Cosa si nasconde dietro le stelle

Alessandra Nardi

alenardi@mat.uniroma2.it

Mettiamo a confronto due ipotesi PUNTUALI

Succede raramente, il caso più interessante è il disegno di uno studio clinico prospettico

Sia π la probabilità che un paziente presenti una recidiva della patologia

Vogliamo valutare il sistema d'ipotesi

$$\begin{cases} H_0 & : & \pi = 0.2 & \text{Ipotesi nulla (come da precedenti lavori)} \\ H_1 & : & \pi = 0.3 & \text{Ipotesi alternativa (soglia minima di incremento clinicamente} \end{cases}$$

Reclutiamo sequenzialmente un campione di 10 pazienti $(X_1, \dots, X_{10})$ con

$$Pr\{X_i = x_i\} = \pi^{x_i}(1-\pi)^{1-x_i} \text{ dove } x_i = 0 \text{ o } 1$$

Sintetizziamo le nostre esservazioni attraverso la statistica test

$$S = \sum X_i$$

che nel nostro caso indica il numero osservato di recidive

Ogni sintesi comporta una semplificazione (riduciamo la dimensione) e un guadagno nellínterpretabilità dei dati ma anche una perdita di informazione:
quale nel nostro caso?

La scelta della statistica ottimale risponde alla doppia esigenza di ottenere la massima sempificazione mantenendo tutta l'informazione utile ai nosri scopi.

Gli eventi osservabili per S sono

- 0 (nessun paziente recidiva)

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_{10} = 0.$$

- 1 (un solo paziente presenta una recidiva)

$$X_i = 1 \text{ e } X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{10} = 0$$

  il paziente che recidiva può essere uno qualsiasi $\Rightarrow$ abbiamo $\binom{10}{1}$ situazioni possibili che conducono allo stesso risultato.

$\vdots$

- 10 (tutti i pazienti presentano una recidiva)

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_{10} = 1.$$

La probabilità di osservare r recidive sarà

$$Pr\{S = \sum_{1}^{10} X_i = r; \pi\} = \binom{10}{r} \pi^r (1-\pi)^{10-r}$$

In particolare <u>sotto l'ipotesi nulla</u> H_0 avremo

$$Pr\{S = r | H_0\} = \binom{10}{r} (0.20)^r (0.80)^{10-r}$$

Mentre <u>sotto l'ipotesi alternativa</u> H_1 avremo

$$Pr\{S = r | H_1\} = \binom{10}{r} (0.30)^r (0.70)^{10-r}$$

Calcoliamo le probabilità in dettaglio

r	$Pr\{r\|H_0\}$	$Pr\{r\|H_1\}$	
0	0.10737	0.02825	$\mathcal{A}$
1	0.26844	0.12106	$\mathcal{A}$
2	0.30199	0.23347	$\mathcal{A}$
3	0.20133	0.26683	$\mathcal{R}$
4	0.08808	0.20012	$\mathcal{R}$
5	0.02642	0.10292	$\mathcal{R}$
6	0.00551	0.03676	$\mathcal{R}$
7	0.00078	0.00900	$\mathcal{R}$
8	0.00008	0.00145	$\mathcal{R}$
9	0.00000	0.00013	$\mathcal{R}$
10	0.00000	0.00001	$\mathcal{R}$

Un test d'ipotesi è formalmente una regola di decisione che associa ad ogni possibile risultato per S la scelta di una delle due ipotesi

Possiamo ad esempio decidere di rifiutare H_0 e quindi accettare H_1 se $Pr\{S = r|H_1\} > Pr\{S = r|H_0\}$

Ogni regola di decisione porta alla definizione di una regione di accettazione $\mathcal{A}$ e di una regione di rifiuto $\mathcal{R}$ dell'ipotesi nulla

Una volta definita la regione di rifiuto non resterebbe che calcolare il valore della statistica test sui nostri dati e verificare in quale regione si trova.

Come sempre, tuttavia, al risultato finale è necessario affiancare una misura d'errore (anzi due).

