*ii)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad A|b = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*iii)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad A|b = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$(5-\alpha-beta)\vec{i}+(3-\alpha+2\beta)\vec{j}=0$$

Ma $\{\vec{i},\vec{j}\}$ è una base, dunque deve essere

$$\begin{cases} 5-\alpha-\beta=0 \\ 3-\alpha+2\beta=0 \end{cases}$$

e quindi $\alpha=\frac{13}{3};\beta=\frac{2}{3}$.

(8) Si tratta di un esercizio completamente analogo all'esercizio (7). La soluzione del punto b) in questo caso è $\alpha=\frac{3}{14};\beta=\frac{5}{14}$, ovvero le coordinate di $\vec{OC}$ nella base $\{\vec{OA},\vec{OB}\}$ sono $(\frac{3}{14},\frac{5}{14})$.

(8) Si ha

$$\begin{aligned} \vec{OP}_1+4\cdot\vec{OP}_3 &= (2\vec{i}+5\vec{j})+4(-3\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}) \\ &= -10\vec{i}+9\vec{j}-24\vec{k} \end{aligned}$$

ovvero le coordinate di $\vec{OP}_1+4\cdot\vec{OP}_3$ nella base $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ sono $(-10,9,-24)$. In modo analogo si prova che le coordinate di $\vec{OP}_3-3\cdot\vec{OP}_2-\vec{OP}_1$ sono $(-8,-18,-12)$.

(9)

i) L'indice $i$ è l'indice di riga di un elemento della matrice $A$, mentre $j$ è l'indice di colonna. Dunque $1\le i\le 2$ e $1\le j\le 4$. Analogamente $1\le h\le 3$, $1\le k\le 5$, $1\le r\le 3$, $1\le s\le 3$.

ii) $a_{23}=5$; $b_{34}=2$; $c_{33}=-1$.

iii) L'unico prodotto possibile è

$$C\cdot B=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 2 & -7 \\ -2 & 7 & -4 & 4 & -6 \\ 1 & -3 & 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(11) Si ha:
*i)*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A|b=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda $\phi_3$, abbiamo un unica soluzione con $x$ in $\mathbb{R}$: $x = \sqrt[3]{y}$, e dunque (poiché $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$), al più una soluzione con $x \in \mathbb{Q}$, il che prova l'iniettività. Non è suriettiva in quanto, ad esempio l'unica soluzione di $x^3 = 3$ è $x = \sqrt[3]{2}$ che non è razionale.

Per $\phi_4$ si ragiona come per $\phi_2$. Stavolta la soluzione (unica) $x = y/5$ è sepre accettabile, e dunque $\phi_4$ è una biiezione.

Nel caso di $\phi_5$, lequazione da risolvere è $x^2 = y$ con $y > 0$. Si hanno sempre le due soluzioni distinte $x = \sqrt{y}$ e $x = -\sqrt{y}$, dunque $\phi_5$ è suriettiva ma non iniettiva.

Se però restringiamo il dominio di $\phi_5$ a $\mathbb{R}_+$, allora la soluzione $x = -\sqrt{y}$ non e' più accettabile: $\phi_6$ è biiettiva.

Infine, per $\phi_7$ si ragiona come per $\phi_1$. Se $y \leq 0$ la soluzione $x = \sqrt[3]{y}$ non è accettabile (è un numero minore o uguale a zero) e dunque l'equazione $\phi_7(x) = y$ con $y \leq 0$ non ha soluzioni con $x \in \mathbb{R}_+$. Ne segue che $\phi_7$ è iniettiva ma non suriettiva.

(7)

(a) Dobbiamo mostrare che l'unica soluzione dell'equazione $\alpha\vec{i}' + \beta\vec{j}' = 0$ è quella banale $\alpha = \beta = 0$. Sostituendo a $\vec{i}'$ e $\vec{j}'$ le loro espressioni in termini dei vettori $\vec{i}$ e $\vec{i}$, si trova

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\vec{i}' + \beta\vec{j}' \\ &= \alpha(\vec{i} + \vec{j}) + \beta(\vec{i} - 2\vec{j}) \\ &= (\alpha + \beta)\vec{i} + (\alpha - 2\beta)\vec{j} \end{aligned}$$

Ma $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ è una base, dunque deve essere

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

e quindi $\alpha = \beta = 0$.

(b) Dobbiamo scrivere il vettore $5\vec{i} + 3\vec{j}$ nella forma $\alpha\vec{i}' + \beta\vec{j}'$. Sostituendo a a $\vec{i}'$ e $\vec{j}'$ le loro espressioni in termini dei vettori $\vec{i}$ e $\vec{i}$, si trova

$$\begin{aligned} 5\vec{i} + 3\vec{j} &= \alpha\vec{i}' + \beta\vec{j}' \\ &= \alpha(\vec{i} + \vec{j}) + \beta(\vec{i} - 2\vec{j}) \\ &= (\alpha + \beta)\vec{i} + (\alpha - 2\beta)\vec{j} \end{aligned}$$

Facoltà di Ingegneria a.a. 2002-2003

**GEOMETRIA 1** proff. Baldoni e Piacentini Cattaneo

4 ottobre 2000

Insiemi e operazioni tra insiemi - Funzioni - Vettori applicati - Coordinate di un vettore rispetto ad una base

**Soluzioni**

(1) Si ha:
a) $\{11, 33, 55, 77, 99\}$;
b) $\{1, -5\}$;
c) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$.

(2) I tre insiemi in questione sono tutti distinti. In particolare, $A$ è diverso da $B$ e da $C$ in quanto $A$ non contiene alcun elemento, mentre sia $B$ che $C$ contengono esattamente un elemento. Inoltre $B$ e $C$ sono distinti in quanto l'unico elemento di $B$ è diverso dall'unico elemento di $C$ (c'è tuttavia una evidnte biiezione tra gli insiemi $B$ e $C$).

(3) Gli insiemi $A$ e $C$; per completezza: $B = \{0\}$ e $D = \{-2, -1\}$.

(4) $A = C$; $A \subseteq B$; $A \subseteq D$; $C \subseteq B$ ; $C \subseteq D$. Tra $B$ e $D$ non c'è alcuna relazione di inclusione.

(5) Si ha:
a) $\big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$;
b) $\big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}\{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\big\}$.

(6) Dobbiamo studiare il numero di soluzioni dell'equazione $\phi(x) = y$ al variare del parametro $y$. Nel caso di $\phi_1$ l'equazione in questione è $x^3 = y$ che ammette sempre l'unica soluzione $x = \sqrt[3]{y}$; dunque $\phi_1$ è biiettiva.

Nel caso di $\phi_2$, l'equazione è $5x = y$, con $x, y \in \mathbb{Z}$. Per $y$ intero, l'equazione in questione ha un unica soluzione in $\mathbb{Q}$, precisamente $x = y/5$; ne segue che l'equazione $5x = y$ ha *al più* una soluzione in $\mathbb{Z}$ (in quanto $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$). Questo mostra che $\phi_2$ è iniettiva. D'altronde non è suriettiva, proprio perché l'unica soluzione in $\mathbb{Q}$ non sempre è in $\mathbb{Z}$. Ad esempio $5x = 1$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}$. Un altro modo di provare l'iniettività e osservare che da $\phi_2(x_1) = \phi_2(x_2)$ segue immediatamente $x_1 = x_2$.