1.26 < x_3 < 1.27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 - x_+ > 0.58; \quad x_3 - x_- < 1.72$$

Ne segue che

$$1.86\pi \leq T \leq 3.22\pi$$

$$T = (2.54 \pm 0.68)\pi$$

Nell'esempio 3 si può ottenere una maggiore precisione della stima, procedendo nel modo seguente. Poiché la buca di potenziale non è simmetrica rispetto al punto di minimo, è conveniente dividere in due parti l'integrale che definisce  $T$  e stimare separatamente i due integrali, riducendosi in modo ovvio al caso del periodo di un moto in una buca simmetrica. Più esplicitamente, si scrive:

$$T = \sqrt{2} \int_{x_-}^0 \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} + \sqrt{2} \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \equiv \frac{1}{2}T_- + \frac{1}{2}T_+ \quad (1.14)$$

$$T_- = \sqrt{2} \int_{x_-}^{-x_-} \frac{dx}{\sqrt{E - V_-(x)}} \quad V_-(x) = \begin{cases} V(x) & \text{se } x \leq 0 \\ V(-x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$T_+ = \sqrt{2} \int_{-x_+}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V_+(x)}} \quad V_+(x) = \begin{cases} V(-x) & \text{se } x \leq 0 \\ V(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Osserviamo che  $V''(x) = 1 - 2x$ , per cui  $V''(x) < 0$  per  $x > 1/2$ . Ciò significa che il metodo utilizzato nell'esempio 1 non può applicarsi per stimare direttamente  $T$ , in quanto  $x_+ > 1/2$ . Tuttavia il metodo è applicabile a  $T_-$  in quanto

$$1 \leq V''(x) \leq 1 - 2x_-$$

Ne segue che

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - 2x_-}} \leq T_- \leq 2\pi$$

Per quel che riguarda  $T_+$ , si può procedere nel modo seguente. Cerchiamo un polinomio di secondo grado della forma  $V_2(x) = k_2x^2/2 + c_2$ , tale che  $V_2(x_+) = V(x_+)$  e  $V_2(x) \geq V(x), \forall x \in [0, x_+]$ . Per far ciò, poniamo  $\varphi(x) = V_2(x) - V(x)$  ed osserviamo che, se  $\varphi'(x) \leq 0$  per  $x \in [0, x_+]$ , allora  $\varphi(x)$  è una funzione non crescente fra 0 e  $x_+$ . Poiché  $\varphi(x_+) = 0$ , deve essere  $\varphi(x) \geq 0$  per  $x \in [0, x_+]$ . Per risolvere il problema della determinazione di  $V_2(x)$  è allora sufficiente imporre che

$$V_2'(x) = k_2x \leq V'(x) = x - x^2, \quad 0 \leq x \leq x_+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 \leq 1 - x, \quad 0 \leq x \leq x_+ \Rightarrow k_2 \leq 1 - x_+$$

In modo analogo, per trovare un polinomio della forma  $V_1(x) = k_1x^2/2 + c_1$ , tale che  $V_1(x_+) = V(x_+)$  e  $V_1(x) \leq V(x)$ , è sufficiente imporre che

$$\begin{aligned} V_1'(x) = k_1x &\geq V'(x) = x - x^2, & 0 \leq x \leq x_+ &\Rightarrow \\ \Rightarrow k_1 &\geq 1 - x, & 0 \leq x \leq x_+ &\Rightarrow k_1 \geq 1 \end{aligned}$$

Pertanto

$$2\pi \leq T_+ \leq \frac{2\pi}{\sqrt{1-x_+}} \quad (1.15)$$

Questo stesso procedimento può applicarsi alla stima di  $T_-$ , ottenendo il seguente risultato, migliore del precedente:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-x_-}} \leq T_- \leq 2\pi \quad (1.16)$$

Mettendo insieme (1.14), (1.15) e (1.16), si ottiene:

$$1.82\pi < \pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x_-}}\right) \leq T \leq \pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x_+}}\right) < 2.77\pi$$

### 1.3 Moti unidimensionali in presenza di una forza conservativa ed un attrito lineare

Si consideri una particella puntiforme di massa  $m$  soggetta alla forza conservativa  $f(x) = -V'(x)$  ed alla forza di attrito lineare  $-\lambda\dot{x}$ ,  $\lambda > 0$ . L'equazione del moto è:

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + V'(x) = 0 \quad (1.17)$$

cui corrisponde il sistema del primo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{m}V'(x) - \frac{\lambda}{m}v \end{aligned} \quad (1.18)$$

La prima osservazione da fare è che l'energia non è più conservata; infatti

$$\dot{E} = mv\dot{v} + V'(x)v = -\lambda v^2 \quad (1.19)$$

Questa equazione dà tuttavia una importante informazione qualitativa: il moto deve svolgersi in modo che  $E(t)$  sia una funzione non crescente del tempo.