	H_0	H_1
Non rifiutiamo H_0	OK	Errore di seconda specie
Rifiutiamo H_0	Errore di prima specie	OK

Calcoliamo le probabilità associate alle diverse situazioni

$$Pr\{\mathcal{A}|H_0\} = \sum_{r=0}^{2} \binom{10}{r} (0.20)^r (0.80)^{10-r} = 0.67780$$

$$\bullet Pr\{\mathcal{R}|H_0\} = \sum_{r=3}^{10} \binom{10}{r} (0.20)^r (0.80)^{10-r} = \underline{0.32220}$$

$Pr\{\mathcal{R}|H_0\} = \alpha :=$ la probabilità di rifiutare H_0 quando in realtà é vera

Probabilità di un errore di prima specie

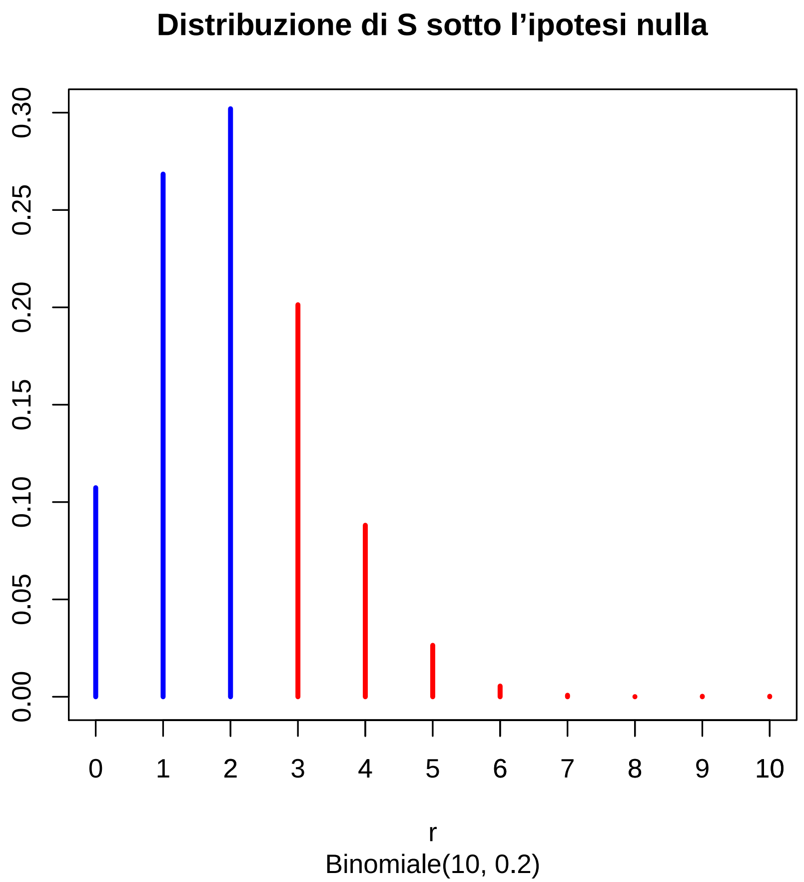
$$\bullet Pr\{\mathcal{A}|H_1\} = \sum_{r=0}^{2} \binom{10}{r} (0.30)^r (0.70)^{10-r} = \underline{0.38278}$$

$Pr\{\mathcal{A}|H_1\} = 1 - \beta :=$ la probabilità di accettare H_0 quando in realtà é vera H_1

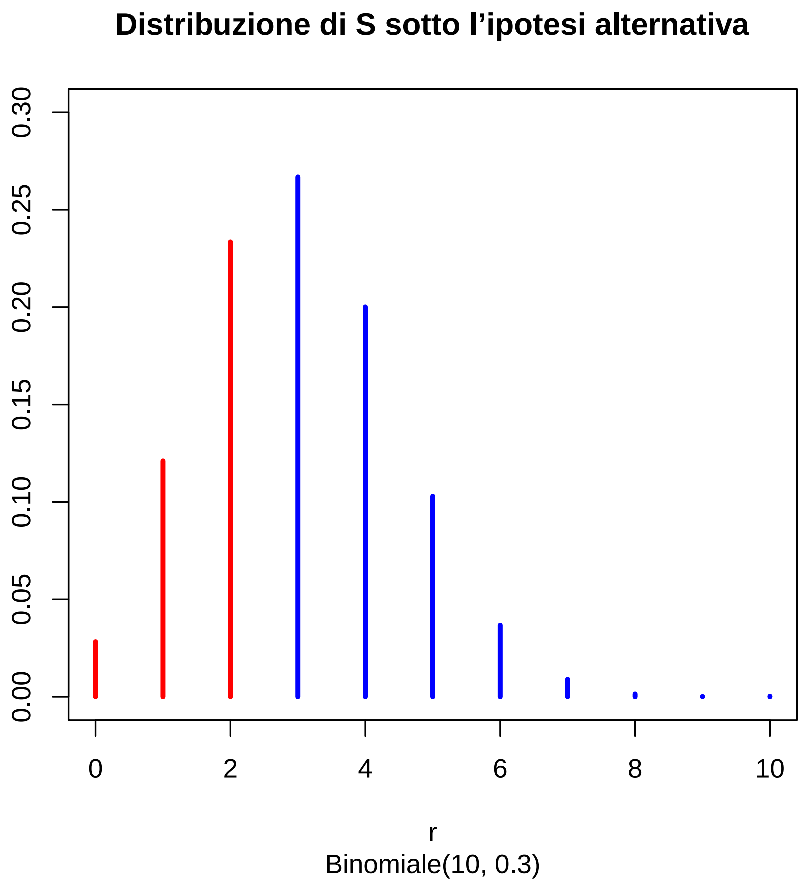
Probabilità di un errore di seconda specie

