Analogamente,

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-6\\-4\\-4\end{pmatrix}$$

12. (a) La matrice associata alla trasformazione lineare $T$ rispetto alle basi canoniche è semplicementre

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & -5\end{pmatrix}$$

cioé la matrice dei coefficienti delle espressioni che definiscono $T$.

(b) La matrice che rappresenta l'identità con la base $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ come base dello spazio $\mathbb{R}^3$ in partenza e la base canonica come base dello spazio $\mathbb{R}^3$ di arrivo è

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

La matrice che rappresenta l'identità con la base $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ come base dello spazio $\mathbb{R}^2$ in partenza e la base canonica come base dello spazio $\mathbb{R}^2$ di arrivo è

$$C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

e dunque la matrice che rappresenta l'identità con la base canonica come base dello spazio $\mathbb{R}^2$ in partenza e la base $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ come base dello spazio $\mathbb{R}^2$ di arrivo è

$$C^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

La matrice che rappresenta la trasformazione lineare $T$ rispetto alla la base $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ come base dello spazio $\mathbb{R}^3$ in partenza e alla base $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ come base dello spazio $\mathbb{R}^2$ di arrivo è pertanto

$$C^{-1}AB=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-36 & 34 & 26\\ -50 & 39 & 37\end{pmatrix}$$

**Le soluzioni dei rimanenti esercizi compariranno nei prossimi giorni**

prima riga di $T$ segue che, se un vettore sta in $\ker T$, allora le sue coordinate devono soddisfare, in particolare, $x = z$).

10. La matrice che rappresenta l'identità con la base $\mathcal{B}$ come base dello spazio in partenza e la base canonica come base dello spazio di arrivo è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice che rappresenta l'identità con la base canonica come base dello spazio in partenza e la base $\mathcal{B}$ come base dello spazio di arrivo è

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $L_A$ con la base $\mathcal{B}$ come base sia dello spazio in partenza che dello spazio di arrivo è

$$B^{-1}AB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

11. Si ha

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= T\left(1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 1 \cdot T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - 1 \cdot T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 1 \cdot T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un altro modo di svolgere l'esercizio è il seguente. Poiché sappiamo come agisce $T$ sulla base canonica di $\mathbb{R}^3$, possiamo scrivere

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+z \\ x+y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}$$

e dunque

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice che rappresenta la trasformazione lineare $T$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

L'immagine di $T$ è pertanto generate dai tre vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Estraiamo da questi una base di Im$T$ mediante il metodo dell'eliminazione gaussiana. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque una base è costituita dai primi due vettori: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Per stabilire quali vettori della lista staino nell'immagine di $T$ e quali no, conviene scrivere l'equazione cartesiana per Im$T$. Un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sta in Im$T$ se e solo se è linearmente dipendente da $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, ovvero se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -2 & 2 & y \\ 0 & 2 & z \end{pmatrix} = 0$$

Esplicitamente, l'equazione cartesiana di Im$T$ è:

$$2x + y - z = 0$$

ed è immediato verificare che l'unico vettore della lista che appartiene all'immagine di $T$ è il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Un vettore $\vec{v}$ sta in $\ker T$ se e solo se $T(\vec{v}) = \vec{0}$. Calcolando esplicitamente $T(\vec{v})$ con $\vec{v}$ nella lista di vettori data, si vede immediatamente che nessuno dei vettori dati sta in $kerT$ (basta osservare che dalla

$L_C$ è l'applicazione lineare $L_C \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

$L_D$ è l'applicazione lineare $L_D \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$L_D \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

8. Dobbiamo verificare che, per ogni coppia di vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ di $\ker T$ e per ogni coppia di scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in \ker T$$

e che per ogni coppia di vettori $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ di $\mathrm{Im}T$ e per ogni coppia di scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in \mathrm{Im}T$$

Cominciamo con $\ker T$. Per definizione di nucleo di un'applicazione lineare, $T(\vec{v}_1) = T(\vec{v}_2) = \vec{0}$. Per la linerità di $T$, si ha

$$T(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_1) = \alpha T(\vec{v}_1) + \beta T(\vec{v}_2) = \vec{0}$$

Dunque

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in \ker T$$

come volevamo. Per quanto riguarda l'immagine di $T$, per definizione

$$\mathrm{Im}T = \left\{ \vec{w} \in W \quad \text{t.c.} \quad \vec{w} = T(\vec{v}), \quad \text{per qualche } \vec{v} \in V \right\}.$$

Dunque esistono $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ in $V$ tali che $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ e $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$. Per la linearità di $T$ si ha

$$\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 = \alpha T(\vec{v}_1) + \beta T(\vec{v}_2) = T(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2)$$

e dunque

$$\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in \mathrm{Im}T$$

come volevamo dimostrare.

