(b) si scriva la matrice della trasformazione T rispetto alle basi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2) = \{w_1, w_2\}$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ x - y - z \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice associata alla trasformazione T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente;

(b) si scriva la matrice della trasformazione T rispetto alle basi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2) = \{w_1, w_2\}$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

9. Si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

come definenti opportune applicazioni lineari fra spazi di tipo $\mathbb{R}^h$ e $\mathbb{R}^k$.

(a) Determinare in quale ordine si possono comporre;

(b) determinare equazioni cartesiane per l'immagine della composizione.

10. Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare Ker T;

(b) calcolare ImT;

(c) determinare tutti gli elementi di $\mathbb{R}^4$ (se esistono) che hanno per immagine $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Sia data l'applicazione lineare

$$T: \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

a) Determinare $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$;

b) trovare Ker$T$ e ImT.

5. Sia data l'applicazione lineare

$$T: \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

a) Determinare $T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$;

b) trovare Ker$T$ e ImT.

6. Sia data l'applicazione lineare

$$T: \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

a) Determinare $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$;

b) trovare Ker$T$ e ImT.

7. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y - z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice associata alla trasformazione T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente;

Facoltà di Ingegneria a.a 2002-2003

GEOMETRIA 1 proff. Baldoni e Piacentini Cattaneo - 11 novembre 2002

Applicazioni linerari. Matrice associata ad un'applicazione lineare ed a una coppia di basi. Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.

1. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'unica trasformazione lineare tale che

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare $T\left(\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\right)$;
   (b) determinare la matrice della trasformazione lineare T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
   (c) determinare dimensione di Ker T e dimensione di Im T.
2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

   (a) determinare Ker T e Im T;
   (b) verificare che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

   costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$;
   (c) determinare la matrice della trasformazione lineare T rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ essendo e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
3. Si consideri l'applicazione lineare T da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ data da

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}2x_1 - x_3\\x_4 - x_1\\x_4 + x_1\end{pmatrix}$$

   a) determinare dimensione e base di ImT;
   b) determinare dimensione e base di Ker$T$;