$$Pr\{\mathcal{R}|H_1\} = \sum_{r=3}^{10} \binom{10}{r} (0.30)^r (0.70)^{10-r} = 0.61722$$

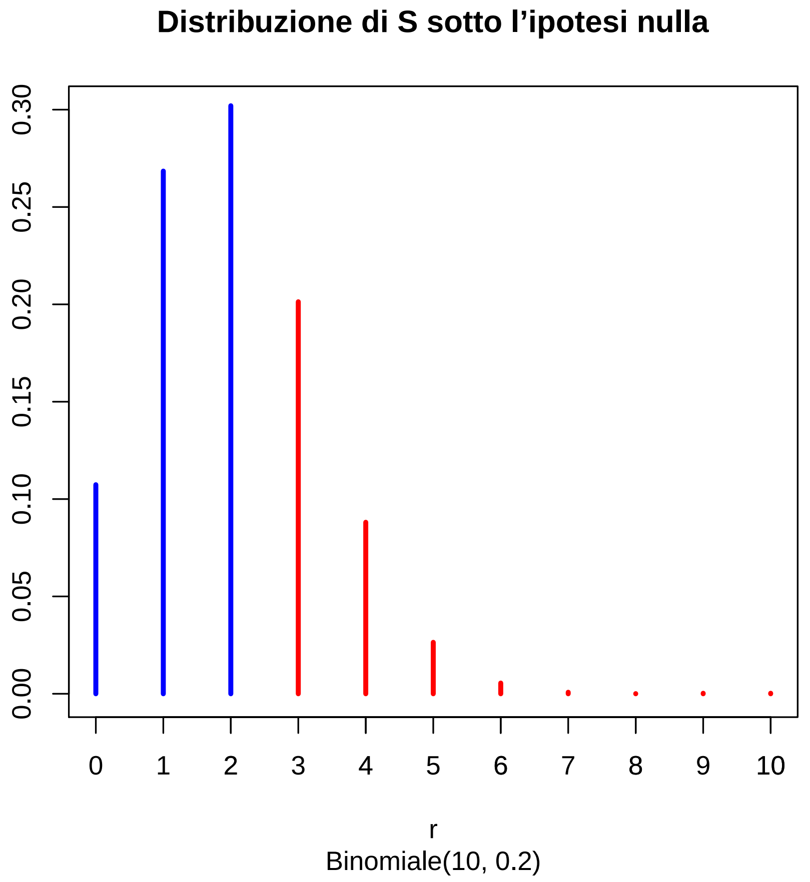
$Pr\{\mathcal{R}|H_0\} = \beta :=$ potenza del test