Un'altra osservazione importante è che gli stati di equilibrio sono gli stessi del caso  $\lambda = 0$ .

Vediamo come utilizzare queste informazioni, cominciando da un caso particolarmente semplice, quello in cui  $V(x)$  è un potenziale del tipo di quello rappresentato in Fig. 7 (per esempio  $V(x) = kx^2/2$ ), quando cioè  $V(x)$  presenta un solo minimo, diciamo in  $x = 0$ , diverge per  $x \rightarrow \pm\infty$  ed ha

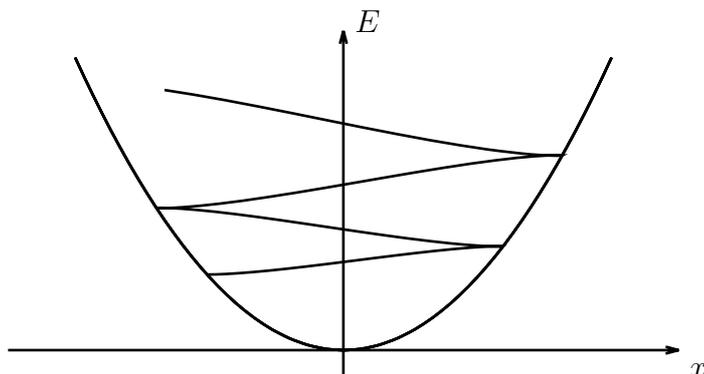


Figura 7: Esempio di traiettoria in presenza di attrito.

derivata sempre diversa da zero, eccetto che in  $x = 0$ ; supporremo anche che  $V(0) = 0$ .

Vogliamo mostrare che per ogni soluzione della (1.17) risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

quali che siano  $\lambda > 0$  e  $m > 0$  e che la traiettoria nel piano  $(x, E)$  ha l'andamento qualitativo indicato in Fig. 7, con un numero di oscillazioni che può essere infinito o finito, a secondo del valore di  $\lambda$ .

Supponiamo che il punto iniziale della traiettoria (nel piano  $(x, E)$ ) sia  $(x_0, v_0)$ , con  $x_0 < 0$  e  $v_0 \geq 0$ . Allora il punto  $(x(t), E(t))$  si sposterà inizialmente verso destra; facciamo vedere che si possono presentare due soli comportamenti:

- 1)  $x(t)$  e  $E(t)$  tendono ambedue a 0 per  $t \rightarrow \infty$  in modo monotono;
- 2) esiste un tempo finito  $t_1$ , tale che  $(x(t), E(t))$  tende, per  $t \rightarrow t_1$ , ad un punto  $(x_1, E_1)$  della curva  $E = V(x)$ , tale che  $x_1 \neq 0$  e  $E_1 < E(0)$ .

Cominciamo con l'osservare che, se la traiettoria non incontra mai la curva  $E = V(x)$ ,  $\dot{x}(t)$  è sempre positivo e pertanto  $x(t)$  è una funzione monotona crescente; esiste pertanto il limite  $\bar{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ . Anche  $E(t)$  è una funzione monotona (decescente); pertanto esiste anche il limite  $\bar{E} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t)$ . Poiché  $\dot{x}(t) = \sqrt{2[E(t) - V(x(t))]/m}$ , esiste anche  $\bar{v} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t)$ . Si può anche affermare che  $\bar{v} = 0$ ; infatti, se una funzione converge per  $t \rightarrow \infty$  insieme alla sua derivata, il limite della derivata è necessariamente nullo, come è facile dimostrare.

Facciamo ora vedere che deve necessariamente essere  $\bar{x} = 0$ . Infatti la (1.17) implica che esiste anche il limite  $\bar{a} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x}(t)$  e che  $\bar{a} = -V'(\bar{x})/m$ .

Ma  $\bar{a} = 0$ , visto che convergono sia  $\dot{x}(t)$  che  $\ddot{x}(t)$ , e ciò è possibile solo se  $\bar{x} = 0$ . L'alternativa esposta precedentemente è pertanto dimostrata.

