Introduzione alla verifica d'ipotesi

Alessandra Nardi

Dipartimento di Matematica

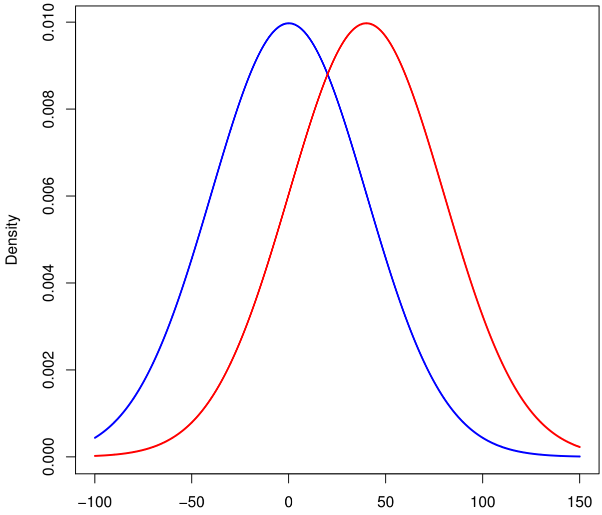
Università di Roma "Tor Vergata"

17 dicembre 2017

Consideriamo il caso in cui la nostra variabile risposta sia continua
Immaginiamo che obiettivo del nostro studio sia valutare l'efficacia di un farmaco sperimentale per la riduzione del livello di colesterolo totale in pazienti affetti da ipercolesterolemia.
Ipotizziamo di misurare l'efficacia del farmaco sulla base della variazione del livello di colesterolo dopo 30 giorni di trattamento (Delta:=valore basale - valore post-trattamento).
Assumiamo che tale variazione segua nella popolazione un **modello Normale** di valore atteso μ e varianza σ^2
Vogliamo valutare il **sistema d'ipotesi**

H_0	:	$\mu = 0\, mg/dl$	Ipotesi nulla: nessuna efficacia in media
H_1	:	$\mu = 40\, mg/dl$	Ipotesi alternativa: efficacia attesa sempre in media

Ipotizziamo di conoscere il valore di $\sigma = 40$ a priori
L'unico elemento incognito resta il valore atteso della variazione (ma la nostra incertezza e' limitata alle due possibili ipotesi)
Questa incertezza residua dovrà essere risolta attraverso l'osservazione dei nostri dati sperimentali

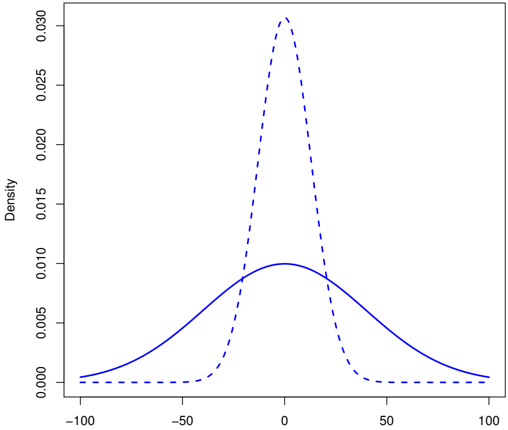

Density
0.000
0.002
0.004
0.006
0.008
0.010
−100
−50
0
50
100
150

Ipotizziamo di aver estratto casualmente un **campione** di 10 pazienti su ciascuno dei quali è stato osservata la variazione del livello di colesterolo dopo 30 giorni di terapia
In simboli
$(X_1, \ldots, X_{10})$ dove X_i i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
Scegliamo come **statistica test** la media campionaria, stimatore naturale di μ che assume adesso il ruolo di *statistica test*
Come lo stimatore, la statistica test è una funzione delle sole nostre osservazioni chiamata a darne una sintesi.
Dall'assunzione di un modello normale segue che la **distribuzione campionaria** della nostra statistica test sarà ancora normale, in simboli

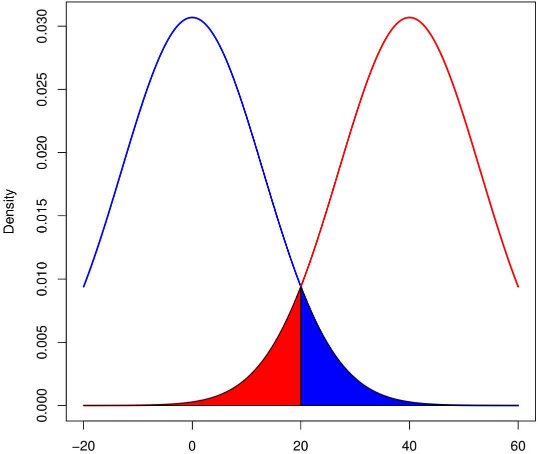
$$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

dove $\sigma = 40$.