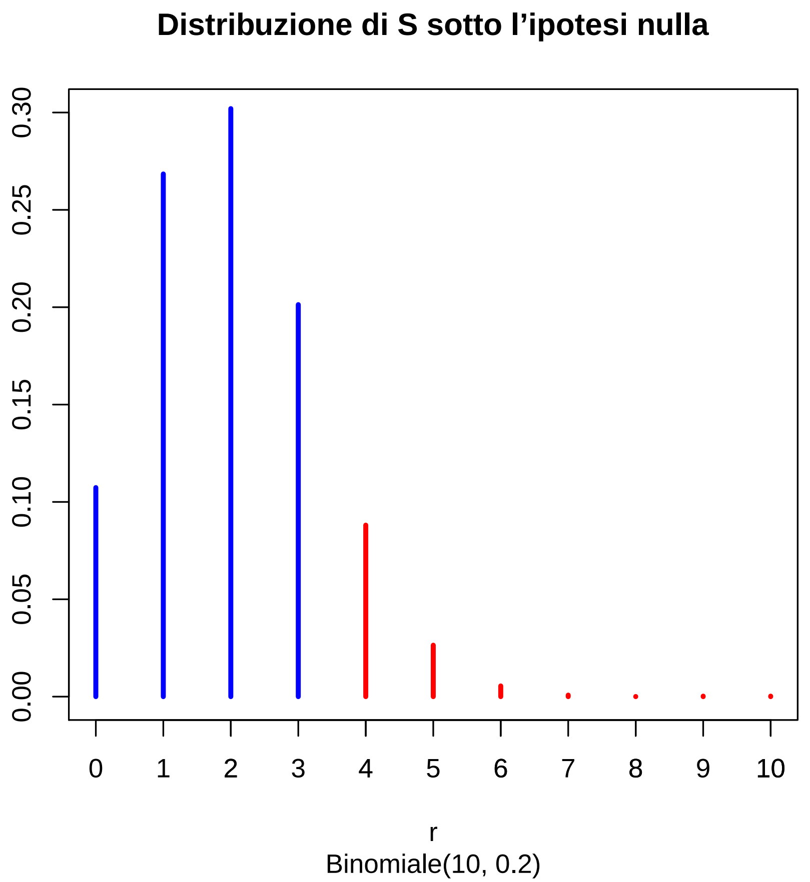


Distribuzione di S sotto l'ipotesi nulla
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
r
Binomiale(10, 0.2)


Distribuzione di S sotto l'ipotesi alternativa
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0
2
4
6
8
10
r
Binomiale(10, 0.3)

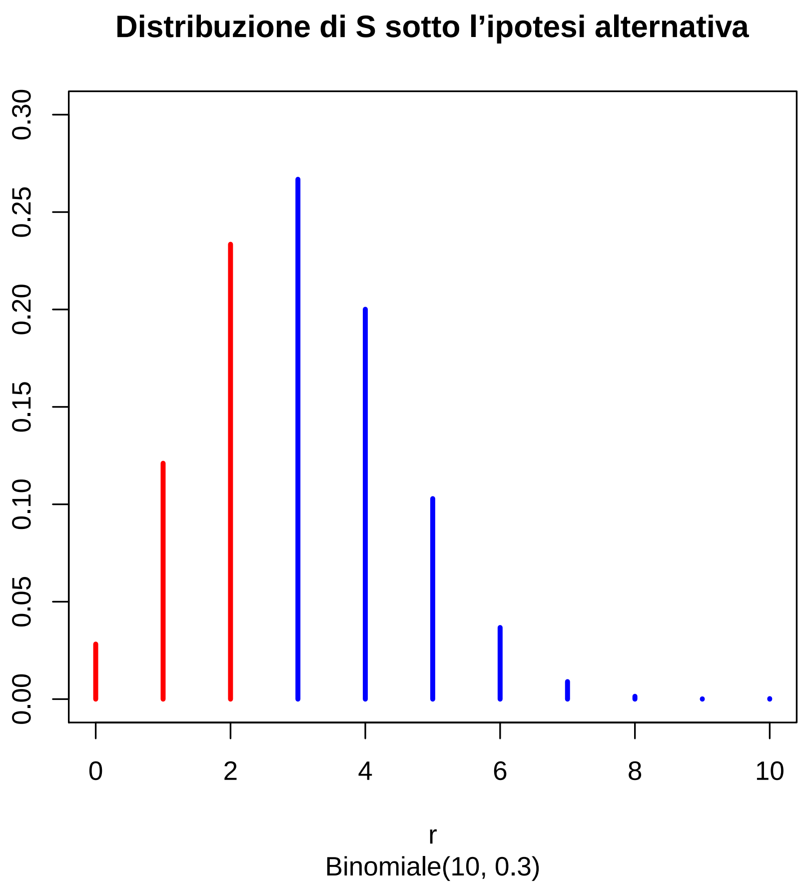
Possiamo scegliere una diversa regola di decisione e quindi una diversa regione di rifiuto in modo da ridurre le probabilità di errore?

