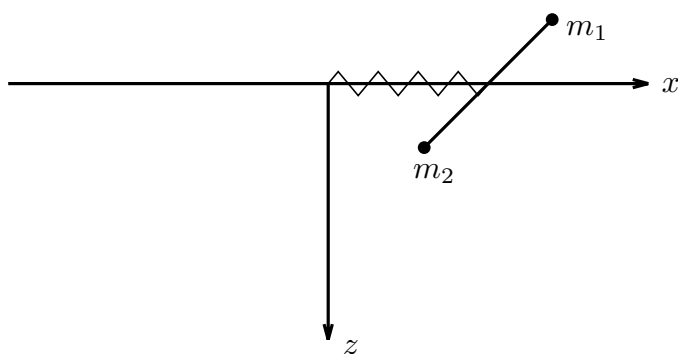


II compito di esonero di Meccanica Razionale per fisici del 2 maggio 1989
Università dell'Aquila

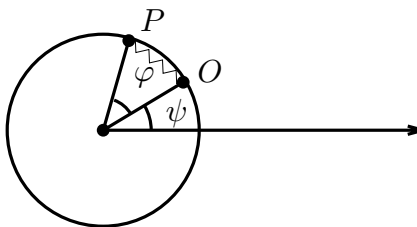
Agli estremi di una sbarretta di lunghezza $2l$ e massa trascurabile sono saldate due particelle puntiformi di masse m_1 e m_2 . La sbarretta è vincolata a muoversi nel piano verticale (xz) ed il suo centro, vincolato a muoversi sull'asse orizzontale x , è attirato verso l'origine da una forza elastica di costante di richiamo k .



- 1) Se $m_2 = m_1/2$,
 - a) scegliere delle coordinate lagrangiane e scrivere le equazioni del moto corrispondenti;
 - b) calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni intorno al punto di equilibrio stabile;
 - c) studiare la linearizzazione delle equazioni del moto intorno al punto di equilibrio instabile.
- 2) Trovare la soluzione generale delle equazioni del moto nel caso che $m_1 = m_2$

Compito di Meccanica Razionale del 27 giugno 1989
Università dell'Aquila

1) Un anello circolare omogeneo di massa M e raggio R è vincolato a muoversi in un piano orizzontale con il centro fisso. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi lungo l'anello ed è attratto verso il punto O dell'anello da una forza elastica di costante di richiamo k .



- a) Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema, usando le variabili lagrangiane indicate in figura.
- b) Mostrare che, se all'istante $t = 0$

$$\varphi(0) = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = \omega$$

allora, quali che siano i valori di $\psi(0)$ e $\dot{\psi}(0)$, esiste una costante positiva ω_0 ed una funzione $F(\omega)$ tali che

$$|\varphi(t)| \leq F(\omega) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{se } |\omega| \leq \omega_0$$

Determinare inoltre ω_0 e $F(\omega)$ in modo ottimale.

(Suggerimento: far vedere prima che $\varphi(t)$ è la soluzione di un problema unidimensionale conservativo)

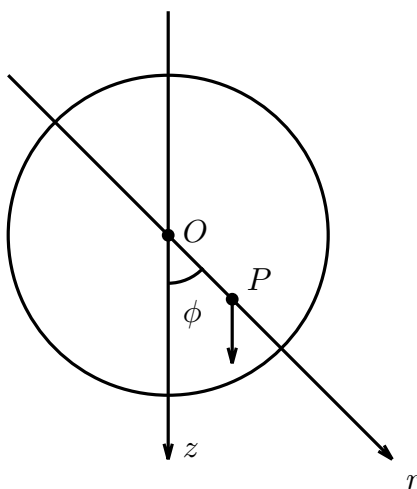
- 2) Si scriva la soluzione generale dell'equazione dell'oscillatore forzato:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + x = \mu \cos t + \sin(2t)$$

Si dica poi se è possibile scegliere $\mu \neq 0$ in funzione di λ , così che $\sup_{t \geq 0} |x(t)|$ è uniformemente limitato per $\lambda \rightarrow 0$.

Compito di esonero di Meccanica Razionale del 2 marzo 1990
Università dell'Aquila

Un disco omogeneo di massa M e raggio R è vincolato a muoversi in un piano verticale con il centro O fisso. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su di una retta r , solidale con il disco e passante per il suo centro, soggetto, oltre che alla forza peso, ad una forza elastica di costante di richiamo k , diretta verso O .



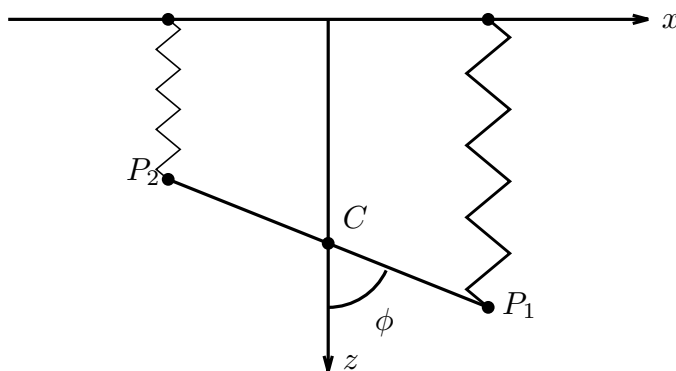
- a) Scrivere la lagrangiana del sistema, usando come variabili lagrangiane l'angolo ϕ che la retta r forma con l'asse z e l'ascissa di P su r .
- b) Calcolare la soluzione corrispondente alle condizioni iniziali

$$\phi(0) = \dot{\phi}(0) = r(0) = \dot{r}(0) = 0$$

- c) Trovare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
- d) Studiare le piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile.

Compito di esonero di Meccanica Razionale del 25 maggio 1990
Università dell'Aquila

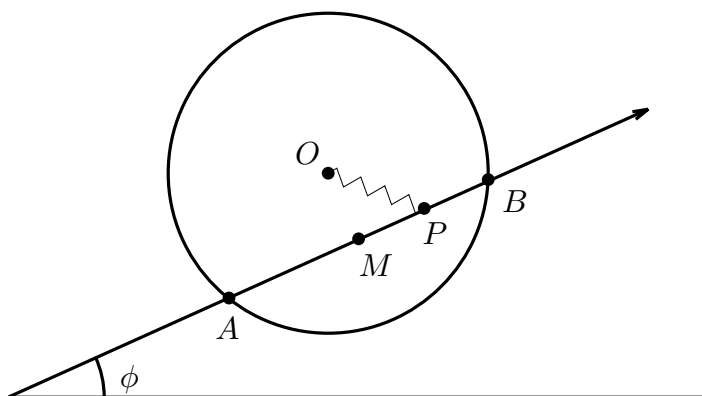
Una sbarretta di lunghezza $2l$ è vincolata a muoversi nel piano xz con il centro vincolato all'asse z . I due estremi della sbarretta sono soggetti all'azione di due molle di costante di richiamo k , sempre dirette secondo la verticale. La metà della sbarretta compresa fra il centro C e l'estremo P_1 ha densità lineare costante μ_1 , l'altra metà ha densità $\mu_2 = \mu_1/2$.