Supponiamo ora che la traiettoria raggiunga la curva  $E = V(x)$ ; possiamo allora ripetere il ragionamento precedente, prendendo  $(x(t_1), E_1)$  come punto iniziale, e concludere che o  $(x(t), E(t)) \rightarrow (0, 0)$  per  $t \rightarrow \infty$  oppure esiste un tempo finito  $t_2$ , tale che  $(x(t), E(t))$  tende, per  $t \rightarrow t_2$ , ad un punto  $(x_2, E_2)$  del ramo a sinistra dello 0 della curva  $E = V(x)$ , tale che  $x_2 \neq 0$  e  $E_2 < E_1$ .

Questo ragionamento può essere iterato e si arriva alla conclusione che deve verificarsi una delle due seguenti situazioni:

- 1)  $x(t)$  e  $E(t)$  tendono ambedue a 0 per  $t \rightarrow \infty$ , dopo un numero finito di oscillazioni di  $x(t)$  intorno all'origine;
- 2)  $E(t)$  converge decrescendo a  $E_\infty \geq 0$ , mentre  $x(t)$  compie un numero infinito di oscillazioni.

Ci rimane da far vedere che anche nel secondo caso  $x(t)$  tende a 0. Infatti, se così non fosse,  $E_\infty$  sarebbe maggiore di 0, mentre  $x(t)$  oscillerebbe asintoticamente fra gli estremi dell'intervallo  $[x_-, x_+]$ , con  $V(x_\pm) = E_\infty$ ; ciò è tuttavia impossibile per la ragione seguente.

L'intervallo  $[x_-, x_+]$  contiene certamente un intervallo  $[a, b]$ , tale che  $E_\infty - V(x) \geq \gamma > 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Pertanto, mentre attraversa l'intervallo  $[a, b]$ , la particella ha certamente una velocità maggiore in modulo di  $\bar{v} = \sqrt{2\gamma/m}$ . D'altra parte,  $\forall t > 0$ , è certamente  $|\dot{x}(t)| = \sqrt{2[E(t) - V(x(t))]/m} \leq \sqrt{2E(0)/m} = \alpha$ ; quindi la particella impiega ogni volta un tempo maggiore o eguale a  $\tau = (b - a)/\alpha$  per percorrere l'intervallo  $[a, b]$ . Ne segue, per la (1.19), che, se  $t_1$  e  $t_2$  sono gli estremi di un intervallo di tempo in cui la particella attraversa  $[a, b]$ , si ha:

$$|E(t_2) - E(t_1)| = \lambda \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)^2 dt \geq \lambda \tau \bar{v}^2 > 0$$

cioè in ogni attraversamento di  $[a, b]$  l'energia diminuisce di una quantità finita e abbiamo supposto che ci sono infiniti attraversamenti. Ciò è tuttavia impossibile, in quanto  $E(0) - E_\infty$  è una quantità finita.

Passiamo ora a considerare un caso un pò più complicato, quale quello del potenziale  $V(x) = x^2 e^{-x}$ , rappresentato in Fig. 8.

La caratteristica rilevante di questo potenziale, da un punto di vista qualitativo, è che presenta due punti stazionari, uno di minimo  $x_m$  ed uno di massimo  $x_M$ , corrispondenti a due punti di equilibrio, e che  $V(x)$  diverge per  $x \rightarrow -\infty$ , mentre tende a 0, per  $t \rightarrow \infty$ . In una situazione del genere si suol dire che nell'intorno del punto di minimo c'è una *bucca di potenziale* con una *barriera di potenziale* infinita sulla sinistra ed una barriera finita sulla destra. Nel caso precedente la barriera di potenziale era infinita da ambedue i lati.

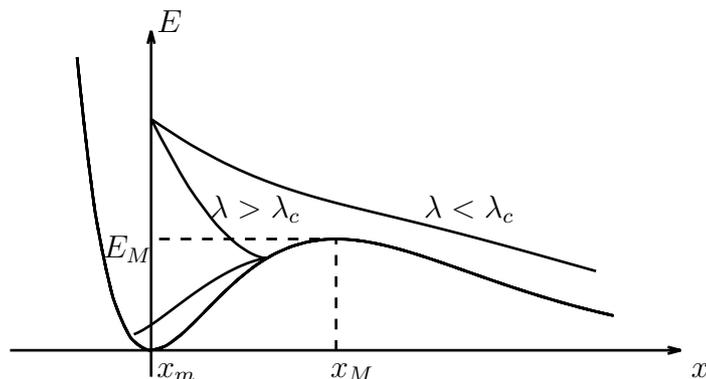


Figura 8: Esempi di traiettorie con diversi valori di  $\lambda$ .

