Elementi di probabilità

Alessandra Nardi Gianpaolo Scalia Tomba Caius Gavrila Livio Finos

Dipartimento di Matematica

Università di Roma "Tor Vergata"

27 dicembre 2012

Outline

L'incertezza, la variabilità e la probabilità

Caratteristica non eliminabile degli esperimenti in biomedicina è l'incertezza del risultato finale. Anche immaginando di poter ripetere l'esperimento in condizioni analoghe, l'esito finale sarebbe comunque in qualche misura diverso a motivo di una serie di fattori non controllabili dal ricercatore che concorrono a determinare quella che siamo soliti chiamare variabilità sperimentale (o casuale).

Nel valutare questa variabilità ci serviamo del calcolo delle probabilità che assume per noi l'aspetto di logica dell'incerto.

Mentre il concetto di probabilità è intuitivo, la sua definizione è complessa al punto che esistono diverse scuole di pensiero.

La probabilità secondo Pascal

Dice Pascal: "la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, *purché questi ultimi siano tutti ugualmente probabili* ".
La definizione è tautologica e limitata ma immediatamente operativa.
Scopriamo le prime regole che ritroveremo in tutte le impostazioni:

- $P(A) \geq 0$ per ogni evento A
- Se A è un evento certo $P(A) = 1$
- Se A e B sono due eventi incompatibili le loro probabilità si sommano, $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$
- Se A e B sono due eventi che si sovrappongono (la loro intersezione non è vuota), $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

L'impostazione frequentista

L'impostazione frequentista si fonda sull'idea che in una successione di prove fatte nelle stesse condizioni la frequenza (relativa) di un evento si avvicina alla sua probabilità e che l'approssimazione tende a migliorare con l'aumentare del numero delle prove (legge empirica del caso).
Si stabilisce così uno stretto legame tra frequenze relative e probabilità al punto che quest'ultima viene definita come il limite a cui tende la frequenza relativa dell'evento al tendere ad infinito del numero delle prove.
Se immaginiamo di lanciare una moneta ripetute volte, la probabilità che esca testa sarà pari al limite a cui tende la frequenza relativa delle prove in cui è uscita testa (1/2 soltanto se la moneta non è stata truccata !).

L'impostazione soggettiva

Se l'evento non è ripetibile?
Ci aiuta l'impostazione soggettiva che definisce la probabilità come il grado di fiducia che una persona (equa e coerente) ha nel verificarsi dell'evento.
Definizione bella, ampia ma non operativa (soprattutto per la difficoltà di trovare una persona equa e coerente).
Aggiungiamo che: la probabilità è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica (e 0 se non si verifica).
Inoltre: le probabilità degli eventi devono essere attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa.
La cosa diventa complicata . . .

L'impostazione assiomatica

Sia Ω l'insieme dei possibili eventi "elementari".
Nell'esempio del dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

0 $\mathcal{A}_\Omega$ è la sigma algebra di Ω, è la classe additiva che comprende tutti i sottoinsiemi possibili degli elementi di Ω costruiti tramite unione e negazione. In particolare comprende l'elemento vuoto $\emptyset$ e l'elemento universo Ω

1 $P(A) \geq 0$ per ogni elemento $A \in \mathcal{A}_\Omega$

2 $P(\Omega) = 1$ (se l'evento è certo la probabilità è 1)

3 Se A e B sono incompatibili $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Come vedremo, queste regole costituiscono la base del calcolo delle probabilità.
NB: $\overline{A} = \Omega - A$.
Quindi $A = \text{numero pari} = \{2, 4, 6\}$,
$\overline{A} = \Omega - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\} = \text{numeri dispari}$

Alcune conseguenze:

a $P(\overline{A}) + P(A) = 1$

b $P(\emptyset) = 0$
dim: $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$

c $P(A) \leq 1$ per ogni evento $A \in \mathcal{A}_\Omega$
dim: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$ dove $P(\overline{A}) \geq 0$

d Se $A \subset B$ allora $P(A) \leq P(B)$
dim: $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A})$ quindi
$P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \geq P(A)$ (si noti: $P(B \cap \overline{A}) \geq 0$ e $(B \cap A) \cap (B \cap \overline{A}) = \emptyset$)

La legge delle probabilità totali

Estende l'assioma 3 valido per eventi incompatibili al caso di più di 2 eventi (fino al caso numerabile) anche compatibili.