- a) Scrivere la lagrangiana del sistema usando come variabili lagrangiane l'ascissa del centro C sull'asse z e l'angolo φ della figura.
- b) Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità in funzione del parametro $\alpha = mg/kl$ (g indica l'accelerazione di gravità).
- c) Trovare le frequenze dei modi normali in corrispondenza delle posizioni di equilibrio stabile.

Compito di Meccanica Razionale del 26 giugno 1990
Università dell'Aquila

Un'asta rigida di densità 1 e lunghezza L è vincolata ad un piano verticale. Gli estremi A e B sono inoltre vincolati a stare su di una circonferenza di lato $2R > L$. Un punto materiale di massa M è vincolato a stare sulla retta passante per AB . Su di esso agisce una molla di costante di richiamo k , fissata sull'altro estremo al centro O del cerchio. Sul sistema agisce la forza peso.



Fissate delle coordinate cartesiane sulla retta passante per AB con origine nel centro di massa M dell'asta, si scelgano come coordinate lagrangiane l'ascissa di P e l'angolo ϕ formato dalla retta passante per l'asta ed una retta orizzontale.

- a) Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- b) Si determinino dei valori dei parametri per cui esiste un'unica soluzione di equilibrio stabile e si studino le piccole oscillazioni intorno ad essa.

I Compito di esonero di Meccanica Razionale
6 Aprile 1993

Una particella di massa $m=1$, vincolata a muoversi su di una retta, è soggetta alla forza:

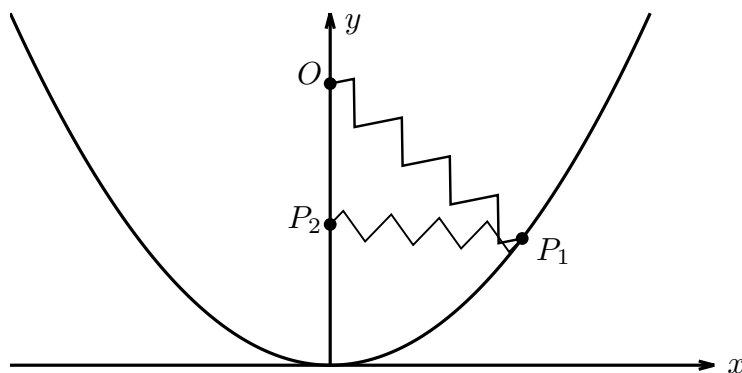
$$F(x, \dot{x}) = -3x^2 + \frac{14}{3}x - \lambda\dot{x} \quad , \quad \lambda \geq 0$$

- a) Per $\lambda = 0$, discutere qualitativamente il moto al variare dell'energia iniziale e dire per quali valori della velocità iniziale il moto è periodico se la particella parte dalla posizione $x = 1$.
- b) Per $\lambda = 0$ stimare, con un errore $< 60\%$, il periodo del moto della particella posta inizialmente in $x = 1$ con velocità nulla.
- c) Per $\lambda > 0$ e dati iniziali $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -2$, stimare dal basso e dall'alto il valore di $\lambda = \lambda_c$ tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\lambda_c}(t) = 0$.

II compito di esonero di Meccanica Razionale

11 maggio 1993

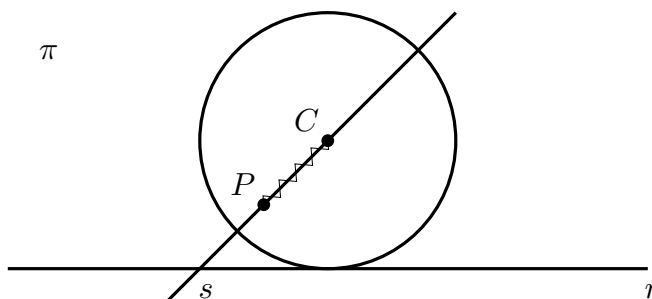
Una particella puntiforme di massa m è vincolata senza attrito alla parabola di equazione $y = x^2$, situata nel piano verticale xy . Una seconda particella, anch'essa di massa m , è vincolata senza attrito all'asse y ed è attirata verso il punto O dell'asse y , di ordinata d , mediante una forza elastica di costante di richiamo k . Le due particelle, inoltre, si attirano reciprocamente con una forza elastica di costante di richiamo ancora eguale a k .



- Scrivere la lagrangiana usando come variabili l'ordinata y di P_2 e l'ascissa x di P_1 (vedi figura).
- Studiare le posizioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione di d .
- Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio stabile, nel caso $d = 1/2$.

III Compito di Esonero di Meccanica Razionale
15 luglio 1993

Un sistema meccanico pesante, appartenente ad un piano verticale π , è costituito da un disco materiale omogeneo di centro C , raggio R e massa M , che rotola senza strisciare su di una retta orizzontale r del piano π , e da un punto materiale P di massa m , vincolato a muoversi su di una guida rettilinea s di massa trascurabile, sovrapposta ad un diametro del disco e solidale ad esso. Inoltre la guida s e la retta r possono intersecarsi liberamente ed il punto P è collegato al centro C del disco mediante una molla ideale di costante di richiamo k .

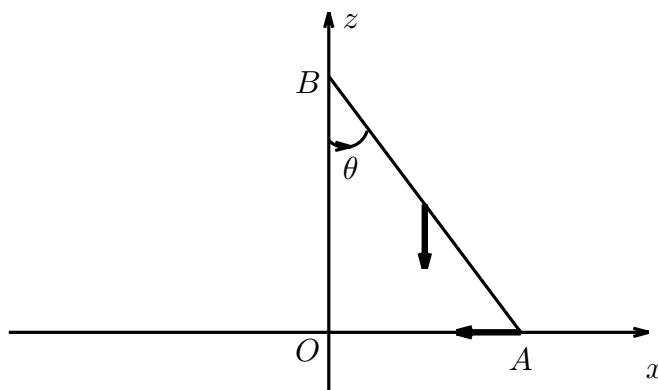


Si chiede di:

- a) scrivere la Lagrangiana del sistema e dedurre gli eventuali integrali primi;
- b) determinare le posizioni di equilibrio, discutendone la stabilità;
- c) scrivere l'Hamiltoniana del sistema nel caso in cui $M = 2m$ e $R = k = 1$.