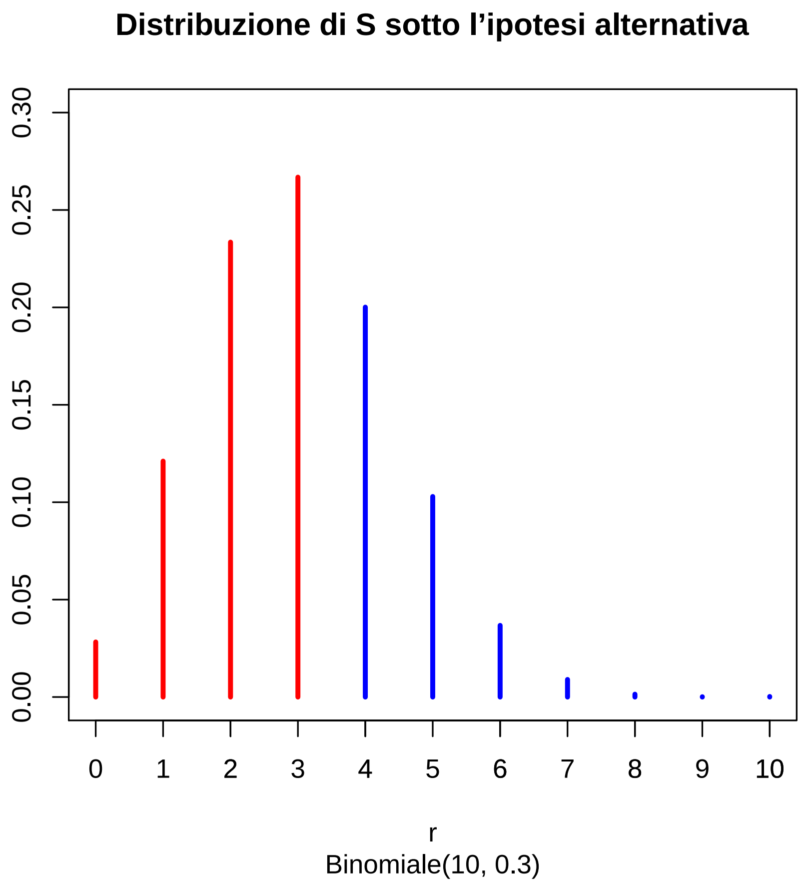




Riducendo $\mathcal{R}$, diminuisce $\alpha \ldots$

... ma aumento $1 - \beta$





<u>non é possibile ridurre simultaneamente le due probabilità di errore.</u>

In verità fissato livello di α siamo certi che il test caratterizzato dalla regola di decisione secondo cui

accettiamo H_1 se $Pr\{S = r|H_1\} > K_\alpha Pr\{S = r|H_0\}$

è il test piu' potente che possiamo ottenere

Se fissiamo $\alpha = 0.04$ la nostra regione di rifiuto sarà

$$\bullet R = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Questa scelta corrisponde di fatto ad una nuova regola di decisione: rifiutiamo H_0 se

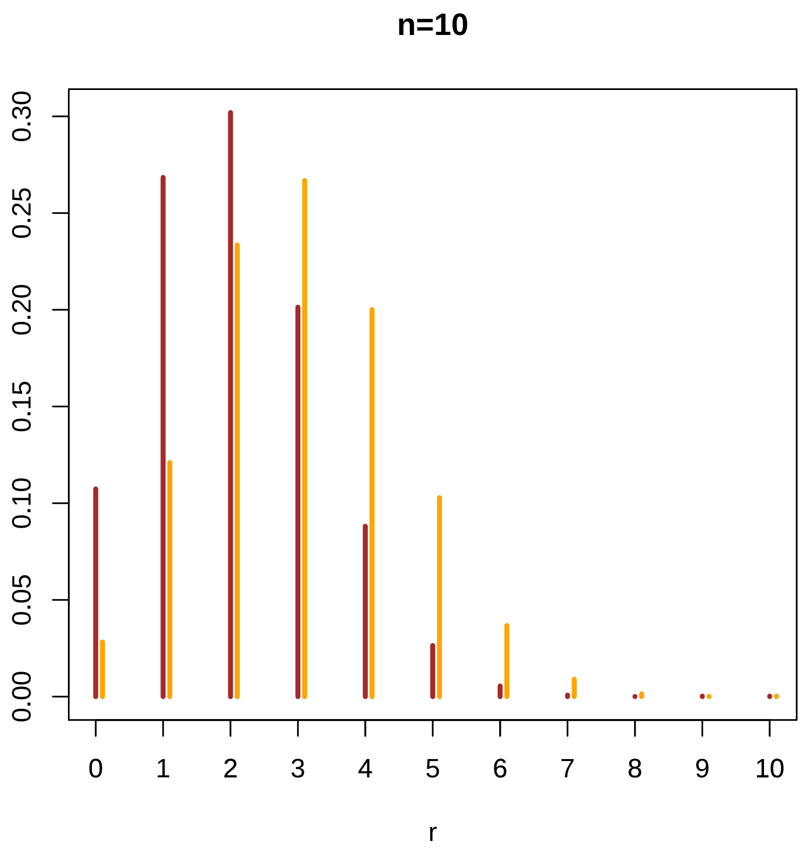
$$\bullet Pr\{r|H_1\} \geq 3.7 Pr\{r|H_0\}$$