Se $A \cap B \neq \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Es:
$A = \{1, 2, 3\}$, $P(A) = 1/2$
$B = \{\text{Dispari}\}$, $P(B) = 1/2$
$A \cap B = \{1, 3\}$, $P(A \cap B) = 1/3$
$P(A \cup B) = 1/2 + 1/2 - 1/3 = 2/3$
per verifica si anche noti che $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ quindi
$P(A \cup B) = 4/6 = 2/3.$

La legge delle probabilità composte

Se $P(B) \neq 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Es:
$A = \{1\}$, $P(A) = 1/6$
$B = \{\text{Dispari}\}$, $P(B) = 1/2$
$P(A|B) = 1/3 = \frac{1/6}{1/2}$
(si noti che $A \cap B = A \subset B$ e quindi $P(A \cap B) = P(A)$)
NB: Il condizionamento all'evento B comporta una modifica dello spazio Ω (e della sigma algebra ad esso associata), nel caso in esame: $\Omega_B = \{1, 3, 5\}$ e quindi in Ω abbiamo $P(A) = 1/3$.

L'indipendenza

L'indipendenza tra A e B (L'indipendenza di A rispetto a B)

$$P(A|B) = P(A)$$

La probabilità dell'evento A non cambia condizionatamente all'evento B. Cioè sapere che è successo B non ci dice nulla sulla probabilità che si verifichi A.

Dalla definizione di indipendenza consegue (cioè valgono le seguenti affermazioni *se e solo se* A e B sono indipendenti)

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Es 1: Lanciamo un dado due volte.
$A = \{6 \text{ al primo lancio di dado}\} =$
$\{6 \text{ al primo lancio di dado e un risultato qualunque al secondo}\} =$
$\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\},$
$P(A) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

$B = \{6 \text{ al secondo lancio di dado}\} =$
$\{6 \text{ al secondo lancio di dado e un risultato qualunque al primo}\} =$
$\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\},$
$P(B) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P((6,6))}{P(B)} = \frac{1/36}{1/6} = 1/6 = P(A)$$

altrettanto vale

$$P(A \cap B) = P((6,6)) = \frac{1}{36} = P(A)P(B) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Es 2:
$A = \{1, 2\}$, $P(A) = 1/3$
$B = \{\text{Dispari}\}$, $P(B) = 1/2$

$$P(A|B) = \frac{P(1)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3 = P(A)$$

Es 3: Estrazioni senza reinserimento
Un'urna con 5 palline Rosse e 5 palline Verdi.
Estrazioni successive senza reinserire le palline estratte

Determinare:

a $P(\text{pallina rossa alla prima estrazione}) = P(R1)$
sol: $P(R1) = 5/10$

b $P(R1 \cap R2)$
sol: $P(R1 \cap R2) = \frac{5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{2}{9}$ (con la definizione di Pascal).

c $P(R2|R1)$
sol: Con le formule: $P(R2|R1) = \frac{P(R1 \cap R2)}{P(R1)} = \frac{2/9}{1/2} = \frac{4}{9}$
per costruzione logica: "Se la prima estrazione è una pallina rossa, alla seconda estrazione ci sono 4 rosse e 5 verdi", quindi:
$P(R2|R1) = \frac{4 \text{ rosse}}{4 \text{ rosse}+5 \text{ verdi}} = \frac{4}{9}$

d $R2$ e $R1$ sono indipendenti?
per rispondere devo conoscere $P(R1 \cap R2)$, $P(R1)$, $P(R2)$.