La presenza di una barriera di potenziale finita sulla destra del minimo comporta delle differenze qualitative notevoli rispetto al caso precedente, differenze che possono essere facilmente messe in evidenza considerando le traiettorie nel piano  $(x, E)$  che passano al tempo  $t = 0$  per un punto  $(x_m, E_0)$  dell'asse  $E$  con velocità positiva.

Detta  $E_M = V(x_M)$  l'altezza della barriera di potenziale, è chiaro che, se  $E_0 \leq E_M$ , possiamo procedere esattamente come nel caso precedente; infatti la traiettoria deve essere contenuta necessariamente all'interno della buca di potenziale ed i valori di  $V(x)$  al di fuori della buca non hanno alcuna rilevanza. Pertanto  $x(t)$  tende a  $x_m$  per  $t \rightarrow \infty$ , dopo aver compiuto un numero finito o infinito di oscillazioni.

Lo stesso risultato si ottiene ovviamente anche se  $E_0 > E_M$ , purché l'energia scenda al di sotto del valore  $E_M$  prima che  $x(t)$  abbia raggiunto il punto di massimo.

È anche chiaro però che, se  $E_0$  è abbastanza grande, la traiettoria riesce a superare la barriera di potenziale. In questo caso la traiettoria prosegue verso l'infinito, non essendo possibile che converga verso un punto della curva  $E = V(x)$ , nè in un tempo finito nè in un tempo infinito. Che non possa convergere verso la curva del potenziale in un tempo infinito si dimostra come prima. Per escludere che questa convergenza possa realizzarsi in un tempo finito, supponiamo che esista  $\bar{t} > 0$ , tale che  $x(t) \rightarrow \bar{x} > x_M$  e  $\dot{x}(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \bar{t}$  (ipotesi equivalenti per i soliti argomenti all'ipotesi che vogliamo escludere). Se ciò fosse vero, sarebbe anche vero che  $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \ddot{x}(t) = -V'(\bar{x})/m > 0$ , in contraddizione con il fatto che  $\dot{x}(t) > 0$  per  $t < \bar{t}$ .

Per ovvie ragioni di continuità, esiste sull'asse  $E$  anche un punto da cui parte (con velocità positiva) una traiettoria che converge asintoticamente verso il punto di massimo della barriera,  $(x_M, E_M)$ . È anche facile convincersi che c'è un'altra traiettoria che converge verso questo punto e che proviene

dall'infinito, così come ci sono altre due traiettorie che tendono asintoticamente verso il massimo della barriera per  $t \rightarrow -\infty$ , una verso destra ed una verso sinistra. Può essere istruttivo provare a disegnare qualitativamente queste quattro traiettorie nello spazio delle fasi (vedi Fig. 9); il disegno che ne risulta dà un'indicazione d'insieme molto chiara della situazione generale, tenendo conto opportunamente che traiettorie diverse non possono intersecarsi nello spazio delle fasi (ciò non è vero nel piano  $(x, E)$ ).

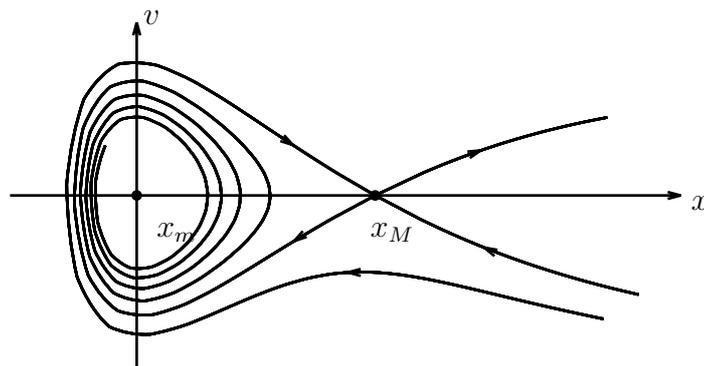


Figura 9: Esempi di traiettorie nello spazio delle fasi.

Proviamo ora a ottenere delle stime esplicite sui valori di  $\lambda$  in corrispondenza dei quali la traiettoria che parte da  $x_0 = 0$  con  $v_0 > 0$ , anzichè dirigersi verso il minimo, supera la barriera di potenziale.