Confrontiamo la distribuzione della singola osservazione (linea continua) e quella della media campionaria delle nostre 10 osservazioni (linea tratteggiata) sotto l'ipotesi nulla



Le distribuzioni campionarie della statistica test sotto l'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa sono la base su cui definire la regione di rifiuto del nostro test . . . .



Un test d'ipotesi infatti è formalmente una regola di decisione che associa ad ogni possibile risultato la scelta di una delle due ipotesi. Dovremo pertanto individuare la **regione di rifiuto del test**, $\mathcal{R}$, definita come l'insieme dei valori osservabili della nostra statistica test per i quali andremo a rifiutare H_0.

Nel nostro esempio potremmo assumere $\mathcal{R} = (\overline{x} : \overline{x} > 20)$ (quale regola di decisione abbiamo utilizzato?)

Una volta definita $\mathcal{R}$ non resta che osservare i nostri dati e decidere di conseguenza. Resta tuttavia da definire l'errore associato al notrso test:

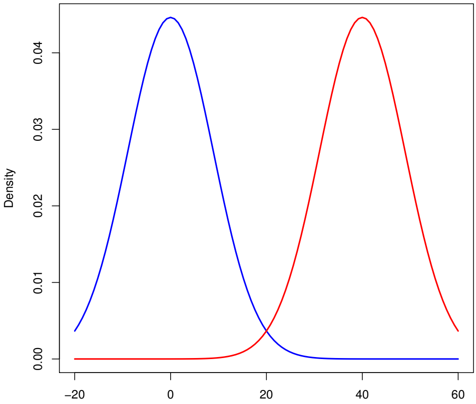
- probabilità di un errore di prima specie o dimensione del test $\alpha = Prob\{\overline{X} \epsilon \mathcal{R} \mid H_0\}$
- probabilità di un errore di seconda specie è $1 - \beta = Prob\{\overline{X} \epsilon \mathcal{A} \mid H_1\}$

dove $\mathcal{A}$ è la regione di accettazione del test (complemento di $\mathcal{R}$).

NB la probabilità $\beta = Prob\{\overline{X} \epsilon \mathcal{R} \mid H_1\}$ è nota come potenza del test

Nel nostro esempio abbiamo $\alpha = 0.057$ e $1 - \beta = 0.057$
Sarebbe possibile ridurre queste probablità di errore scegliendo diversamente la regione di rifiuto?
Potremmo facilmente ridurre α scegliendo $\mathcal{R} = (\overline{x} : \overline{x} > 30)$,
cioè diventando più conservativi. La diretta conseguenza sarebbe tuttavia un aumento della probabilità di errore di seconda specie; diventando molto conservativi rischieremmo di non riconoscere H_1 anche quando è vera.

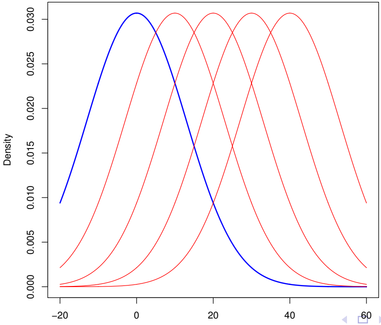
L'unico modo effettvo di ridurre l'errore è aumentare la dimensione campionaria, di fatto seprando le due distribuzioni campionarie della nostra statistica test.



Nella realtà la situazione si complica in primo luogo perché l'ipotesi alternativa è spesso composta

$$\begin{array}{lll} H_0 & : & \mu = 0\, mg/dl \quad \text{Ipotesi nulla: nessuna efficacia in media} \\ H_1 & : & \mu > 0\, mg/dl \quad \text{Ipotesi alternativa: efficacia attesa sempre in media} \end{array}$$

Questo implica che avremo un insieme di distribuzioni campionarie per la nostra statistica test sotto l'ipotesi alternativa, una per ogni possibile valore di $\mu > 0$ e la potenza del test (e la probablità di errore di seconda specie) diventerà una funzione di μ



Inoltre generalmente σ^2 non è noto e sarà necessario ricorrere al suo stimatore

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

La costruzione della nostra statistica test partirà dalla media campionaria che andremo a standardizzare assumendo vera l'ipotesi nulla

$$Z = \frac{\overline{X} - 0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

per poi sotituire σ con il suo stimatore

$$T = \frac{\overline{X} - 0}{S/\sqrt{n}}$$

T dipende adesso da due quantità aleatorie e la sua distribuzione campionaria sarà la distribuzione t di Student con n-1 gradi di libertà

Il test ottimale sarà caratterizzato dalla regione di rifiuto $R = \{t \; tali \; che \; t > t_\alpha\}$ dove t_α si ricava dall'uguaglianza $\int_{t_\alpha}^{+\infty} f_T(t)dt = \alpha$. Nel nostro caso $t_\alpha = 1.83$.