e Calcoliamo $P(R2)$, altre sono note.
sol: $P(R2) = P(R2 \cap R1) \cup P(R2 \cap \overline{R1}) =$
$P(R2|R1)P(R1) + P(R2|\overline{R1})P(\overline{R1}) =$
$P(R2|R1)P(R1) + P(R2|V1)P(V1) = \frac{4}{9}\frac{1}{2} + \frac{5}{9}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$
sol punto [d]: $P(R1 \cap R2)? =? P(R1)P(R2)$, $\frac{4}{9}? =? \frac{1}{2}\frac{1}{2}$ NO! i due eventi sono dipendenti.

Es 4: il problema del cavaliere de Méré

Nel 1600 in Francia il gioco d'azzardo era di gran moda e le bische clandestine diffusissime. Un gioco estremamente alla moda allora era il seguente: la "casa" scommetteva alla pari con un giocatore che quest'ultimo, lanciando per 4 volte un dado, avrebbe ottenuto almeno una volta il numero 6. Come vedremo successivamente questo gioco è leggermente favorevole alla casa che "in media" vince il 52% delle volte. Un distinto ed intelligente francese dell'epoca, Antoine Gombauld Cavalier de Méré, frequentatore delle case da gioco, conosceva bene quel gioco ed era incuriosito da una sua possibile variante: la casa scommetteva alla pari con un giocatore che quest'ultimo, lanciando per 24 volte una coppia di dadi, avrebbe ottenuto almeno una volta il doppio 6. Anche questo gioco, secondo il Cavalier de Méré, avrebbe dovuto essere leggermente favorevole alla casa per questo motivo: quando si lancia un dado vi sono 6 possibili risultati, quindi la probabilità che esca il 6 sarà $1/6$. Invece la probabilità che esca un doppio 6 sarà di $1/36$ (essendo 36 i risultati distinti del lancio di due dadi), quindi 6 volte più bassa; lanciando la coppia di dadi 6 volte di più $(24 = 6 \cdot 4)$ si dovrebbe controbilanciare l'effetto di considerare un evento meno probabile di un fattore 6 e si dovrebbe avere quindi la stessa probabilità.

Invece non è così, quest'ultimo gioco non è favorevole alla casa, ma al giocatore; ne era consapevole il Cavalier de Méré, non è chiaro se per averlo provato a sue spese o per qualche intuizione teorica. In ogni caso decise di parlarne con un altro brillante francese, Blaise Pascal, che si dilettava di lettere, di filosofia, di teologia, ma anche di matematica. Pascal risolse il problema postogli dal de Méré provando anche che con 25 lanci il gioco sarebbe allora stato favorevole alla casa.

Calcolare la probabilità degli eventi:

A= { lanciando 4 volte un dado si ottiene almeno un 6 }

B= { lanciando 24 volte 2 dadi si ottiene almeno un doppio 6 }.

L'evento complementare di A è più semplice:
$\overline{A}$ = { lanciando 4 volte un dado non si ottiene alcun 6 }
poi sfrutteremo la proprietà: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
Indichiamo con T_1,T_2,T_3,T_4 gli eventi: nessun 6 al primo lancio, nessun 6 al secondo lancio, ..., nessun 6 al quarto lancio.
Ora si noti che

- $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 = \overline{A}$
- T_1,T_2,T_3,T_4 sono indipendenti.

Allora: $P(\overline{A}) = P(T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4) = P(T_1)P(T_2)P(T_3)P(T_4) = (5/6)(5/6)(5/6)(5/6) = (5/6)^4$
Quindi $P(A) = 1 - (5/6)^4 = 0.518$

Analogamente per $P(B)$ indichiamo con T_1,T_2,...,T_{24} gli eventi: nessun doppio 6 al primo (doppio) lancio, nessun doppio 6 al secondo (doppio) lancio, ..., nessun doppio 6 al ventiquattresimo (doppio) lancio.
$P(T_i) = 35/36$ (per ogni $i = 1, \ldots, 24$)
$P(\overline{B}) = P(T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_{24}) = P(T_1)P(T_2)\ldots P(T_{24}) == (35/36)^{24}$
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - (35/36)^{24} = 0.491$
cosa succede con 25 lanci di due dadi? La situazione si ribalta, e la casa è nuovamente in vantaggio! Verificare per casa: (soluzione P=0.5055)