Compito di Meccanica Razionale del 15 luglio 1993

1) Una sbarretta AB di lunghezza l e massa M ha gli estremi vincolati (con vincoli ideali) agli assi x e z (l'asse z è verticale). Il punto A è inoltre soggetto ad una forza elastica diretta verso l'origine O di costante di richiamo k .



- a) Scrivere l'equazione del moto per la variabile θ (vedi figura).
- b) Discutere, in funzione del parametro $\alpha = 2kl/Mg$ (g è l'accelerazione di gravità) e dell'energia E , le soluzioni dell'equazione da un punto di vista qualitativo e dare una descrizione del corrispondente moto della sbarretta.
- c) Sia $\alpha = 1/2$; si dia una stima superiore ed inferiore del periodo del moto di dati iniziali

$$\theta(0) = \frac{3\pi}{4} \quad , \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

2) Si consideri la trasformazione

$$Q = -\arctan \frac{p}{2q}$$

$$\pi = q^2 + \alpha p^2$$

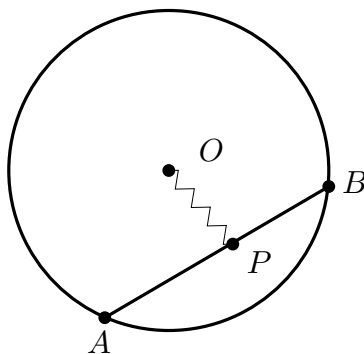
definita nell'insieme $\{q > 0, p > 0\}$.

Dimostrare che questa trasformazione è canonica per una scelta opportuna di α e scrivere, per tale valore, la trasformazione inversa.

Compito di Meccanica Razionale del 7 ottobre 1993

Un'asta rigida omogenea di densità ρ e lunghezza L è vincolata ad un piano verticale. I suoi estremi A e B sono inoltre vincolati a stare su di una circonferenza fissa di diametro $2R > L$. Un punto materiale P di massa m è vincolato a stare sull'asta; su di esso agisce una molla di costante di richiamo k fissata sull'altro estremo al centro O della circonferenza.

Si determinino i valori dei parametri per cui esiste un'unica posizione di equilibrio stabile del sistema e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno ad essa.



I compito di esonero di Meccanica Razionale
25 marzo 1994

Si consideri il moto $x = x(t)$ descritto dall'equazione differenziale

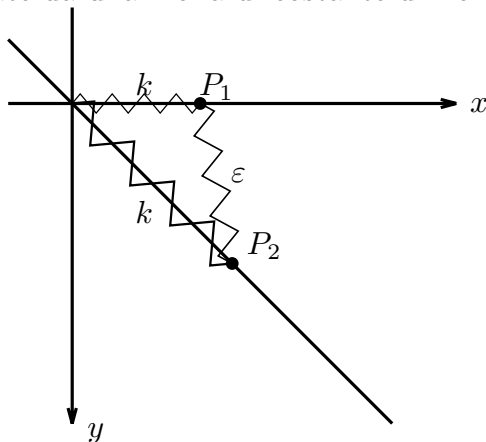
$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + (1 - \varepsilon)x + \varepsilon x^3 = 0 \quad , \quad x(0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(0) = v_0$$

- 1) Studiare qualitativamente il moto nel caso $\lambda = 0, \varepsilon = 0$, determinando, per ogni ε , per quali valori di x_0 e v_0 il moto non è periodico (considerando periodici anche gli stati di equilibrio).
- 2) Nel caso $\lambda = 0, \varepsilon = 3, x_0 = 1, v_0 = 0$, stimare il periodo di oscillazione a meno del 50%.
- 3) Nel caso $\lambda = 5, \varepsilon = 0, x_0 = 1$, dire per quali valori di v_0 è soddisfatta la proprietà $\{x(t) > 0 \text{ per ogni } t > 0 \text{ finito}\}$.
- 4) Nel caso $\lambda = 1, \varepsilon = 4, x_0 = \sqrt{3}/2, v_0 = -5/4$, dimostrare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$$

II compito di esonero di Meccanica Razionale
6 maggio 1994

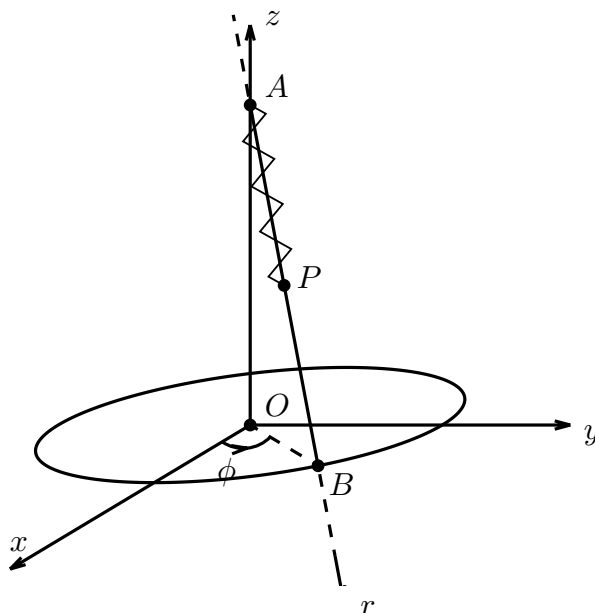
Due particelle puntiformi pesanti P_1 e P_2 di massa m sono vincolate a muoversi in un piano verticale. Inoltre P_1 è vincolata all'asse x , mentre P_2 è vincolata alla bisettrice degli assi. P_1 e P_2 sono attratte da due molle di costante di richiamo k verso l'origine O ; inoltre le due particelle sono collegate da una molla di costante di richiamo ϵ .



- 1) Mostrare che esiste una sola posizione di equilibrio e discuterne la stabilità.
- 2) Far vedere che la soluzione generale delle equazioni del moto si può esprimere in termini di oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio, utilizzando la teoria dei modi normali, e scrivere la soluzione stessa.
- 3) Indicare quali sono le posizioni iniziali che caratterizzano i modi normali, se le velocità iniziali sono nulle e $\epsilon > 0$. Cosa cambia se $\epsilon = 0$?
- 4) Calcolare la reazione vincolare sulla particella P_1 nello stato di equilibrio.

III compito di esonero di Meccanica Razionale 31 maggio 1994

Una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza L ha un estremo A fissato in un punto dell'asse z positivo, mentre l'altro estremo B è vincolato a muoversi nel piano xy lungo la circonferenza di raggio $L/2$ con centro nell'origine O .



Una particella P di massa m è vincolata a muoversi lungo la retta r passante per gli estremi della sbarretta ed è soggetta (oltre che alla forza peso) ad una forza elastica di costante di richiamo k con centro in A .