Come sappiamo l'energia è una funzione monotona decrescente del tempo. Sia

$$0 < t_1 \leq +\infty$$

il primo istante di arresto del corpo ed  $x_1$  la posizione occupata in tale istante.

Poichè  $x(t)$  è monotona in  $[0, t_1]$ , la funzione inversa  $t(x)$  è ben definita in  $[x_0, x_1]$ ; essa rappresenta l'istante in cui la particella passa per il punto  $x$ . Possiamo allora definire in  $[x_0, x_1]$  la funzione

$$\tilde{E}(x) = E(t(x))$$

che rappresenta l'energia posseduta dalla particella quando transita per il punto  $x$ .

$\tilde{E}(x)$  è una funzione decrescente; pertanto, se si riesce a provare che  $\tilde{E}(x) < V(x_M)$  per qualche  $x \in [x_0, x_M)$ , la continuità di  $x(t)$  implica che  $x_1 < x_M$ ; ne segue che  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_m$ .

Talora si riesce invece a provare che  $\tilde{E}(x) > V(x_M)$ ,  $\forall x \in [x_0, x_M)$ ; ciò ovviamente implica che  $x_1 > x_M$  e pertanto il valore di  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  dipende dall'andamento di  $V(x)$  per  $x > x_M$  (nell'esempio di Fig. 8  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$ ).

Vediamo come si possano ottenere informazioni del tipo di quelle appena indicate sulla funzione  $\tilde{E}(x)$ . Si osservi che, per la (1.19):

$$\frac{d\tilde{E}(x)}{dx} = \frac{dE(t)}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dE}{dt} / \frac{dx}{dt} = -\lambda \dot{x}^2 / \dot{x} = -\lambda \dot{x} \quad (1.20)$$

D'altra parte, per la definizione dell'energia e la positività di  $\dot{x}(t)$  per  $t \in [0, t_1]$ :

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}[E(t) - V(x(t))]} \quad (1.21)$$

Le (1.20) e (1.21) implicano che:

$$\frac{d\tilde{E}(x)}{dx} = -\lambda \sqrt{\frac{2}{m}[\tilde{E}(x) - V(x)]}$$

Integrando fra  $x_0$  e  $x \leq x_1$ , si ottiene

$$\tilde{E}(x) = E(0) - \lambda \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{x_0}^x dy \sqrt{\tilde{E}(y) - V(y)} \quad (1.22)$$

La (1.22) implica immediatamente che esiste un *valore critico*  $\lambda_c$  di  $\lambda$ , tale che la traiettoria supera la barriera di potenziale se  $0 \leq \lambda < \lambda_c$  (eventualmente in seguito potrebbe riattraversarla in senso inverso), mentre viene attirata asintoticamente verso il fondo della buca, senza mai attraversare la barriera, se  $\lambda > \lambda_c$ . È facile convincersi che, se  $\lambda = \lambda_c$ , la traiettoria tende asintoticamente al punto di massimo.

La (1.22) permette facilmente di ottenere una stima inferiore ed una superiore di  $\lambda_c$ , come vediamo subito facendo un esempio.

**Esempio 1.4** *Si consideri il moto che soddisfa la (1.17) con  $m = 1$ , potenziale*

$$V(x) = x^2(x - 1)^2$$

*e condizioni iniziali*

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1/2$$

*Trovare una stima inferiore ed una superiore del valore critico  $\lambda_c$  del coefficiente di attrito*

**Soluzione -** Il potenziale ha l'andamento mostrato in Fig. 10.

Ci troviamo pertanto in una situazione simile a quella di Fig. 8, con  $x_0 = x_m = 0$ ,  $x_M = 1/2$ ,  $\dot{x}(0) > 0$ . La (1.22) diventa:

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{8} - \lambda \sqrt{2} \int_0^x dy \sqrt{\tilde{E}(y) - y^2(y - 1)^2} \quad (1.23)$$

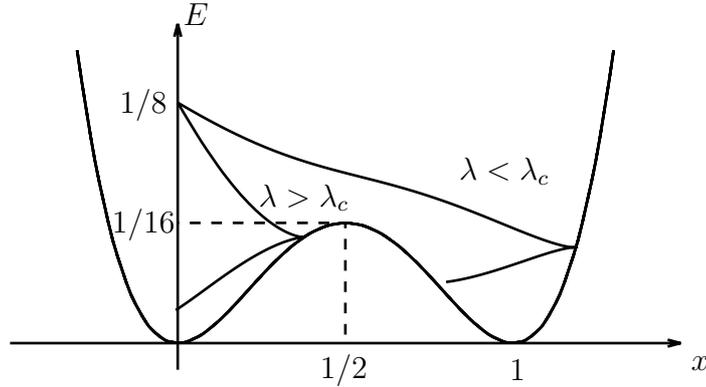


Figura 10: Esempi di traiettorie nel piano  $(x, E)$ .