Es 5: Il problema dei compleanni
Consideriamo 25 persone a una festa. Qual è la probabilità di avere **almeno** 2 compleanni uguali (evento A)?
Essendo eventi indipendenti, la probabilità che i compleanni siano tutti diversi (evento $\overline{A}$):
$P(\overline{A}) = (364/365)(363/365)(362/365)\ldots(341/365) = 0.432$
$P(\overline{A}) = 0.432$, $P(A) = 1 - 0.432 = 0.568$
Più preciso:

$$P(\{\text{tutti i compleanni sono diversi}\}) =$$
$$P(\underbrace{\{\text{primi 25 compleanni sono diversi}\}}_{A_{25}}) =$$
$$P(A_{25}) =$$
$$P(\underbrace{\{\text{primi 24 compleanni sono diversi}\}}_{A_{24}} \cap \underbrace{\{\text{il 25-iessimo è diverso dei primi 24}\}}_{B_{25}}) =$$
$$P(A_{24} \cap B_{25}) = P(B_{25}|A_{24}) = 341/365 \cdots P(A_{24}) = \ldots$$

NB: Non abbiamo preso in considerazione gli anni bisestili.

Il teorema di Bayes

Dati due eventi A e B con $P(A)$ e $P(B)$ non zero si ha
$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ implica $P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$
$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ implica $P(B|A)P(A) = P(A \cap B)$
eguagliando le due braccia delle eguaglianze derivate si ha
$P(A|B) = P(B|A) \cdot P(A)/P(B)$.

Es 6: Il problema del test di sieropositività

Un test *diagnostico* di tipo ELISA per anticorpi all'HIV ha i seguenti parametri:
sensitività $= 0.99$
specificità $= 0.99$
Una persona risulta positiva al test. Con quale probabilità la persona è veramente HIV positiva?

Per modellare questo problema definiamo seguenti eventi:
H+ = persona HIV-positiva,
H- = persona HIV-negativa,
T+ = test positivo,
T- = test negativo
Con l'aiuto di questi eventi definiamo le due caratteristiche del test:
P(T+ | H+) = 0.99 (sensitività)
P(T- | H-) = 0.99 (specificità)
Anche la domanda si può riformulare in termini probabilistici:
$P(H+|T+) = ?$
(quale è la probabilità di essere una persona HIV-positiva quando il test è positivo ?).

La soluzione del problema del test HIV

Per risolvere il problema dobbiamo calcolare $P(H^+ \mid T^+)$ sapendo

- la specificità $P(T^- \mid H^-)$,
- la sensitività $P(T^+ \mid H^+)$ e
- l'incidenza $P(H^+)$ dell'HIV.

Applicando il **teorema di Bayes**:

$$P(H^+ \mid T^+) = P(T^+ \mid H^+)\frac{P(H^+)}{P(T^+)}.$$

L'unica sconosciuta è $P(T^+)$. Ma

$$P(T^+) = P(T^+ \cap H^+) + P(T^+ \cap H^-)^1$$

e dalla definizione della **probabilità condizionata**:

$$P(T^+ \cap H^+) = P(T^+ \mid H^+)P(H^+)$$

$$P(T^+ \cap H^-) = P(T^+ \mid H^-)P(H^-) = ^2(1 - P(T^- \mid H^-))(1 - P(H^+))$$

[1] Qui abbiamo decomposto l'evento T^+ in due eventi incompatibili ed esaustivi.

[2] Applichiamo due volte la formula dell'evento complementare.

