Esercizio di recupero

Discutere, al variare del parametro reale λ, le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + 3z = 7 \\ \lambda x + y + z = 3 \\ x + y - z = \lambda + 1 \end{cases}$$

6. Si consideri la matrice A_t (dipendente dal paramentro reale t) definita da

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t è diagonalizzabile?

5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di A;

(b) determinare le dimensioni degli autospazi di A ed una base per ciascun autospazio.

(c) la matrice A è diagonalizzabile?

(d) Dire $\mathbb{R}^3$ è la somma diretta degli autospazi.

4. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado al più due e sia $\mathcal{B} = \{1 + x^2, 1 + x, 1 + x - x^2\}$.
   (a) Si verifichi che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$.
   (b) Si determini la matrice del cambio di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$, cioé la matrice che rappresenta l'applicazione identità rispetto alla base canonica in partenza e alla base $\mathcal{B}$ in arrivo.
   (c) Quali sono le coordinate del vettore $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ nella base $\mathcal{B}$?

3. Si consideri l'applicazione lineare T da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ definita da

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice associata all'applicazione T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$.

(b) Scrivere $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

2. Si consideri l'applicazione lineare T data da

$$
\begin{aligned}
T\colon\ & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
& \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(a) Determinare la dimensione ed una base per $\ker T$.
(b) Determinare la dimensione ed una base per $\operatorname{Im} T$.
(c) Decidere se l'applicazione è iniettiva e/o suriettiva.

Avvertenza: si ricorda che, se uno spazio vettoriale ha dimensione zero, la sua base è l'insieme vuoto.

Facoltà di Ingegneria a.a 2002-2003

SECONDO ESONERO DI GEOMETRIA 1

proff. Baldoni e Piacentini Cattaneo

21 novembre 2002

Nome

Cognome

Svolgere il maggior numero possibile di esercizi, spiegando in dettaglio il procedimento utilizzato nella risoluzione. Il valore di ogni esercizio risolto correttamente è di **6** punti.

Compito A

---

1. Si fissi un riferimento cartesiano ortogonale $RC(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nello spazio e si considerino la retta

$$r_\lambda : \begin{cases} x + y - (\lambda + 1)z = 12 \\ x - y - (\lambda - 1)z = -11 \end{cases}$$

ed il piano

$$\pi : x + y + z = 3$$

Per quali valori del parametro reale λ la retta r_λ ed il piano π sono paralleli? per quali valori sono ortogonali?