Supponiamo  $\lambda > \lambda_c$ ; per definizione ciò implica che esiste  $\bar{x} \in (0, 1/2)$ , tale che

$$\tilde{E}(\bar{x}) = \frac{1}{16} \quad \tilde{E}(x) \geq \frac{1}{16} \quad \text{se } 0 \leq x \leq \bar{x} < x_1$$

Usando la (1.23) e la monotonia di  $V(x)$  in  $[0, 1/2]$ , si ottiene:

$$\frac{1}{16} = \lambda\sqrt{2} \int_0^{\bar{x}} dy \sqrt{\tilde{E}(y) - y^2(y-1)^2} \geq \lambda\sqrt{2\bar{x}} \sqrt{\frac{1}{16} - V(\bar{x})}$$

Pertanto

$$\frac{1}{16\sqrt{2\bar{x}} \sqrt{\frac{1}{16} - V(\bar{x})}} \geq \lambda > \lambda_c \quad (1.24)$$

Poichè  $\bar{x}$  nella (1.24) può assumere qualsiasi valore fra 0 e 1/2, si ha:

$$\lambda_c < \lambda_2 \equiv \inf_{\bar{x} \in (0, 1/2)} \frac{1}{16\sqrt{2\bar{x}} \sqrt{\frac{1}{16} - V(\bar{x})}}$$

Supponiamo viceversa  $\lambda < \lambda_c$ ; perchè ciò accada deve risultare  $\tilde{E}(1/2) > V(1/2) = 1/16$  e quindi, per la (1.23):

$$\lambda\sqrt{2} \int_0^{1/2} dy \sqrt{\tilde{E}(y) - y^2(y-1)^2} < \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \quad (1.25)$$

Poichè

$$\int_0^{1/2} dy \sqrt{\tilde{E}(y) - y^2(y-1)^2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{E(0) - V(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{8}}$$

la (1.25) è sicuramente soddisfatta se

$$\lambda\sqrt{2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{8}} \leq \frac{1}{16}$$

cioè se  $\lambda \leq 1/4$ . Pertanto

$$\lambda_c > \lambda_1 = \frac{1}{4}$$

## 1.4 Un modello matematico di orologio

Il funzionamento di un orologio è basato sull'esistenza di un meccanismo che è in grado di compiere un moto periodico sostanzialmente stabile rispetto a piccole perturbazioni. In genere si può schematizzare tale meccanismo con un oscillatore armonico soggetto ad un debole attrito e ad una forza che agisce su di esso in modo da permettergli di recuperare l'energia persa a causa dell'attrito. Perché tale recupero di energia sia possibile, si fa in modo che tale forza agisca in verso concorde a quello della velocità. Il modello matematico più semplice di un orologio, corrispondente alle osservazioni precedenti, è pertanto descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(\dot{x}) \quad (1.26)$$

dove  $F(\eta)$  è una funzione positiva e regolare, nulla per  $\eta \leq 0$ .

Per semplificare ulteriormente il problema, supporremo che  $F(\eta)$  sia costante per  $\eta > 0$ , cioè che:

$$F(\eta) = \begin{cases} F_0 & \text{se } \eta > 0 \\ 0 & \text{se } \eta = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

Ciò implica che  $F(\eta)$  è discontinua in  $\eta = 0$  e quindi che l'equazione differenziale 1.26 deve essere opportunamente interpretata per i valori di  $t$  tali che  $\dot{x}(t) = 0$ . Noi faremo l'assunzione che le soluzioni del nostro problema si ottengono raccordando con continuità le soluzioni valide nella regione dello spazio delle fasi  $\{\dot{x} > 0\}$  con quelle valide nella regione  $\{\dot{x} < 0\}$ . È ragionevole aspettarsi che i moti così definiti si possano ottenere anche come limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  delle soluzioni della 1.26 con  $F = F_\varepsilon$ , essendo  $F_\varepsilon$  una funzione regolare e nulla per  $\eta < 0$ , che converge alla funzione 1.27 per  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Supponiamo infine che il coefficiente di attrito  $\lambda$  sia tale che