Risulta che

$$P(H^+ \mid T^+) = P(T^+ \mid H^+)\frac{P(H^+)}{P(T^+|H^+)P(H^+)+(1-P(T^-|H^-))(1-P(H^+))}$$

dove tutte le quantità a destra sono conosciute. Calcolando

$$P(H^+ \mid T^+) = 0.99 \cdot \frac{P(H^+)}{0.99 \cdot P(H^+) + 0.01 \cdot (1 - P(H^+))}.$$

Ci serve allora $P(H+)$, la probabilità a priori di essere HIV-positivo.

Una stima attuale è di circa 100.000 infetti in Italia, dunque circa $1/500$, rispetto alla popolazione italiana.
Allora viene $P(H^+ \mid T^+) = 99/598 = 16.5\%$, dunque 5 su 6 sono **falsi positivi** ....

Discussione sul valore di $P(H^+)$

Il valore $1/500$ riflette la probabilità che sia infetta una persona scelta **a caso** nella popolazione, ad esempio una situazione di screening.
L'alta percentuale di falsi positivi indica quanto uno screening funzionerebbe male.

Se la persona che si fa il test appartiene a un **gruppo a rischio**, forse $P(H^+) = 1/100$, allora avremo $P(H^+ \mid T^+) = 99/198 = 0.50$.

Dunque l'utilità del test non è assoluta ma **dipende** in modo critico a chi si applica.

Conclusione o *A che serve la probabilità ?*

Anche se il test migliora arrivando a una specificità e una sensibilità di 99.9% le probabilità calcolate diventano 0.66 e 0.90 rispettivamente, ma restano ancora lontano dal valore suggerito da qualcuno di voi (0.99)!!!

	99%	99.9%
Non a rischio	0.17	0.66
A rischio	0.50	0.90

Es 7: La diagnosi di un medico

Sia E un insieme di sintomi che presenta un paziente. Il medico sa che tali sintomi sono associati a *sole* 3 possibili malattie, incompatibili fra di loro, H_1, H_2 e H_3 con probabilità
$P(E|H_1) = 0.90$, $P(E|H_2) = 0.10$ e $P(E|H_3) = 0.30$
Le malattie hanno diverse prevalenze:

$$P(H_1) = 0.03, \quad P(H_2) = 0.70 \text{ e } \quad P(H_3) = 0.27$$

Applichiamo il teorema di Bayes: $P(H|E)$

$$P(H_1|E) = \frac{P(H_1)P(E|H_1)}{P(E)} = \frac{P(H_1)P(E|H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(E|H_i)} = \frac{0.03 \;\; 0.90}{(0.03 \;\; 0.90)+(0.70 \;\; 0.10)+(0.27 \;\; 0.30)} = 0.15169$$

$P(H_2|E) = 0.39326$
$P(H_3|E) = 0.45505$ allora la malattia H_3 è più probabile.

La variabile aleatoria Bernoulliana

Immaginiamo di lanciare una moneta (bilanciata)
La variabile aleatoria che descrive questo elementare esperimento è un'applicazione X che associa valore 1 al risultato testa e valore 0 al risultato croce
Più in generale definiamo come variabile aleatoria un'applicazione che associa al risultato di un esperimento un numero reale
Ad ogni valore del dominio (Ω) resta associata una (e una sola) probabilità di accadimento.
$P(X=0) = P(X^{-1}(0)) = P(Croce) = 1/2$
$P(X=1) = P(X^{-1}(1)) = P(Testa) = 1/2$
dove
$\sum_{i=1}^{c} p(x_i) = 1,\ p(x) \geq 0$

In genere la probabilità di *successo* non è nota (perché altrimenti fare un esperimento ?) e costituisce il parametro incognito di interesse
$P(X = 0) = 1 - \pi$
$P(X = 1) = \pi$
in una formula: $P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}$
Quella definita è la famiglia Bernoulliana che contiene distribuzioni diverse, una per ogni valore che π può assumere
Una variabile aleatoria si caratterizza definendo l'insieme dei valori che può assumere e la relative probabilità