9. (a) Si ha

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ -4 + 2 + 2 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In modo analogo,

$$T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ed il parametro $k$ viene determinato imponendo il passaggio per $P$:

$$2 - 1 - 3 = k$$

ovvero $k = -2$. L'equazione del piano $\pi$ è pertanto

$$x + y - z = -2.$$

6. L'espressione "su un campo $K$" è un residuo dei tempi in cui nel corso di geometria I si consideravano spazi vettoriali su anche su campi diversi dal campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali (ad esempio il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi). Per noi $K = \mathbb{R}$. Per verificare se un'applicazione $T\colon T \to T$ è lineare dobbiamo controllare che per ogni coppia di vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ di $V$ e per ogni coppia di scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si abbia

$$T(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha T(\vec{v}) + \beta T(\vec{v}).$$

Nel caso (a) si ha

$$\begin{aligned} T(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= 8 \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \\ &= \alpha \cdot 8 \cdot \vec{v} + \beta \cdot 8 \cdot \vec{v} = \alpha T(\vec{v}) + \beta T(\vec{v}). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il nucleo di $T$, abbiamo $T(\vec{v}) = \vec{0}$ se e solo se $8\vec{v} = \vec{0}$, ovvero se e solo se $\vec{v} = \vec{0}$. Ne segue che $T$ è iniettiva. Per studuiare la suriettività di $T$ consideriamo l'equazione

$$T(\vec{v}) = \vec{w}$$

ovvero l'equazione

$$8 \cdot \vec{v} = \vec{w}$$

Quest'equazione ha un'unica soluzione per ogni $\vec{w}$: la soluzione è infatti $\vec{v} = \frac{1}{8}\vec{w}$. Ne segue che $T$ è un'applicazione biiettiva, cioè iniettiva (questo già lo sapevamo) e suriettiva. la discussione dell'operatore $T(\vec{v}) = -\vec{v}$ è del tutto analoga.

7. $L_A$ è l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 \\ 4x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

$L_B$ è l'applicazione lineare $L_B\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$L_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

Per determinare la direzione della retta dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Si trova facilmente

$$\begin{cases} z = -\frac{2}{3}x \\ y = -x \end{cases}$$

dunque la direzione di $r$ è data dal vettore $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$. Si vede facilmente che i due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ non sono proporzionali e non individuano pertanto la stessa direzione: la retta $r$ non è ortogonale al piano $\pi$.

4. Dobbiamo verificare se le coordinate di $P$ soddisfano le equazioni cartesiane della retta $r$ o del piano $\pi$. Per quanto riguarda la retta $r$ troviamo

$$\begin{cases} 3 + 1 + 12 - 2 = 0 \\ 3 - 1 = 0 \end{cases}$$

che evidentemente non sono verificate: il punto $P$ non appartiene alla retta $r$. Per quanto riguarda il piano $\pi$ troviamo

$$6 - 1 + 12 = 5$$

Anche quest'equazione non è verificata, dunque il punto $P$ non appartiene neppure al piano $\pi$.

5. iniziamo col determinare la direzione ortogonale al piano $\pi$, ovvero la direzione della retta $r$. Dobbiamo risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0x - y = 0 \end{cases}$$

Si trova facilmente

$$\begin{cases} z = -xy = x \end{cases}$$

Dunque la direzione ortogonale al piano $\pi$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ne segue che l'equazione cartesiana di $\pi$ è del tipo

$$x + y - z = k,$$

2. Dobbiamo dimostrare che la direzione della retta $r$ appartiene alla direzione del piano $\pi$. La direzione $V$ della retta $r$ è data dalle soluzioni del sistema omogeneo
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$
mentre la direzione $W$ del piano $\pi$ è data dalle soluzioni dell'equazione omogenea
$$x - 3y + z = 0$$
Chiaramente si ha $V \subseteq W$ se e solo se il sistema
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$
ha uno spazio di soluzioni di dimensione uno, ovvero se e solo se il rango della matrice dei coefficienti del sistema
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
è uguale a due. Utilizziamo il metodo dell'eleminazione gaussiana:
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Dunque il rango della matrice dei coefficienti del sistema è uguale a tre: la retta ed il piano non sono paralleli ma incidenti.
3. Dobbiamo stabilire se la direzione della retta coincide con la direzione ortogonale al piano. poiché il piano $\pi$ è dato in forma cartesiana, la direzione ortogonale si trova immediatamente: è la direzione individuata dal vettore che ha per coordiante i coefficienti della parte omogenea dell'equazione che descrive il piano $\pi$; si tratta del vettore $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Facoltà di Ingegneria a.a 2002-2003

**GEOMETRIA 1** proff. Baldoni e Piacentini Cattaneo - 14 ottobre 2002

---

Rette e piani nel piano e nello spazio. Trasformazioni lineari e matrici associate. Nucleo e immagine.

---

**- Soluzioni -**

1. Dobbiamo trovare le direzioni delle due rette. Per quanto riguarda la prima, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e dunque la sua direzione è individuata dal vettore $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per detrminare la direzione della seconda retta, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato al sistema non omogeneo delle equazioni cartesiane di $s$:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Troviamo

$$\begin{cases} z = -3x \\ y = -x \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Il vettore direzione di $s$ è pertanto $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. I due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ non sono paralleli: infatti,

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

e dunque anche $r$ ed $s$ non sono parallele.