$$\lambda^2 < 4mk \quad (1.28)$$

Ciò implica che, data una costante  $c$  qualunque, il problema seguente:

$$m\ddot{y} + \lambda\dot{y} + ky = c \quad (1.29)$$

con condizioni iniziali

$$y(t_0) = a \quad , \quad \dot{y}(t_0) = 0 \quad (1.30)$$

ammette come soluzione la funzione

$$y(t) = \left(a - \frac{c}{k}\right)e^{-(t-t_0)/\tau} \left[\frac{1}{\tau\omega} \sin(\omega(t-t_0)) + \cos(\omega(t-t_0))\right] + \frac{c}{k} \quad (1.31)$$

dove

$$\tau = 2m/\lambda \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}} \quad (1.32)$$

Ciò segue facilmente dall'osservazione che la soluzione generale dell'equazione 1.29 si può scrivere come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata e della soluzione particolare costante  $\bar{y}(t) = c/k$ .

Consideriamo ora la soluzione della 1.26, che soddisfa le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0 > 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (1.33)$$

e la cui traiettoria nello spazio delle fasi, all'istante  $t = 0$ , attraversa l'asse  $x$  dall'alto verso il basso, vedi Fig. 11.

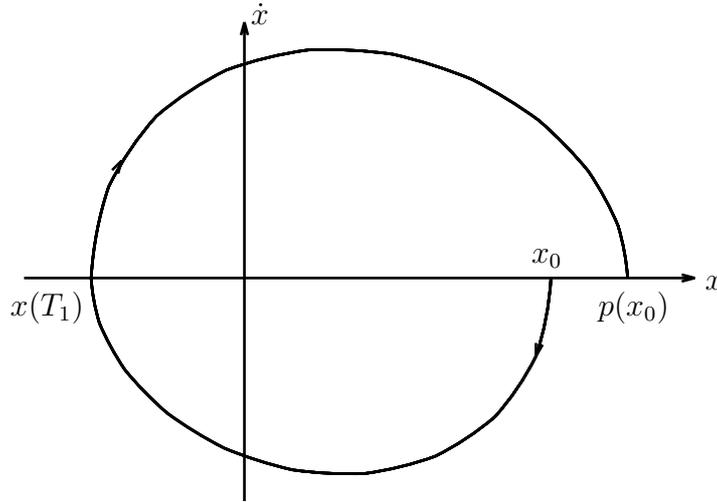


Figura 11: Esempio di traiettoria.

La soluzione del nostro problema deve pertanto coincidere con la soluzione della 1.29, con  $c = 0$  e gli stessi dati iniziali, almeno per valori positivi di  $t$  abbastanza piccoli; ciò deve anzi essere vero fino al tempo  $T_1$  tale che  $\dot{x}(t) < 0$  per  $0 < t < T_1$  e  $\dot{x}(T_1) = 0$ . Si ha pertanto:

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \left[\frac{1}{\tau\omega} \sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right] \quad , \quad 0 \leq t \leq T_1 \quad (1.34)$$

ed è facile vedere che

$$T_1 = \frac{\pi}{\omega} \quad (1.35)$$

Al tempo  $T_1$  la traiettoria attraversa l'asse  $x$  dal basso verso l'alto, nel punto di ascissa  $x(T_1) = -x_0 e^{-\pi/(\tau\omega)}$ , in quanto  $\dot{x}(T_1) = -kx(T_1) > 0$ . Pertanto, per  $T_1 < t < T_2$ , la soluzione della 1.26 deve coincidere con la soluzione della 1.29, con  $c = F_0$  e dati iniziali

$$y(T_1) = x(T_1) \quad , \quad \dot{y}(T_1) = 0 \quad (1.36)$$

essendo  $T_2$  definito dalla condizione che  $\dot{x}(t) > 0$  per  $T_1 < t < T_2$  e  $\dot{x}(T_2) = 0$ . Si ha pertanto:

$$x(t) = (x(T_1) - \frac{F_0}{k}) e^{-(t-T_1)/\tau} \left[ \frac{1}{\tau\omega} \sin(\omega(t-T_1)) + \cos(\omega(t-T_1)) \right] + \frac{F_0}{k} \quad (1.37)$$

ed è facile vedere che  $T_2 = 2T_1$ .