Altri esempi di variabili aleatorie

Sia Z il risultato del lancio di un dado a 6 facce.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (dominio, campo di esistenza),
$P(Z = 1) = 1/6$
$P(Z = 2) = 1/6$
$P(Z = 3) = 1/6$
$P(Z = 4) = 1/6$
$P(Z = 5) = 1/6$
$P(Z = 6) = 1/6$

Variabili aleatorie e variabili statistiche

Una variabile aleatoria descrive le probabilità dei possibili risultati **osservabili** di un esperimento (per chiarezza possiamo immaginarlo non svolto)

Una variabile statistica sintetizza i risultati osservati

Immaginiamo di aver eseguito n lanci di una moneta, lanci tra loro indipendenti e condotti nelle medesime condizioni, dove la probabilità di successo resta invariata. Sia $n = 1000$, è possibile sintetizzare i risultati **osservati** attraverso una variabile statistica $\tilde{X}$

Valori osservati	Frequenze assolute n_i	Frequenze relative $f(x_i) = n_i/n$
0 (croce)	491	0.491
1 (testa)	509	0.509
Totale	1000	1

Es: lancio di un dado $n = 6000$ volte.

x_i	n_i	$f(x_i)$
1	1000	0.1667
2	974	0.1623
3	949	0.1582
4	1029	0.1715
5	1051	0.1752
6	997	0.1662
Totale	6000	1

Prima di svolgere un esperimento i risultati sono **osservabili** e ad essi vengono associate delle probabilità ; quando i risultati dell'esperimento sono stati **osservati** le probabilità vengono sostitute dalle corrispondenti frequenze relative
Torna (e tornerà) il legame tra probabilità e frequenze relative già stabilito della definizione frequentista della probabilità

Come "si comporta" un variabile aleatoria?

- Conoscere la caratteristiche di X (ad esempio media e varianza) ci aiuta prevedere i risultati dell'esperimento.

  es: sapere che il lancio di una moneta è descrivibile con una v.a. Bernoulliana $\mathcal{B}e(1/2)$ ci aiuta a prevedere quale sarà la proporzione attesa di teste.

- Osservare i risultati dell'esperimento ci aiuta a capire la v.a. che regola il fenomeno.

  es: sappiamo che la moneta è descrivibile con una v.a. Bernoulliana $\mathcal{B}e(\pi)$, ma condurre l'esperimento ci può aiutare a decidere se la moneta è equilibrata (cioè se la proporzione media di teste e pari a quella delle croci).

La media di una variabile aleatoria discreta

X è una v.a. discreta se può assumere un numero finito (o al più numerabile) c di valori distinti
Il suo valore atteso (media) si definisce come $E[X] = \sum_{i=1}^{c} x_i \; p(x_i)$
dove $p(x_i) = P(X = x_i)$

Osserviamo l'analogia con la definizione di media per variabili statistiche
$Media[\tilde{X}] = \sum_{i=1}^{c} x_i \; f(x_i)$
Nel caso della v.a. Bernoulliana avremo
$E[X] = 1 \cdot \pi + 0 \cdot (1 - \pi) = \pi$
Eseguito l'esperimento
$Media[\tilde{X}] = 1 \cdot 0.509 + 0 \cdot 0.491 = 0.509$

La varianza di una variabile aleatoria discreta

$V[X] = E((X - E[X])^2) = \sum_{i=1}^{c}(x_i - E[X])^2 p(x_i)$
in l'analogia con la definizione di varianza per variabili statistiche
$Var[\tilde{X}] = \sum_{i=1}^{c}(x_i - Media[\tilde{X}])^2 f(x_i)$

Nel caso della v.a. Bernoulliana avremo
$V[X] = (1 - \pi)^2\,\pi + (0 - \pi)\,(1 - \pi) = \pi\,(1 - \pi)$
Eseguito l'esperimento
$Var[\tilde{X}] = (1 - 0.509)^2\,0.509 + (1 - 0.509)^2\,0.491 = 0.250$

La funzione di ripartizione ...