- a) Scrivere la lagrangiana nelle variabili s (ascissa sulla retta r orientata come in figura e origine in A) e ϕ (angolo fra $\vec{OB}$ e l'asse x) e determinare le posizioni di equilibrio.
- b) Scrivere l'Hamiltoniana.
- c) Far vedere che esistono due integrali primi e interpretare questo risultato in termini dell'equazione di Hamilton-Jacobi.
- d) Mostrare che tutti i moti sono limitati.
- e) Far vedere che esistono moti tali che $s(t)$ è costante e positivo.

Compito di Meccanica Razionale del 15 giugno 1994

- 1) Una particella puntiforme di massa m si muove nel piano sotto l'azione di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(r) = -\frac{g}{r^{3/2}}$$

essendo r la distanza dall'origine.

Si supponga che, all'istante $t = 0$, indicando con θ l'angolo polare rispetto all'origine:

$$r(0) = r_0 \quad \dot{\theta}(0) = 1 \quad \dot{r}(0) = v_0$$

Si chiede:

- 1) Per quali valori di r_0 e v_0 il moto è quasi periodico?
- 2) Mostrare che è possibile scegliere r_0 e v_0 in modo che la particella si muova nel piano su di una circonferenza con centro nell'origine e calcolare la velocità angolare in tale situazione.

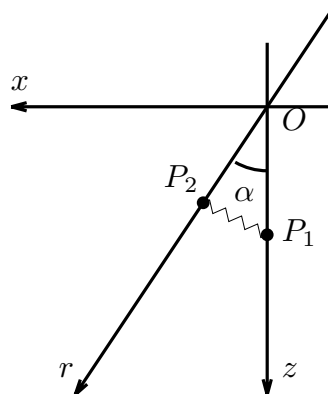
- 2) La Lagrangiana della trottola simmetrica con baricentro fisso è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

- 1) Scrivere l'Hamiltoniana del sistema.
- 2) Risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi e scrivere in forma implicita la soluzione generale delle equazioni del moto nelle variabili θ, ϕ, ψ , usando la trasformazione canonica appena trovata.

Compito di Meccanica Razionale del 27 settembre 1994

1) Due particelle puntiformi P_1 e P_2 di massa m sono vincolate a muoversi nel piano verticale xz ; P_1 è inoltre vincolata all'asse z , mentre P_2 è vincolata alla retta r che passa per l'origine O e forma un angolo α con l'asse z . Le due particelle sono collegate da una molla di costante di richiamo k .



All'istante $t = 0$ le due particelle si trovano in O con velocità nulla. Calcolarne la posizione all'istante t generico.

2) Si consideri la trasformazione:

$$\begin{aligned} Q &= p^{1/2} q^{3/2} \\ \Pi &= p^{1/2} q^{-1/2} \end{aligned}$$

definita nell'insieme $\{q > 0, p > 0\}$.

Si dimostri che questa trasformazione è canonica e si calcoli la funzione generatrice $S(q, \Pi)$ che la genera.

Compito di Meccanica Razionale del 20 febbraio 1995

- 1) Una particella puntiforme di massa $m = 1$, vincolata all'asse x , si muove sotto l'azione di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = x^4 + \alpha x^2 \quad , \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

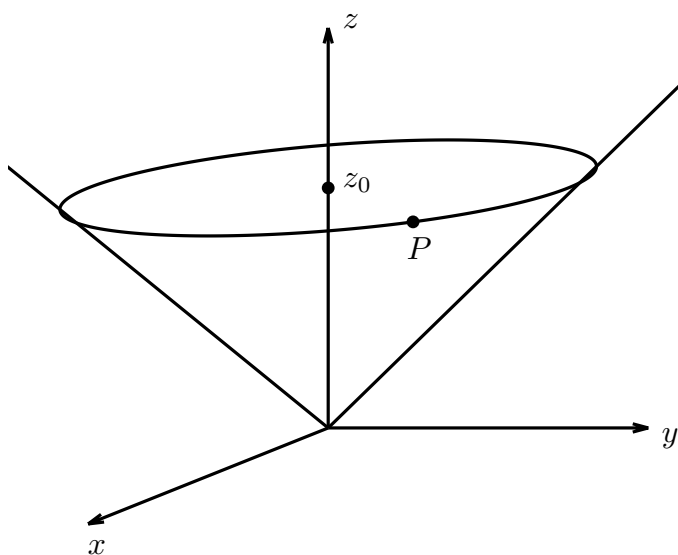
Si discutano le proprietà qualitative del moto di dati iniziali:

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

al variare di α .

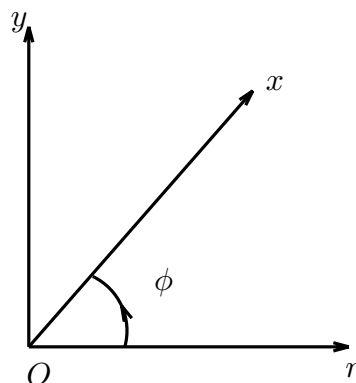
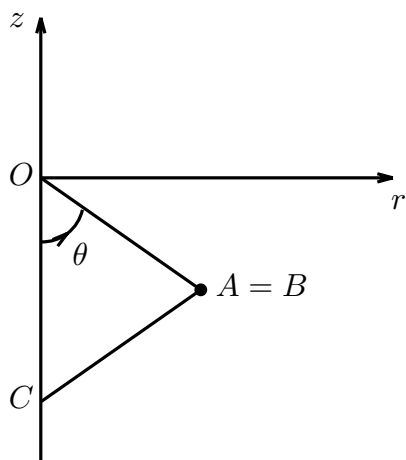
- 2) Una particella di massa m è vincolata alla superficie di un cono senza attrito con angolo di apertura eguale a 45 gradi, con il vertice nell'origine delle coordinate e l'asse coincidente con l'asse z positivo.

- 1) Dare una descrizione qualitativa dei moti del sistema.
- 2) Mostrare che, dato comunque $z_0 > 0$, esiste un moto che si svolge sulla circonferenza $z = z_0$ con velocità angolare costante.



II compito di esonero di Meccanica Razionale II modulo
4 giugno 1999

Due sbarrette omogenee OA e BC , ambedue di massa M e lunghezza L , sono vincolate a muoversi in un piano verticale rz (z è l'asse diretto come la verticale). Inoltre i punti A e B coincidono, O è vincolato all'origine delle coordinate e C è vincolato all'asse z .



