ESERCIZIO 1

Per vedere se ci sono differenze negli stipendi iniziali delle donne e degli uomini laureati in giurisprudenza, vengono selezionati casualmente una donna e un uomo recentemente assunti nello stesso studio legale, ottenendo i dati seguenti:

Studio legale	1	2	3	4	5	6	7	8
Stipendio donna	52	53.2	78	75	62.5	72	39	49
Stipendio uomo	54	55.5	78	81	64.5	70	42	51

utilizza i dati per verificare, ad un livello dello 0.01 l'ipotesi che lo stipendio iniziale sia lo stesso per entrambi i sessi, assumendo un modello normale.

Soluzione:

Sia $D_i =$ stipendio uomo nell' i-mo studio$-$stipendio donna nell' i-mo studio. Nell ipotesi di un modello normale per gli stipendi iniziali in entrambi i sessi anche la loro differenza seguirà un legge normale di valore atteso μ_D. Dobbiamo verificare le ipotesi:

$$H_0 : \mu_D = 0 \text{ contro } H_1 : \mu_D \neq 0.$$

Calcoliamo le differenze osservate, ovvero le differenze tra gli stipendi in ogni studio

$d_1 = 2$ $d_2 = 2.3$ $d_3 = 0$ $d_4 = 6$ $d_5 = 2$ $d_6 = -2$ $d_7 = 3$ $d_8 = 2$

media e varianza campionaria

$$\overline{d} = \frac{2 + 2.3 + 0 + 6 + 2 - 2 + 3 + 2}{8} = 1.9$$

$$s_D^2 =$$

$$= \frac{(2-1.9)^2 + (2.3-1.9)^2 + (0-1.9)^2 + (6-1.9)^2 + (2-1.9)^2 + (-2-1.9)^2 + (3-1.9)^2 + (2-1.9)^2}{7} =$$

$$= 5.29$$

Calcoliamo infine la statistica test da confrontare con $t_{n-1,\alpha/2}$ (*usiamo* $\alpha/2$ *e non* α *perchè il test è bilaterale)*

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{D}}{S_D}$$

$$t_{oss} = \sqrt{8}\frac{1.9}{\sqrt{5.29}} = 2.33$$

poiché $t_{7,0.05} = 1.895$, che è minore di 2.33, possiamo rifiutare l'ipotesi nulla, e quindi affermare che gli stipendi degli uomini sono diversi da quelli delle donne.

ESERCIZIO 2

Per conoscere le abitudini alimentari dei pipistrelli, vengono tracciati via radio 22 pipistrelli, di cui 12 sono femmine e 10 sono maschi. Vengono annotate le distanze percorse in metri dai pipistrelli tra un pasto e l'altro, ottenendo le seguenti statistiche riassuntive:

Femmine:
$n = 12$
$\overline{x} = 180$
$s_X = 92$

Maschi:
$m = 10$
$\overline{y} = 136$
$s_Y = 86$.

Verifica l'ipotesi che la distanza media percorsa tra i pasti sia la stessa per le popolazioni di maschi e di femmine nell ipotesi di un modello normale. Utilizza un livello del 5%.

Soluzione: Poniamo come ipotesi

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \text{ contro } H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

calcoliamo lo *stimatore combinato* della varianza che è:

$$S_p^2 = \frac{n-1}{n+m-2} S_X^2 + \frac{m-1}{n+m-2} S_Y^2$$

$$s_p = \frac{12-1}{12+10-2} 92^2 + \frac{10-1}{12+10-2} 86^2 =$$

$$= 0.55 \cdot 8464 + 0.45 \cdot 7396 = 4655.2 + 3328.2 = 7983.4$$

ora calcoliamo la statistica T, che confronteremo con $t_{n+m-2,\alpha/2}$

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_p^2(1/n + 1/m)}}$$

$$t_{oss} = \frac{180 - 136}{\sqrt{7983.4(1/12 + 1/10)}} = \frac{44}{38.25} = 1.15$$

dalle tavole vediamo che $t_{20,0.025} = 2.086$, che è maggiore di 1.15, quindi non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla a questo livello.

ESERCIZIO 3

Per produrre transistor sono stati proposti due metodi. Da un controllo di qualità abbiamo osservato per il primo metodo 20 pezzi difettosi su 100 prodotti, mentre per il secondo metodo 12 su 100. Possiamo concludere che le proporzioni di transistor difettosi che verranno prodotti con i due metodi siano diverse? Utilizza un livello dello 0.05 e poi dello 0.1.

Soluzione: per prima cosa stimiamo π_1 e π_2 (la probabilitá che un pezzo prodotto con il primo metodo, o il secondo, sia difettoso)

$$p_{1_{oss}} = \frac{20}{100} = 0.20$$

$$p_{2_{oss}} = \frac{12}{100} = 0.12$$

calcoliamo lo stimatore combinato

$$p_{oss} = \frac{20+12}{100+100} = 0.16$$

Le ipotesi sono:

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 \text{ contro } H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$$

ora calcoliamo la statistica Z, che confronteremo con $z_{\alpha/2}$

$$Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2) \cdot P \cdot (1-P)}}$$

dove P= Numero di "successi" su numero di prove

$$z_{oss} = \frac{0.20 - 0.12}{\sqrt{(1/100 + 1/100) \cdot 0.16 \cdot (1 - 0.16)}} = 1.54$$

poiché $z_{0.025} = 1.960$ è maggiore di 1.54 non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla. Non possiamo rifiutarla neanche ad un livello del 10%, perché $z_{0.05} = 1.645$

ESERCIZIO 4

È noto per esperienza che ciascuna unità prodotta da una certa macchina è

di altissima qualità con probabilità 0.38
di alta qualità con probabilità 0.32
di media qualità con probabilità 0.26
di bassa qualità con probabilità 0.04

Una nuova macchina, progettata per lo stesso compito, ha prodotto 500 unità con i seguenti risultati

di altissima qualità: 222
di alta qualità: 171
di media qualità: 98
di bassa qualità: 9

Ritieni che la differenza nella resa possa essere dovuta solo al caso?

Soluzione: le ipotesi sono:

$$H_0 : \pi_i = f_i \text{ contro } H_1 : \pi_i \neq f_i$$

dove i π_i sono le probabilità relative alla macchina nuova, e i f_i quelle ipotizzare vere ($f_1 = 0.38$ $f_2 = 0.32$ $f_3 = 0.26$ $f_4 = 0.04$)

Calcoliamo i valori attesi sotto H_0

$e_1 = n \cdot f_1 = 500 \cdot 0.38 = 190$
$e_2 = n \cdot f_2 = 500 \cdot 0.32 = 160$
$e_3 = n \cdot f_3 = 500 \cdot 0.26 = 130$
$e_4 = n \cdot f_4 = 500 \cdot 0.04 = 20$

e la statistica test:

$$C = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$c = \frac{(222-190)^2}{190} + \frac{(171-160)^2}{160} + \frac{(98-130)^2}{130} + \frac{(9-20)^2}{20} =$$
$$= 5.39 + 0.75 + 7.88 + 6.05 = 20.07$$

dobbiamo confrontare ora 20.07 con i valore di $\chi^2_{3,\alpha}$ a seconda del livello a cui vogliamo fare il test. Rifiutiamo l'ipotesi nulla ad un livello del 5% ($\chi^2_{3,0.05} = 7.81$). Rifiutiamo anche ad un livello dell' 1% ($\chi^2_{3,0.01} = 11.34$) e anche ad un livello dello 0.05% ($\chi^2_{3,0.005} = 12.84$).