Abbiamo controllato la probabilità di rifiutare H_0, riducendola da 0.32 a 0.03, ma diventiamo <u>estremamente conservativi</u>

Adesso la probabilità di accettare H_0 quando è vera H_1 è salita da 0.38 a 0.85.

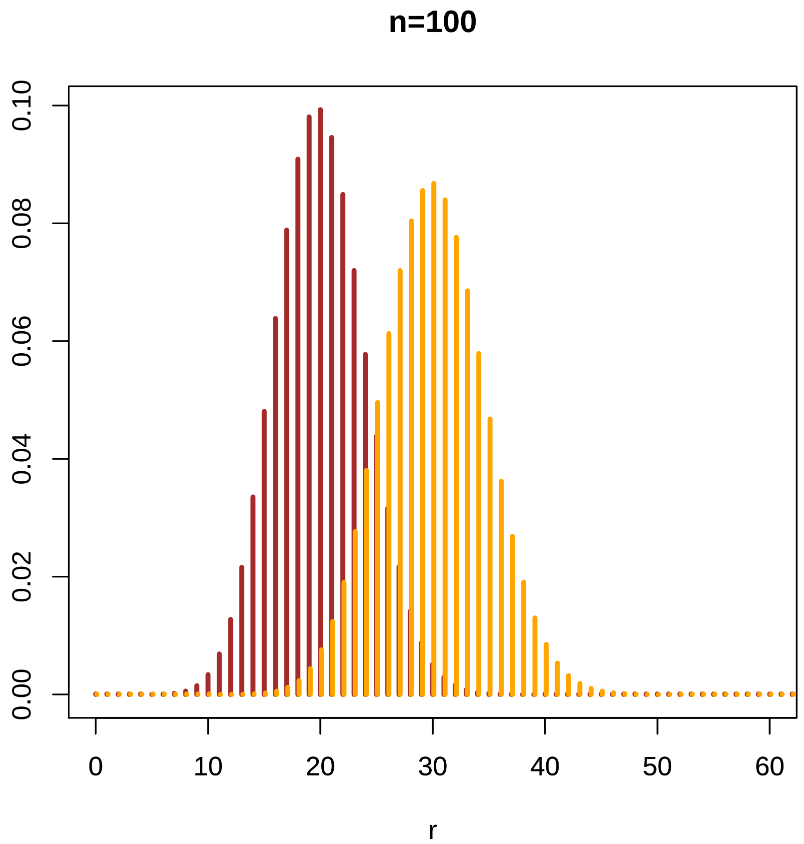
La nostra situazione é “irremediabile”