- a) Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate gli angoli θ e ϕ .
- b) Scrivere la Hamiltoniana corrispondente e le equazioni di Hamilton.
- c) Dimostrare che esistono soluzioni della forma

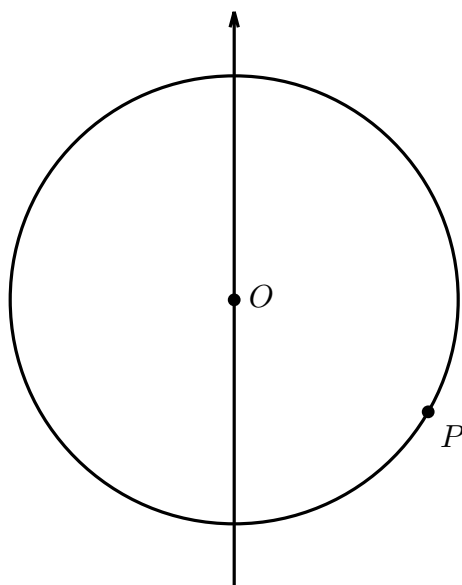
$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta_0 \\ \dot{\phi}(t) &= \omega_0\end{aligned}$$

e calcolare i corrispondenti valori di θ_0 e ω_0 .

- d) Dimostrare che, se $0 < \theta(0) < \pi$ e $\dot{\phi}(0) \neq 0$, $\theta(t)$ è una funzione periodica con valori in un intervallo $[\theta_1, \theta_2]$, $0 < \theta_1 \leq \theta_2 < \pi$.

Prova scritta del II modulo di Meccanica Razionale
16 giugno 1999

Una circonferenza rigida di massa M e raggio R è vincolata a muoversi con il centro nel punto fisso O ed un diametro sempre verticale. Una particella puntiforme P di massa m è vincolata a muoversi sulla circonferenza. Tutti i vincoli si suppongono ideali.



- a) Scegliere le coordinate lagrangiane e scrivere le corrispondenti Lagrangiana ed Hamiltoniana.
- b) Dimostrare che esistono moti tali che la circonferenza ruota con velocità angolare costante intorno al diametro fisso, con la particella ferma rispetto alla circonferenza. Trovare tutte le posizioni della particella in tali moti.

I Compito di esonero di MECCANICA RAZIONALE, I modulo
18 Aprile 2000

Una particella di massa $m=1$, vincolata a muoversi su di una retta, è soggetta alla forza:

$$F(x, \dot{x}) = -3x^2 + \frac{14}{3}x - \lambda\dot{x} \quad , \quad \lambda \geq 0$$

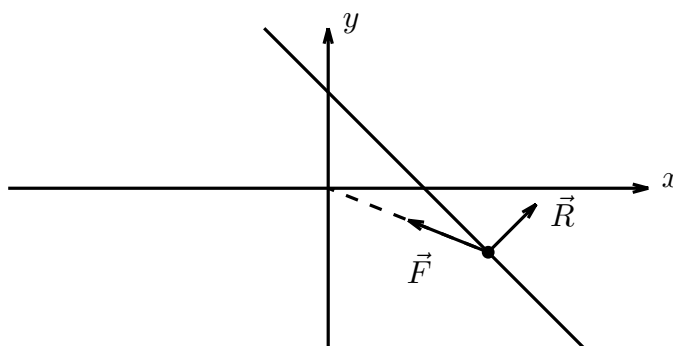
- a) Se $\lambda = 0$ e $x(0) = 1$, discutere qualitativamente il moto al variare dell'energia iniziale e dire per quali valori di $v_0 = \dot{x}(0)$ il moto è periodico.
- b) Se $\lambda = 0$, $x(0) = 1$ e $v_0 = 0$, stimare il periodo del moto della particella, con una precisione di almeno il 60 %.
- c) Se $\lambda > 0$, $x(0) = 1$ e $v_0 = -2$, stimare dal basso e dall'alto il valore di $\lambda = \lambda_c$ tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

II Compito di esonero di MECCANICA RAZIONALE, I modulo
31 maggio 2000

Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla retta $x + y = 1$ del piano orizzontale xy , in assenza di attrito, soggetta alla forza

$$\vec{F} = -K \frac{\vec{r}}{r^3},$$

dove $\vec{r}$ è il vettore che congiunge l'origine con la posizione della particella e $r = |\vec{r}|$.



Si supponga che, all'istante $t = 0$, la particella occupi la posizione $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$ con velocità (compatibile con il vincolo) $(v_0, -v_0)/\sqrt{2}$.

- a) Si dia una descrizione qualitativa del moto, al variare di v_0 .
- b) Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni nell'intorno dell'unica posizione di equilibrio.
- c) Si calcoli la reazione vincolare, in corrispondenza di un moto qualunque.

Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, I modulo
13 giugno 2000

Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla curva $y = -x^2/2 + x^4/4$ del piano verticale xy , in assenza di attrito, soggetta alla forza peso.

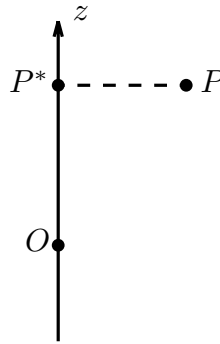
- a) Si dia una descrizione qualitativa di tutti i moti della particella.
- b) Si scriva una rappresentazione integrale del periodo, nel caso in cui il moto è periodico.
- c) Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni nell'intorno delle posizioni di equilibrio stabile.
- d) Si calcoli la reazione vincolare, in corrispondenza di un moto qualunque.

Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, I modulo
12 settembre 2000

Una particella di massa m si muove nello spazio soggetta ad una forza della forma

$$\vec{F} = f(\rho) \overrightarrow{P^*P}$$

dove P indica la posizione della particella, P^* la sua proiezione sull'asse z e $\rho = |\overrightarrow{P^*P}|$.



- a) Si dimostri che la forza è conservativa e che, oltre all'energia, si conservano le componenti lungo l'asse z della quantità di moto e del suo momento rispetto all'origine degli assi.
- b) Si dia una descrizione qualitativa di tutti i moti della particella, nel caso in cui

$$f(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}$$

Si suggerisce di studiare il moto in coordinate cilindriche:

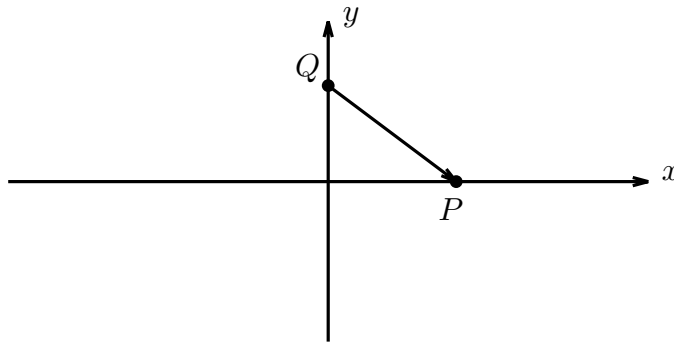
$$\overrightarrow{OP} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, I modulo
26 settembre 2000

Una particella di massa m è vincolata a muoversi sull'asse x in assenza di attrito ed è soggetta ad una forza centrale con centro nel punto $Q = (0, y_0, 0)$ e potenziale

$$V(\rho) = \frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{2}\rho^2$$

dove $\rho = |\overrightarrow{PQ}|$, se P indica la posizione della particella.