... è la funzione che risponde alla domanda:

"qual' è la probabilità che il risultato sia minore o uguale ad x"

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Proprietà di $F(x)$:

- è non decrescente (se $x < y$ allora $F(x) \leq F(y)$)
- è limitata tra 0 e 1 ($\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$)
- è continua a destra ($\lim_{x \to x_0^+} = F(x_0)$)

La variabile aleatoria Binomiale

Ritorniamo all'esperimento del lancio di una moneta e immaginiamo di eseguire 3 lanci indipendenti della stessa moneta. Le terne ordinate hanno queste probabilità di essere osservate

Y	X_1	X_2	X_3	Prob
0	0	0	0	$(1-\pi)^3$
1	1	0	0	$(1-\pi)^2\pi$
1	0	1	0	$(1-\pi)^2\pi$
1	0	0	1	$(1-\pi)^2\pi$
2	1	1	0	$(1-\pi)\pi^2$
2	1	0	1	$(1-\pi)\pi^2$
2	0	1	1	$(1-\pi)\pi^2$
3	1	1	1	π^3

La probabilità congiunta della generica terna (x_1, x_2, x_3) è
$P((X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3)) =$
$\pi^{x_1}(1-\pi)^{1-x_1}\ \pi^{x_2}(1-\pi)^{1-x_2}\ \pi^{x_3}(1-\pi)^{1-x_3}$

Possiamo essere interessati a conoscere direttamente il valore di Y= Numero di teste (successi) osservate piuttosto che la terna ordinata (l'ordine di apparizione non ci interessa visto che sono eventi indipendenti ottenuti nelle medesime condizioni)

- Y=$\sum_{i=1}^{3} X_i$
- Y può assumere i valori (Dominio di Y): $\Omega_Y = (0, 1, 2, 3)$.
- Y=k con quale probabilità?

Y=2 con quale probabilità ?
$P(Y = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) + P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) = 3\,\pi^2\,(1 - \pi)$

Quali leggi della probabilità abbiamo utilizzato? Quali le ipotesi sfruttate?

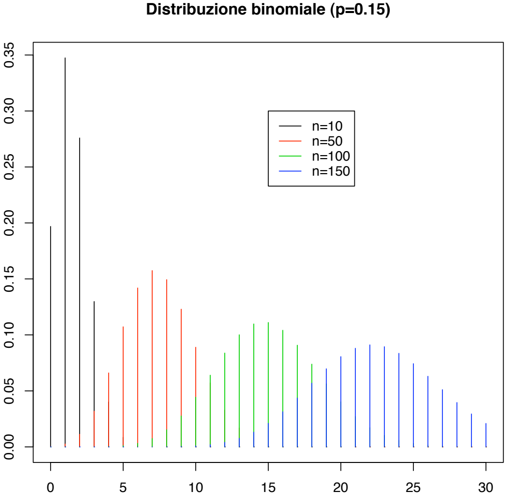
In generale

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}$$

Come calcolare $\binom{n}{k}$ (combinazioni di n su k), il numero di possibili terne non ordinate con k teste n-k croci?

- devo assegnare n posizioni (l'ordine di lancio) a k teste e $n-k$ croci.
  prima testa : ho n posizioni possibili.
  seconda testa : ho n-1 posizioni possibili.
  ...
  k-esima testa: ho n-k+1 posizioni possibili.
  prima croce: ho n-k posizioni possibili.
  (n-k)-esima croce: ho 1 sola posizione possibile.
  quindi ho $n!$ possibili sequenze di k teste e $n-k$ croci
- ora però devo considerare che le k teste sono **indistinguibili** e che esistono
  - $k!$ possibili ordinamenti indistinti delle teste.
  - $(n-k)!$ possibili ordinamenti indistinti delle croci.

