e

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix}\right)$$

ovvero ad un esercizio del tutto analogo a quelli già risolti.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}$$

Dunque i tre vettori sono lineramente indipendenti e sono una base del sottospazio U (che, avendo dimensione 3, coincide con tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$).

15. E' immediato osservare che sia U che V hanno dimensione 2. Avendo la stessa dimensione, per provare $U = V$ basta dimostrare $U \subseteq V$. Ma per mostrare quest'inclusione è sufficiente mostrare che i due generatori di U appartengono a V. Questo si riduce a mostrare che i due seguenti determinanti sono nulli:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0; \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

il che si verifica facilmente.

16. L'esercizio è del tutto analogo all'esercizio 1. Si osservi che nonostante le apparenze di un sistema di tre equazioni in tre incognite, la matrice del sistema le cui soluzioni costituiscono lo spazio W ha rango 1 e dunque si possono buttar via due delle tre equazioni (in effetti le tre equazioni sono tutte multipli scalari della prima). Infine una somma di sottospazi vettoriali è diretta se e solo se la loro intersezione si riduce al solo zero. In questo caso $\dim(U \cap W) = 1$ e dunque la somma non è diretta.

17. Utilizziamo l'isomorfismo canonico $M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ dato da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

a questo punto l'esercizio è stato ricondotto a studiare i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

11. a) Tutti i polinomi $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tali che $a_0 = 0$ formano un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathbb{R}_3[x]$ di tutti i polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Infatti l'equazione che caratterizza gli elementi di questo sottoinsieme è lineare omogenea. Una base di questo sottospazio è, ad esempio, $\mathcal{B} = \{x, x^2, x^3\}$.

    b) Tutti i polinomi $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ tali che $a_0+a_1+a_2+a_3 = 0$ formano un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathbb{R}_3[x]$ di tutti i polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Infatti l'equazione che caratterizza gli elementi di questo sottoinsieme è lineare omogenea. Una base di questo sottospazio è, ad esempio, $\mathcal{B} = \{1-x^3, x-x^3, x^2-x^3\}$.

    c) Tutti i polinomi $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ con $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$ non formano un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathbb{R}_3[x]$ di tutti i polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Infatti il sottoinsieme in questione non è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare. Ad esempio il polinomio 1 appartiene al sottoinsieme, ma se lo moltiplichiamo per $\frac{1}{2}$ otteniamo un polinomio ch enon è più nel sottoinsieme.

12. Vedi le soluzioni degli esercizi precedenti.

13. Un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ è lineramente indipendente da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ non appena

    $$\det \begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{pmatrix} \neq 0$$

    D'altronde, due vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^2$ sono un base e dunque la condizione scritta sopra è esattamente la condizione per cui il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ genera un sottospazio supplementare a Span $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Esplicitamente la condizione scritta sopra è $x + y \neq 0$. Due soluzioni distinte di questa disuguaglianza (ce ne sono infinite possibili) sono ad esempio $x = 1, y = 0$ e $x = 0, y = 1$.

14. Basta effettuare l'eliminazione gaussiana sulla matrice

    $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

    si ha

    $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice singolare è il vettore nullo; in questo caso (e solo in questo) le matrici singolari sono un sottospazio). Le due matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono chiaramente singolari, ma la loro somma è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ che è non singolare.

10. a) Tutte le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

non sono un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$. Infatti non si tratta di un insieme chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare. Ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è nell'insieme, ma $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no.

b) Tutte le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ a + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

sono un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$, in quanto la condizione che ne caratterizza gli element è un'equazione lineare omogenea. possimao anche dimostrare che si tratta di un sottospazio facendo vedere che si tratta di un sottoinsieme chiuso rispetto alle combinazioni linerari. Siano

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \ a_1 + d_1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \ a_2 + d_2 = 0,$$

e sia

$$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

una loro combinazione linerae. Questa apparterrà all'insieme che stiamo considerando se e solo se $a_3 + d_3 = 0$. Si ha:

$$\begin{aligned} a_3 + d_3 &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \\ &= \lambda_1(a_1 + d_1) + \lambda_2(a_2 + d_2) = 0. \end{aligned}$$

Una base di questo sottospazio è, ad esempio,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

7. a) Tutti i vettori della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ sono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ infatti se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ hanno entrambi la forma $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ anche la loro combinazione linerae $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ avrà quella forma:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una base di questo sottospazio è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) I vettori della forma $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Il modo più immediato di vederlo è osservare che il vettore $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è della forma $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

c) I vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, con $b = a + c + 1$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Il modo più immediato di vederlo è osservare che le coordinate del vettore $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ e dunque non soddisfano l'equazione $b = a + c + 1$.