- ipotesi relativamente “vicine”
- campione molto piccolo

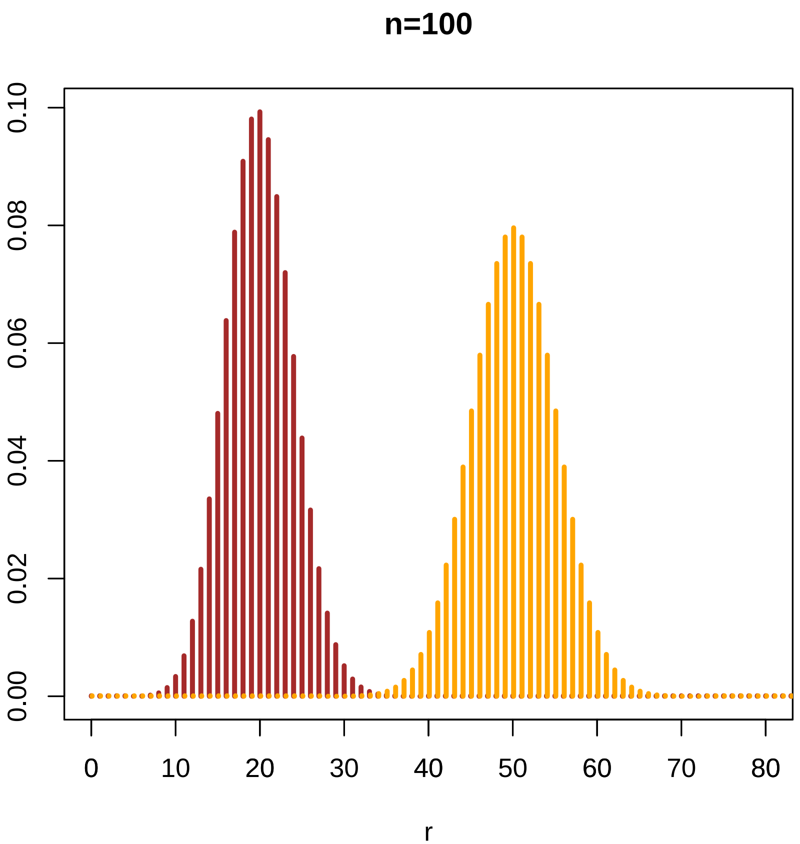


Non resta che aumentare la dimensione del nostro campione

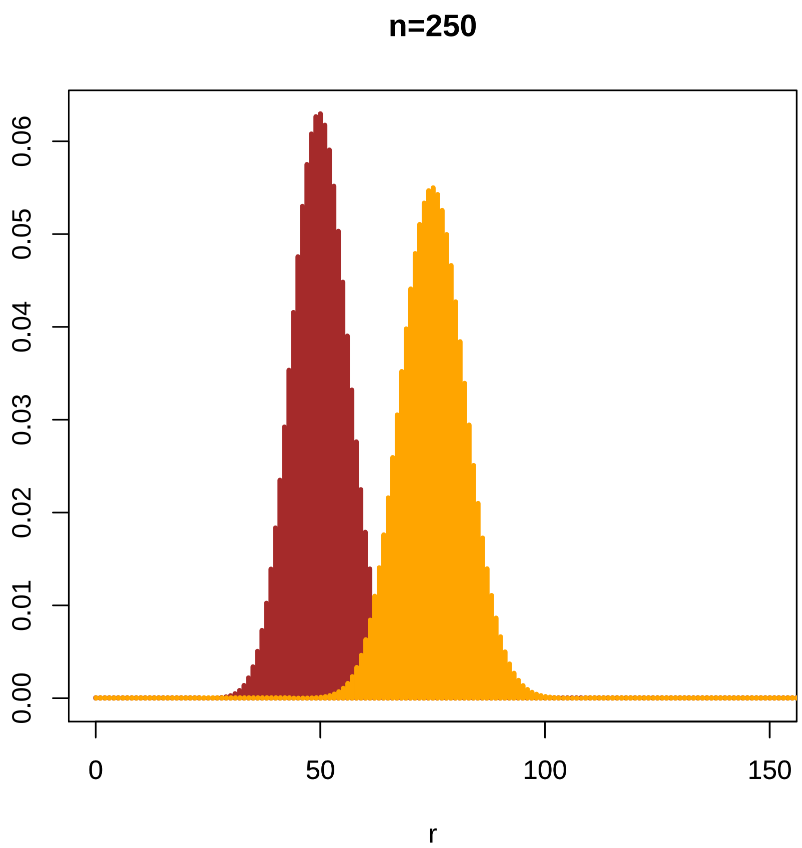
Ancora non basta

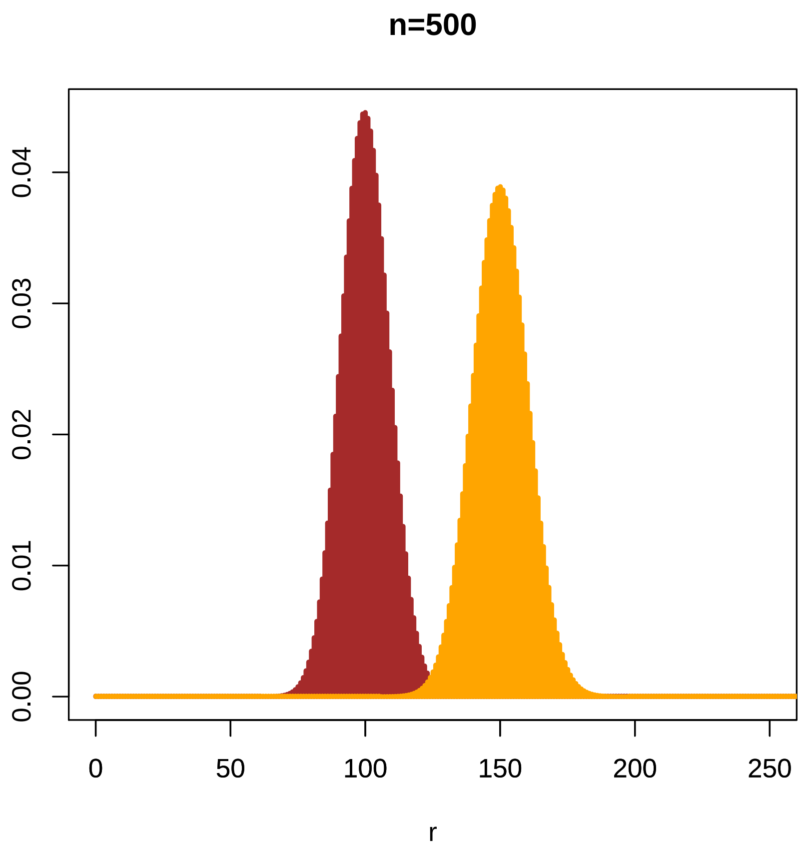


A qualcuno potrebbe venire la tentazione di allontare l'ipotesi alternativa . . .



. . . ma non e' una scelta che vi raccomando




n=500
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0
50
100
150
200
250
r

Quasi dimenticavo il p-value

Torniamo al caso iniziale e immaginiamo di avere osservato $r_0 = 9, r_0 il \mathcal{R}$ accettiamo l'ipotesi alternativa $\pi = 0.30$ con $\alpha = 0.32$ e $\beta = 0.38$

Notate come saremmo giunti alla stessa conclusione anche se avessimo osservato $r_0 = 4$, anche se evidentemente l'evidenza dei notri dati e' diversa

Nel test classico il ruolo del valore effettivamente osservato è limitato
Nasce l'esigenza di accompagnare il risultato del test con una misura dell'evidenza del dato osservato contro (a favore) l'ipotesi nulla

Il p-value e' definito come la probablilità di osservare valore uguali o più estremi dal valore della statistica test otenuto nel nostro campione assumendo vera l'ipotesi nulla

Più piccolo è il valore di p maggiore l'evidenza contro H_0

Nel primo caso avremo p=0.00013 mentre secondo caso p=0.350

e finalmente … uscimmo a riveder le stelle!

In sintesi