- a) Si dia una descrizione qualitativa di tutti i moti della particella, al variare di y_0 .
- b) Cosa succede, se è presente un attrito lineare?

II compito di esonero di Meccanica Razionale, II modulo
9 gennaio 2001

La Lagrangiana della trottola simmetrica col baricentro fisso è eguale a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

- a) Scrivere l'Hamiltoniana del sistema e le equazioni di Hamilton.
- b) Risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi e scrivere in forma implicita la soluzione generale delle equazioni del moto nelle variabili θ, ϕ, ψ , usando la trasformazione canonica appena trovata.
- c) Determinare esplicitamente la soluzione corrispondente ai dati iniziali

$$\dot{\phi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 1$$

$$\psi(0) = \psi_0, \quad \phi(0) = \phi_0, \quad \theta(0) = \theta_0$$

Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, I modulo
29 gennaio 2001

Una particella di massa $m = 1$ è vincolata a muoversi sul ramo di iperbole di equazione

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

del piano orizzontale xy , in assenza di attrito, ed è soggetta ad una forza centrale con centro nell'origine di potenziale

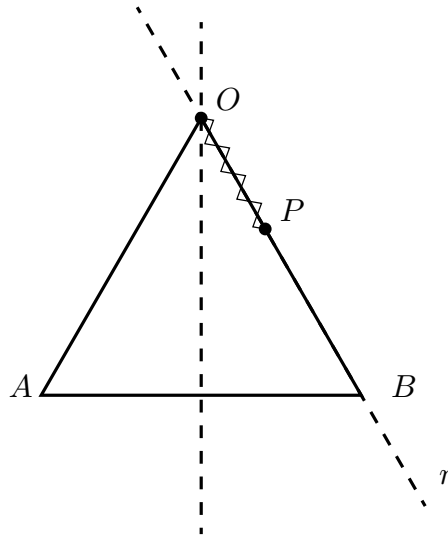
$$V(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

All'istante $t = 0$ la particella si trova nel punto di coordinate $x(0) = y(0) = 1$ e la componente lungo l'asse x della velocità, $\dot{x}(0)$, è uguale a $v_0 \geq 0$.

Si dia una descrizione qualitativa del moto della particella al variare di v_0 in $[0, \infty)$.

Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, II modulo
29 gennaio 2001

Una triangolo equilatero di lato l e densità ρ è vincolato a muoversi intorno ad un asse verticale passante per il vertice O ed ortogonale al lato opposto AB . Una particella puntiforme di massa m è vincolata a muoversi sulla retta r passante per OB ed è soggetta ad una forza elastica di costante di richiamo k diretta verso il punto O . Tutti i vincoli si suppongono ideali.



- a) Scegliere le coordinate lagrangiane e scrivere le corrispondenti Lagrangiana ed Hamiltoniana.
- b) Dimostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi può risolversi per separazione delle variabili.
- c) Dimostrare che esistono moti tali che il triangolo ruota con velocità angolare costante, con la particella ferma rispetto al triangolo.

Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, I modulo
26 febbraio 2001

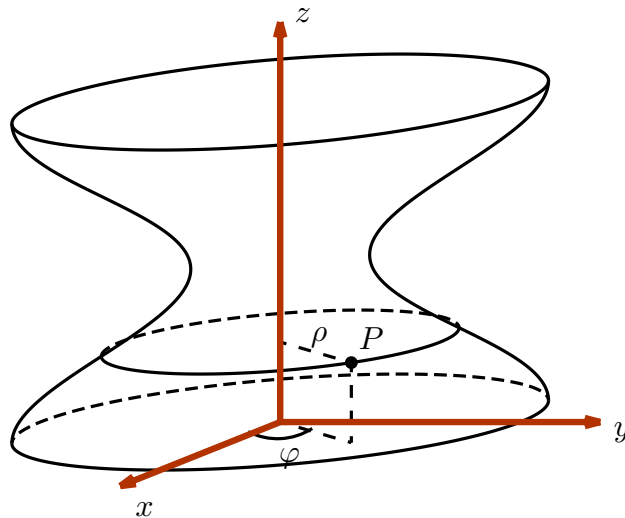
Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla curva $y = x^2 e^{-x}$ del piano verticale xy , soggetta alla forza peso ed in assenza di attrito.

- a) Scrivere la condizione di conservazione dell'energia in termini di $x(t)$ e $\dot{x}(t)$.
- b) Usare l'espressione precedente per trovare i moti periodici e calcolarne il periodo (in forma integrale).
- c) Dimostrare che c'è una sola posizione di equilibrio stabile e calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni nell'intorno di tale posizione.
- d) Dare una descrizione qualitativa dei moti non periodici.

Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, II modulo
26 febbraio 2001

Una particella pesante di massa m è vincolata senza attrito alla superficie di rotazione d'asse verticale z , descritta in coordinate cilindriche dall'equazione:

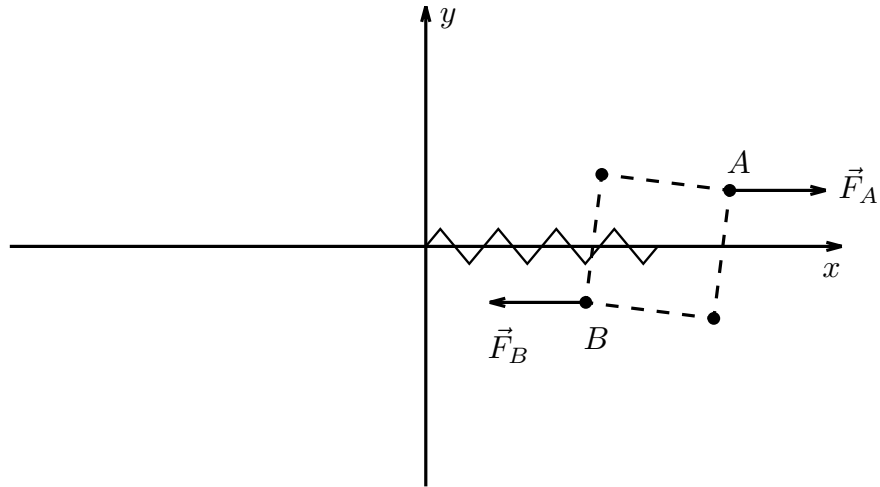
$$\rho = 2 + \cos z$$



- a) Mostrare che ci sono due integrali primi ed usare questo risultato per ridurre alle quadrature le equazioni del moto.
- b) Dimostrare in particolare che esistono moti tali che la particella si muove con velocità angolare costante su di un cerchio ottenuto intersecando la superficie con un piano parallelo al piano xy (di altezza opportuna).