8. Il sottoinsieme T dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ di tutte le matrici $n \times n$ non singolari non è un sottospazio di $M_n(\mathbb{R})$. infatti il vettore $\vec{0}$ corrisponde alla matrice le cui entrate sono tutte 0 e questa matrice è chiaramente singolare.

9. Il sottoinsieme S dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ di tutte le matrici $n \times n$ singolari non è un sottospazio di $M_n(\mathbb{R})$. In questo caso la risposta è un po' più difficile che nei casi precedenti perché il vettore $\vec{0}$ appartiene all'insieme in questione e dobbiamo fare un'analisi più raffinata. Mostreremo che l'insieme delle matrici singolari non è chiuso rispetto all'operazione di somma. Lo facciamo vedere per $n = 2$, il caso $n > 2$ essendo del tutto analogo (una curiosità: se $n = 1$ l'unica

L'equazione cartesiana (si tratta di una sola equazione in quanto W è un sottospazio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$ è

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 & x_4 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $x_1 - x_2 - x_4 = 0$.

3. Eseguiamo l'eliminazione gaussiana sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice ha rango 3: i generatori sono lineramente dipendenti. In particolare una base è costituita dai primi tre vettori 9quelli corrispondenti ai pivot).

4. L'esercizio si risolve in modo del tutto analogo all'esercizio 1. Per determinare se il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene all'intersezione $U \cap W$ basta verificare se le sue coordinate soddisfano o meno le equazioni del sistema che descrive $U \cap W$ in forma cartesiana. la risposta è no.
5. L'esercizio è del tutto analogo all'esercizio numero 4.
6. L'esercizio è del tutto analogo all'esercizio numero 4.

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}\lambda \\ \frac{5}{7}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3/7 \\ 5/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto $U \cap W$ ha dimensione 1 ed una base è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 3/7 \\ 5/7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. I tre vettori

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono lineramente indipendenti, in quanto il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

è uguale a 3. Questo fatto si vede facilmente osservando che la sottomatrice quadrate 3×3 in alto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero oppure mediante eliminazione gaussiana. Dunque v_1, v_2 e v_3 formano una base di W. Le equazioni parametriche per un vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ di W sono semplicemente

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \\ -a \\ b-c \end{pmatrix}$$

Dunque una base di W è costituita dai due vettori: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si ha

$$U + W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per estrarre da questo sistema di generatori una base di $U + W$ facciamo l'eliminazione gaussiana sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Dunque $U + W$ ha dimensione 3 ed una sua base è costituita dai primi tre vettori. Si osservi che poiché $U + W$ è un sottospazio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^3$ si ha in realtà $U + W = \mathbb{R}^3$ e dunque ogni base di $\mathbb{R}^3$ è anche una base di $U + W$.

Per determinare l'intersezione $U \cap W$ mettiamo a sistema l'equazione cartesiana di U con quella di W. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolviamolo mediante eliminazione gaussiana:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/7 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/7 & 0 \\ 0 & 1 & -5/7 & 0 \end{array}\right)$$

Ritraducendo questa matrice in un sistema omogeneo troviamo

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{7}x_3 \\ x_2 = \frac{5}{7}x_3 \end{cases}$$

Facoltà di Ingegneria a.a 2002-2003

GEOMETRIA 1 proff. Baldoni e Piacentini Cattaneo - 21 ottobre 2002

Spazi e sottospazi vettoriali. Equazioni cartesiane e parametriche per un sottospazio. Appartenenza di un vettore ad un sottospazio. Intersezioni e somme di sottospazi. Dimensione e basi di uno spazio vettoriale e di un suo sottospazio.

1. Cominciamo con l'estrarre una base dai generatori di U mediante eliminazione gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque U ha dimensione 2 ed una sua base è costituita dai primi due vettori: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. A questo punto è semplice ottenere l'equazione cartesiana di U. Si tratta dell'equazione

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 3 & x_3 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. La dimensione di W può essere calcolata immediatamente mediante il teorema di Rouché-Capelli: W ha dimensione $3 - 1 = 2$. Per determinare una base di W dobbiamo risolvere l'equazione $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ in forma parametrica. Otteniamo $x_2 = -3x_1 + 2x_3$ ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -3\lambda + 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$