Al tempo  $T_2$  la traiettoria interseca nuovamente l'asse  $x$  positivo dall'alto verso il basso, per cui il procedimento precedente può iterarsi. Pertanto la soluzione della 1.26 può essere calcolata, in linea di principio, per ogni valore positivo di  $t$  (ed anche per ogni valore negativo, procedendo in modo simile), anche se non è possibile dare una espressione esplicita che valga per tutti i tempi.

Siamo tuttavia in grado, senza fare altri calcoli, di stabilire le proprietà principali delle soluzioni, utilizzando solo le 1.34 e 1.37. Queste equazioni ci permettono infatti di determinare la relazione che intercorre fra l'intersezione  $x_0$  di una traiettoria con l'asse  $x$  positivo e l'intersezione successiva, che chiameremo  $p(x_0)$ . Basta considerare la soluzione della 1.26 con dati iniziali 1.33 ed osservare che  $p(x_0)$  coincide con  $x(T_2)$ ; si ha pertanto:

$$p(x_0) = f(1 + \sigma) + x_0 \sigma^2 \quad , \quad f = \frac{F_0}{k} \quad , \quad \sigma = e^{-\pi/(\tau\omega)} \quad (1.38)$$

Questa funzione, nel linguaggio della teoria dei sistemi dinamici, è chiamata la *mappa di Poincaré* del sistema dinamico associato alla 1.26 rispetto all'asse  $x$  positivo. Essa permette di evidenziare alcune proprietà notevoli della 1.26, nel modo seguente.

Si osserva innanzi tutto che le soluzioni periodiche della 1.26 sono univocamente individuate dai valori di  $x_0$  tali che  $p(x_0) = x_0$ ; infatti, per tali valori di  $x_0$ , la traiettoria nello spazio delle fasi si chiude, il che è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di moti periodici per un sistema unidimensionale con forze indipendenti dal tempo, come è quello che stiamo studiando. Dalla 1.38 segue allora che c'è una sola soluzione periodica, che interseca l'asse  $x$  positivo nel punto  $\bar{x}$ , con

$$\bar{x} = \frac{f}{1 - \sigma} \quad (1.39)$$

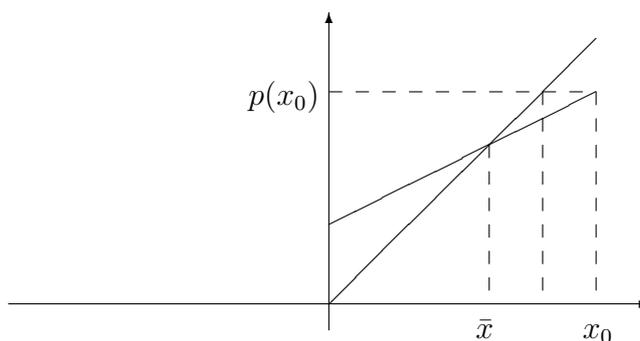


Figura 12: Mappa di Poincaré.

corrispondente in Fig. 12 all'intersezione del grafico di  $p(x_0)$  con la bisettrice degli assi (si noti che  $\sigma < 1$ ).

Inoltre, la funzione 1.38 ha la proprietà (vedi Fig. 12) che, se  $x_0 > \bar{x}$ , allora  $\bar{x} < p(x_0) < x_0$ , mentre, se  $x_0 < \bar{x}$ , allora  $\bar{x} > p(x_0) > x_0$  (come nell'esempio di Fig. 11). Ciò significa che tutte le traiettorie tendono ad avvicinarsi alla traiettoria chiusa corrispondente ad  $x_0 = \bar{x}$ ; è anzi facile convincersi che tutte le traiettorie convergono asintoticamente alla traiettoria periodica con velocità esponenziale. Questa proprietà si suole di solito indicare dicendo che *l'orbita periodica è attrattiva*; essa implica che il sistema, quali che siano le condizioni iniziali, si muove asintoticamente secondo la soluzione periodica. Ne segue anche che il sistema, una volta che abbia raggiunto la situazione di moto asintotica a meno di una piccola residua differenza (che rimane sempre, poichè le traiettorie non possono intersecarsi, ma è praticamente irrilevante), è sostanzialmente insensibile a piccole perturbazioni del suo stato; infatti tali perturbazioni producono uno spostamento dalla traiettoria che il moto tende ad annullare rapidamente.

Le considerazioni precedenti giustificano l'affermazione che la 1.26 è un modello di orologio, cioè di un sistema che si muove di moto periodico di un periodo fissato, sostanzialmente stabile rispetto a piccole perturbazioni.