II compito di esonero di MECCANICA RAZIONALE, I modulo
4 giugno 2001

Un sistema rigido formato da 4 punti materiali di massa m posti ai vertici di un quadrato di lato L è vincolato a muoversi nel piano xy con il baricentro vincolato all'asse x .



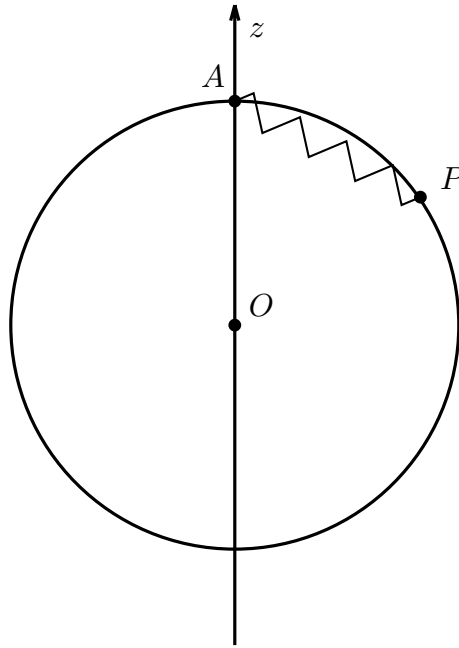
Il baricentro è attirato verso l'origine da una forza elastica di costante di richiamo k . Sugli estremi A e B di una delle due diagonali agiscono due forze parallele all'asse x

$$\vec{F}_A = (Fx_A, 0), \quad \vec{F}_B = (-Fx_B, 0), \quad F > 0$$

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.
2. Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Nel caso in cui anche i punti A e B siano vincolati all'asse x , mostrare che tutti i moti sono periodici (eccetto quelli corrispondenti agli stati di equilibrio) e calcolarne il periodo.

Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, II modulo
6 giugno 2001

Una circonferenza omogenea di raggio R e densità ρ è vincolata a muoversi intorno all'asse verticale z passante per il suo centro, che coincide con l'origine O del sistema di riferimento. Una particella puntiforme di massa m è vincolata a muoversi sulla circonferenza ed è soggetta ad una forza elastica di costante di richiamo k , diretta verso l'intersezione A della circonferenza con il semiasse z positivo. Tutti i vincoli si suppongono ideali.



- a) Scegliere le coordinate lagrangiane e scrivere le corrispondenti Lagrangiana ed Hamiltoniana.
- b) Trovare gli stati di equilibrio del sistema.
- c) Dimostrare che esistono moti tali che la circonferenza ruota con velocità angolare costante, con la particella ferma rispetto ad essa.

Prova scritta di Meccanica Razionale per Matematici, I modulo
13 Giugno 2001

Un sistema meccanico pesante, appartenente al piano verticale Oxy (x orizzontale, y verticale discendente), è costituito da due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m .

P_1 e P_2 sono collegati mediante una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla; inoltre su $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ agisce una forza

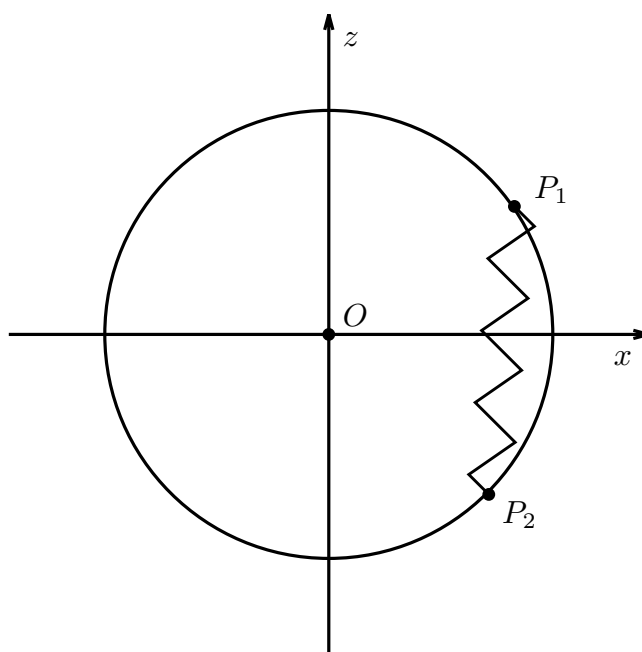
$$\underline{F} \equiv (-\mu x_1^2, 0), \quad \mu \geq 0.$$

P_1 è vincolato all'asse x mentre P_2 è vincolato alla circonferenza di centro O e raggio R . Supponendo assente ogni attrito si risponda alle seguenti domande:

- 1) Nel caso $\mu = 0$ (assenza della forza $\underline{F}$) scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- 2) Sempre nel caso $\mu = 0$, si supponga $kR = 2mg$. Determinare le posizioni di equilibrio, discutendone la stabilità .
- 3) Sia $\mu > 0$. Si supponga ora di introdurre l'ulteriore vincolo consistente nel fissare P_2 sull'asse y al di sotto di O . Caratterizzare la totalità dei dati iniziali cui fanno seguito moti periodici.
- 4.) Nelle ipotesi del punto 2) calcolare le reazioni vincolari all'equilibrio.

Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, II modulo
11 luglio 2001

Due particelle puntiformi di massa m sono vincolate ad una circonferenza verticale di raggio R e sono collegate con una molla di costante di richiamo k . Tutti i vincoli si suppongono ideali.



- a) Scegliere le coordinate lagrangiane e scrivere le corrispondenti Lagrangiana ed Hamiltoniana.
- b) Trovare gli stati di equilibrio del sistema.