1. Ipotizziamo che il fenomeno oggetto di studio segua una legge $Pr(x;\theta)$ dove θ sintetizza gli aspetti incogniti dello stesso
2. Abbiamo formallizzato un sitema d'ipotesi

$$\begin{cases} H_0 & : \quad \theta = \theta_0 \\ H_1 & : \quad \theta = \theta_1 \end{cases}$$

3. Abbiamo estratto un campione casuale di dimensione n

$$(X_1, \ldots, X_n) \quad X_i \sim Pr(x_i;\theta)$$

$$Pr\{x_1, \ldots, x_n\} = \prod_{i=1}^{n} Pr(x_i;\theta)$$

4. abbiamo considerato una statistica test

$$T = f(X_1, \ldots, X_n)$$

$$Pr\{T = t\} = Pr\{(x_1, \ldots, x_n) : f(x_1, \ldots, x_n) = t\}$$

$\Rightarrow P_T(t; \theta)$ <u>distribuzione campionaria di T</u>

5. Abbiamo valutato la probabilità dei diversi valori di T sotto H_0 e H_1

6. Abbiamo fissato un livello accettabile per α, la probabilità di rifiutare H_0 quando vera

7. Per questo livello di α, abbiamo cercato quella regola di decisione che ci garantisce la minima probabilità di rifiutare H_1 quando vera

$$\mathcal{R} = \{t : P_T(t; \theta_0) < c_\alpha P_T(t; \theta_1)\}$$

8. A tale procedura (test) restano associati due possibili errori con le relative probabilità

$$Pr\{\mathcal{R}|\theta_0\} = Pr\{\mathcal{R}|H_0\} = \alpha$$

$$Pr\{\mathcal{R}|\theta_1\} = Pr\{\mathcal{A}|H_0\} = \beta$$

N.B. abbiamo definito una regola decisionale (test)

Una volta osservato il campione calcoliamo il corrispondente valore di T (t_0):

- se $t_0 \in \mathcal{A} \Rightarrow$ accettiamo H_0
- se $t_0 \in \mathcal{R} \Rightarrow$ rifiutiamo H_0