  (quindi la medesima sequenza ordinata di 0 e 1 è ottenibile con $k!$ ordinamenti solo apparentemente diversi delle teste e $(n-k)!$ ordinamenti possibili delle croci
- quindi in tutto ho ci sono $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ modi per ottenere k teste con n lanci



Cosa accade se $n \to \infty$?

Dal discreto al continuo: un passaggio delicato

Cosa accade se il risultato del nostro esperimento è una variabile continua ($\Omega = \mathbb{R}$)?

Non è più possibile assegnare una probabilità ad ogni singolo valore osservabile (sono davvero troppi!)

Passiamo dal punto all'intervallo (per quanto piccolo conterrà sempre un numero infinito di punti) e definiamo

$$P(x \leq X < x + dx) = \int_{x}^{x+dx} f(t)dt \approx f(x)dx$$

La funzione $f(x)$ prende il nome di densità e distribuisce la massa di probabilità unitaria su Ω

La probabilità di osservare valori compresi in un dato intervallo è l'area corrispondente sotto questa curva

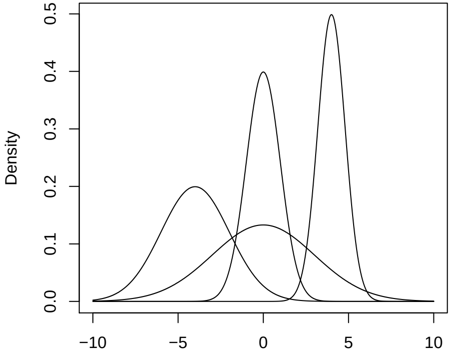
Qualcosa di simile accade anche per le variabili statistiche continue: la distribuzione viene calcolata per classi e rappresentata attraverso l'istogramma (che sotto alcune condizioni è una stima della densità)

Tra le variabili aleatorie continue ha un ruolo importante la famiglia Normale

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$\Omega_X = \mathbb{R}$
$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}}\ \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right]$
Caratteristiche del modello sono:

- l'esistenza di un valore *centrale* μ, valori in un suo intorno sono i più probabili
- la simmetria rispetto a tale valore centrale
- una probabilità che decresce (secondo σ) man mano che ci si allontana da μ



Ferme restando queste caratteristiche, il modello contiene infinite possibilità ...

La variabile aleatoria normale con media nulla è spesso chiamata a descrivere in probabilità l'effetto del caso o *errore casuale*
Numerose sono state le conferme sperimentali a questa ipotesi e il teorema centrale del limite (che riportiamo nella versione di Liapunov) le ha dato sostegno teorico
Siano $X_1, X_2 \dots$ variabili aleatorie indipendenti con media $E[X_n] = \mu_n$, varianza $V[X_n] = \sigma_n^2$ e momento terzo assoluto rispetto alla media $\alpha_n^3 = E|X_n - \mu_n|^3$ finiti.
Sia inoltre $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ e, per $n \to \infty$, sia $\frac{(\alpha_1^3 + \cdots + \alpha_n^3)^{1/3}}{(\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)^{1/2}} \to 0$
Allora la variabile aleatoria $U_n = \frac{(S_n - E[S_n])}{\sqrt{V[S_n]}}$ tende in distribuzione, per $n \to \infty$, alla Normale standardizzata (media 0 e varianza unitaria)

Ora il caso viene spesso considerato intuitivamente come il sommarsi degli effetti di numerosi fattori, singolarmente poco rilevanti
In altre parole come la somma S_n di un gran numero di variabili aleatorie nessuna delle quali ha, singolarmente, un peso rilevante.
Diventa allora semplice ammettere che siano rispettate le condizioni del teorema centrale e che l'effetto del caso si manifesti come una legge normale.
Meno semplice è comprendere per quali ulteriori fenomeni questo modello possa essere ipotizzato e quindi il senso reale dell'affermazione
assumiamo un modello normale
Poincarè osservava criticamente che tutti giuravano sulla distribuzione normale perché gli sperimentatori assumevano che essa era dimostrata matematicamente, e i matematici la ritenevano acquisita sperimentalmente . . .