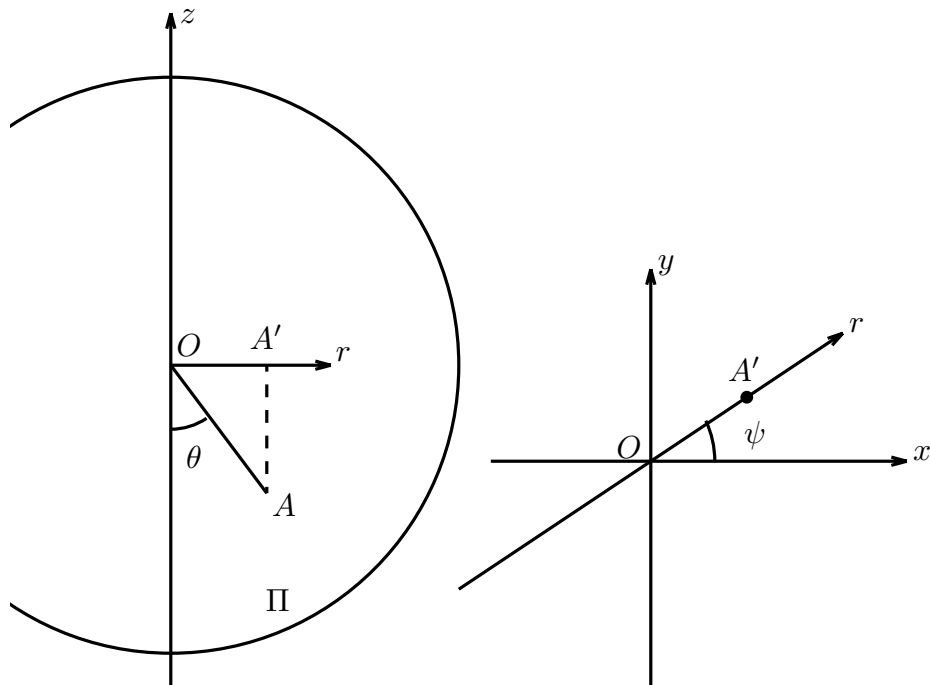
Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, II modulo
19 settembre 2001

Una particella puntiforme di massa m è vincolata ad una superficie sferica di raggio R con centro nell'origine delle coordinate, soggetta alla forza peso e ad una forza di richiamo elastica di costante K diretta verso il polo nord della sfera (intersezione della sfera con il semiasse z positivo).

- a) Scegliere le coordinate lagrangiane e scrivere le corrispondenti Lagrangiana ed Hamiltoniana.
- b) Dare una descrizione qualitativa dei moti, distinguendo i seguenti due casi:
 - b1) La velocità iniziale della particella è parallela al piano passante per la posizione iniziale e l'asse z .
 - b2) La velocità iniziale della particella ha una componente non nulla perpendicolare al piano passante per la posizione iniziale e l'asse z .

I compito di esonero di Meccanica Razionale, II modulo
26 novembre 2001

Un disco omogeneo di raggio R e massa M è vincolato a muoversi con un suo diametro fisso sull'asse verticale z . Una sbarretta omogenea di massa m e lunghezza $l < R/2$ è vincolata a muoversi sul piano Π del disco in modo che, se O è il centro del disco, un estremo della sbarretta coincide con O . Tutti i vincoli sono da supporre ideali.



- a) Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate gli angoli θ e ψ della figura.
- b) Trovare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
- c) Indicare delle condizioni iniziali cui fa seguito un moto periodico del sistema.

II compito di esonero di Meccanica Razionale, II modulo
9 gennaio 2002

Una particella di massa m si muove nel piano (x, y) sotto l'azione di una forza di potenziale

$$V(x, y) = -\frac{k}{\rho} \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \, .$$

Si scriva l'Hamiltoniana in coordinate polari e si determini, utilizzando il metodo di Hamilton-Jacobi, la soluzione delle equazioni di Hamilton, che soddisfa le condizioni

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty \quad , \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = b > 0 \, ,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{x}(t) = v_0 > 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{y}(t) = 0 \, .$$

Compito scritto di Meccanica Razionale, II modulo
19 febbraio 2002

Un sistema rigido formato da 3 punti materiali di massa m posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato L è vincolato a muoversi nel piano xy con il baricentro vincolato all'asse x .

Il baricentro è attirato verso l'origine da una forza elastica di costante di richiamo k . I tre punti sono soggetti ad una forza $\vec{F}$, indipendente dalla posizione e parallela all'asse x .

- a) Scegliere delle variabili lagrangiane e scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana corrispondenti.
- b) Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
- c) Mostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi è risolubile per separazione delle variabili e calcolare le variabili azione-angolo.

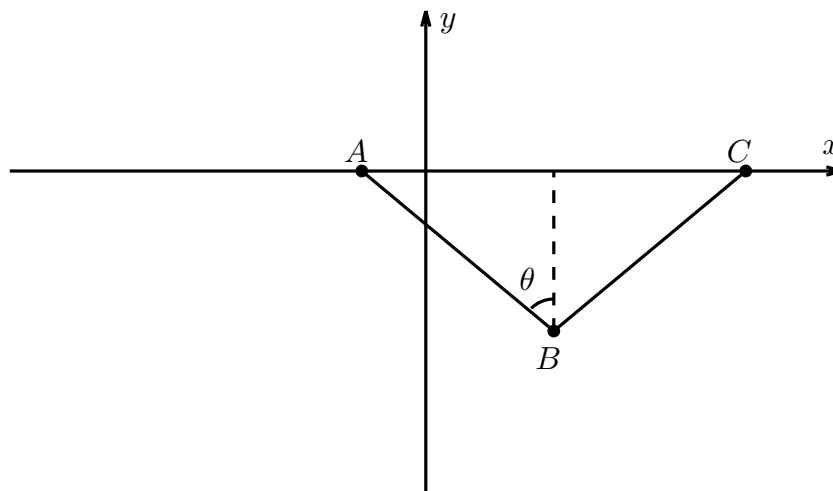
Compito scritto di Meccanica Razionale, II modulo
20 giugno 2002

Una sbarretta rigida omogenea AB di lunghezza l e massa m si muove in un piano verticale con l'estremo A vincolato a muoversi sull'asse x con velocità assegnata $\vec{v}_A(t)$.

- a) Scegliere la variabile lagrangiana e scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana corrispondenti.
- b) Dare una descrizione qualitativa dei moti nel caso in cui $\vec{v}_A(t)$ è costante.
- c) Dare una descrizione qualitativa dei moti nel caso in cui $\frac{d}{dt}\vec{v}_A(t)$ è costante.

Compito scritto di MECCANICA RAZIONALE, II modulo
26 settembre 2002

Due sbarrette omogenee di lunghezza l e massa m sono vincolate a muoversi in un piano verticale xz , con un estremo vincolato all'asse x e l'altro estremo in comune. Tutti i vincoli si suppongono ideali.



- a) Scegliere come coordinate lagrangiane l'ascissa del punto A e l'angolo θ che la sbarretta AB forma con la verticale; scrivere quindi la corrispondente Lagrangiana.
- b) Si imponga l'ulteriore vincolo che il punto A si muove lungo l'asse x con velocità data v_0 e scrivere la Hamiltoniana corrispondente.
- c) Dare, nel secondo caso, una descrizione qualitativa dei moti in termini delle variabili θ e p_θ (il momento coniugato a θ).